



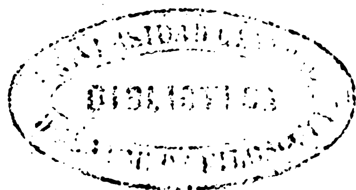


RENATI DES-CARTES GEOMETRIA.

EDITIO SECUNDA,

Multis accessionibus exornata, & plus alterâ sui parte adaucta.

Del S.r Vicente Pasqual.





Primus inaccessum qui per tot sæcula verum
Eruit è tetris longæ caliginis umbris,
Mysta sagax, Natura, tuus, sic cernitur Orbi
Cartesius. Voluit sacros in imagine vultus
Jungere victuræ artificis pia dextera famæ,
Omnia ut aspicerent quem sæcula nulla tacebunt.

CONSTANTINI HVGENII F.LY

GEOMETRIA,

à

RENATO DES CARTES

Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Unà cum NOTIS

FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, Gallicè conscriptis in
Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata,

Operâ atque studio

FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris.

Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata,

Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.



AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
CIↃ IↃC LIX.

CATALOGVS

eorum,

Quæ hoc Opere continentur.

SERENISSIMÆ PRINCIPI

ELISABETHÆ,

FRIDERICI BOHEMIÆ REGIS,

Comitis Palatini, & Electoris Sacri Romani Imperii, Filiæ natu maximæ.

SERENISSIMA PRINCEPS,



UM ea Celsitudinis tuæ sit claritas, ut maximorum hominum monumenta, tanti nominis splendore illustrata, in lucem jam pridem prodierint; quid mirum, si & ego lucubrationes hasce Celsitudini tuæ consecrandas esse duxerim? Nam, ut reliquas virtutes, quæ in Te eximiæ sunt, taceam, tantâ cum prudentiâ singularis ingenii tui perspicacia conjun-

cta est, ut, spretis illis artibus & scientiis, quæ inanis potiùs gloriæ, altercandique studio, quàm veri inquisitionis causâ addiscuntur, eas solas amplexa fueris, quæ placidè philosophantes, nihilque nisi evidens admittentes, continuâ simplicium rationum serie ad abstrusissimarum rerum cognitionem perducunt. Unde fieri non potuit, quin ad sublimem illam sapientiam, quam in Te suspicimus ac veneramur, felicissimè tempore brevissimo perveneris. Singularem tuum in Mathematicis profectum non est quòd hìc commemorem; cum majorum tuorum exemplo, laudatissimæque memoriæ Principum, qui sanguinis vinculo tibi fuêre

fuêre juncti, atque ex harum artium cultura immortalem sibi gloriam reportarunt, eas non minùs colas, quàm hæreditatis jure in iisdem excellas. Quippe quæ in earum adyta ita penetrasti, ut Artem Analyticam, ipsam in Mathematicis inveniendi viam, in qua ingenii præsertim acumen requiritur, optimè cognoveris, eâque ratione, quantùm incomparabilis ingenii tui industria præstare valeat, satis superque ostenderis. Quæ cum ita sint, atque insuper in me ipso compertum habeam, quanto favore Matheseos cultores prosequaris; jure meritissimo effecêre, ut publicum hoc tanti beneficii, tantorumque meritorum tuorum testimo-

stimonium extare vellem, atque hoc qualecunque, sive grati animi monumentum, sive observantiæ in Celsitudinem tuam meæ pignus, offerrem. Quod, ut solito favore excipiat, submissè rogo,

SERENISSIMÆ CELSITVDINIS TVÆ

Dabam Leydæ, XII Kal. Julii,
Anni CIↃ IↃC XLIX.

Devotissimus cliens

FR. à SCHOOTEN.

FRAN-

FRANCISCUS à SCHOOTEN

LECTORI

S.

Ovennium est, & quod excurrit, Benevole Lector, cùm Geometria hæc Nobilissimi atque incomparabilis Viri RENATI DES CARTES, *quam vernaculâ linguâ anno* 1637 *inter Philosophiæ suæ specimina in lucem edidit, è Gallica à me in Latinam linguam versa commentariisq; illustrata primùm prodiit. Interea autem temporis cum operam, quam hoc in negotio collocâram, Viris literatis & ingeniosis pluribus, quos stupenda Authoris nostri eruditio latêre non potuit, haud ingratam fuisse compererim; non potui non, distractis exemplaribus, cùm novam editionem Typographus adornaret, quin honestæ ipsius petitioni locum darem, eaq; flagitanti concederem, quæ ad Operis hujus commendationem illustrare vel addere valebam. Quid hìc autem nunc demum præstiterim, si candido Lectoris judicio relinquam, facilè ex utriusque editionis inter se collatione dignoscet. Cujus etiam laboris nunquam me pœnituit, tum quòd regiam hìc ad pœnitiora universæ Matheseos adyta viam, quam cuique ingredi licet, patere sciebam, tum quòd hanc summi Viri Geometriam publici interesse, & è re eorum fore, qui Mathematicis operam dant, in me ipso cum aliis strenuis Methodi nostræ cultoribus, non sine voluptate indies experiebar. Verùm enimvero cum illius utilitas tanta sit, ut, si eam vel paucis describerem, paginæ, quæ præfationi hìc inservient, deficerent, indicasse suffecerit, vix quicquam in universa Mathesi ita difficile aut arduum occurrere posse, quò non inoffenso pede per hanc Methodum penetrare liceat, quodvè Geometriæ hujus legibus non subjici solviq; possit. Accedit, quòd nullis Problematum finibus aut numero coërceatur, sed fructum, qui vel à Veterum Analysi vel à Recentiorum Algebra exspectandus erat, omnem in se contineat,*

** tineat,

tineat, nec quicquam hic desiderari posse videatur; atque adeò frustra sit, quòd de aliâ sibi quis exoptandâ Methodo, ad Matheseos culturam perfectionemq́, in posterum cogitet. Quippe hæc illa est, cujus exercitio Author mentem excolendo, non modò in Mathematicis Scientiis summas difficultates adolescens adhuc superavit, aliisq́ in inveniendo palmam præripuit; sed tantam quoque ingenii promptitudinem facilitatemq́ sibi deinceps conciliavit, ut primus clavem, quâ mysteria Vniversi reseranda sunt, & cujus ope natura naturæ ac lux orbi magis magisq́ redditur, invenerit: adeò ut eorum, quæ lumine naturali cognosci queunt, nihil tam abditum, densisq́ immersum fuisse tenebris, putandum sit, quod ingenii sui felicitate eruere ipse desperasset. Versionem quod attinet, cum fidelissimus ubique verborum interpres, salvo rerum pondere, esse studuerim, vix est, quòd censuram aliquorum metuam; præsertim ubi illam ab Authore, cui pro jure integrum fuit suum ubique sensum vel interpretari vel clariorem reddere, postea recognitam fuisse sciverint. Verùm cum hæc Geometria à paucis, cum propter eruditam brevitatem, tum propter quæstionum, quæ inibi pertractantur, difficultatem, non sine abstrusa attentione ac indefesso studio per se intelligi potuerit; periculum erat, ne laborum impatientes Lectores, cùm metam vel ipsi ignorarent, vel improbi negarent, arenam desererent. Conscius itaque ego illam non in eum finem ab Authore conscriptam esse, quasi ipsius Methodum ex ea unusquisque quàm facillimè haurire posset, sed tantùm ut eximia aliquot ejus specimina ederet: operæ pretium duxi in commune consulere, & difficiliora loca passim à me explicata uberioribus hinc inde exemplis altiùs illustrare. Scopum Authoris quod spectat, eum hoc loco exponere haudquaquam duxi necessarium, cum cujusque libri argumentum commentariis meis præmiserim, veterumq́ circa Geometria Problemata opiniones ac decreta, scitu non injucunda, ibidem explicaverim, quò operis summam atque adeò commentariorum nostrorum usum breviter complecterer. Porrò ne quid deesse videretur, unde hæc Geometria majorem adhuc lucem sortiretur, additæ etiam sunt Notæ à Clarissimo atque Amplissimo Viro D. FLORI-

MON-

MONDO DE BEAUNE, *Consiliario Blesensi, in eandem olim Gallicè conscriptæ. Quæ eodem modo in Latinam linguam à me translatæ, postquam huic Geometriæ primò ejus permissu essent annexæ, dein ab ipso recognitæ & emendatæ, nunc denuo vel hoc nomine, ni fallor, acceptiores sunt accessuræ. Præterea, quò unusquisque instructus iis, quibus ad adyta ejus Methodi perducatur, se ad ipsam Geometriam legendam accingere possit; haud omittendum duxi, quin simul Introductionem nostram, quam Vir Clarissimus, mihiq́ amicissimus,* D. ERASMIUS BARTHOLINUS, *nunc Medicinæ & Matheseos in Academia Hafniensi Professor Regius, in eum finem olim conscripsit ac anno* 1651 *publici juris fecit, prout illam uterque jam demum recognovimus, editioni huic adjungerem. Quo quidem negotio futurum spero, ut, quod propriis condimus horreis, ex aliena non opùs sit messe emendicare, licèt Author antehac, tum ad suam Geometriam intelligendam Lectorem in aliis Geometriæ libris jam versatum præsupposuerit, ne quæ inibi dicta sunt & demonstrata repetere cogeretur; tum etiam ad suam Methodum addiscendam leviorem vulgaris Algebræ cognitionem requisiverit. Nec enim video, quid imprasentiarum, post mediocrem in Arithmetica & Geometriæ elementis exercitationem, calculiq́, eâdem Introductione explicati, notitiam, Lectori moram injicere possit, quo minus inoffenso pede ad hanc Geometriam accedat. Et quanquam optandum fuisset, hæc omnia ab Authore ipso fuisse præstita; quippe qui tantùm regulas suæ Methodi maximè necessarias hìc exposuit; attamen quia animadvertit laborem atque industriam, quam Lector in investigandis reliquis, demonstrandisq́ iis, quæ tantùm intento digito indicavit, impenderet, præcipuum esse in hac Scientia, quo cujusque ingenium excolatur: à semetipso impetrare non potuit, ut ea fusius pertractaret. Hinc cum successu temporis inter eos, quibus hanc Geometriam sedulò versare ejusq́ arcana penitissimè rimari cordi fuit, non pauci reperti sint, qui, Authoris vestigiis arctè insistentes, præclara multa, ad excellentiam illius Methodi plurimùm facientia, invenerint, omnesq́ inter, præ copia inventorum eo-*

rumq; dignitate, subtilissimus ac præstantissimus D. JOHANNES HUDDENIUS, *Amstelodamensis, amicus meus integerrimus, primas facilè obtineat: visum fuit ea, quæ ab ipso de Æquationum Reductione ac de Maximis & Minimis, maximam partem Belgicè conscripta, inter alia per literas mihi sunt communicata, postquam à me Latinè essent reddita, Geometriæ huic pariter subjungere. Quibus tanquam colophonem addere placuit Epistolam, quam acutissimus, mihiq; ut* HUDDENIO *nostro conjunctissimus*, D. HENRICUS VAN HEURAET, *Harlemensis, Salmurio nuper ad me transmisit. In qua cum brevem exponat Methodum, inter peregrinandum à se novissimè excogitatam, transmutandi complures curvas lineas in rectas, quod ipsum à nemine (quantum novi) in hunc usque diem ostensum est, quin imò à multis ut insolubile habitum: id mihi agendum putavi, ne eximium adeò inventum occultaretur, ut, impetrato ad id ejus consensu, illud hîc loci in lucem producerem. Eâdem ratione ductus, ne sparta, quam Vir Amplissimus, nunc piæ memoriæ,* D. DE BEAUNE *in excolenda propagandaq; hujus Geometriæ Methodo susceperat, præcipiti ejus fato interiret; ex officio atque publica Mathesin amantium utilitate fore existimavi, si Clarissimum Virum* D. ERASMIUM BARTHOLINUM *nostro rogatu adigerem, ut, quæ de Natura, Constitutione, ac Limitibus Æquationum* D. DE BEAUNE *vernaculâ suâ linguâ in lucem dare constituerat, cùm in manus ipsius incidissent, publico non invideret. Nec frustra in eo fui, nactus enim sum, ut, quæ ex ejus adversariis, non sine indefesso labore ac difficili fortuna, ad umbilicum perduxerat, Latinè redderet, nobisq;, quò unà cum his à me typis mandarentur, concederet. Cæterùm ad Artis Analyticæ præstantiam uberiùs exhibendam, & ad meum rei literariæ inserviendi studium comprobandum, non abs re fore judicavi, si Geometriam hanc non modò fœtu illo posthumo ac advenâ, sed alio etiam primogenito eoq; indigenâ adaugere satagerem; nisi fortè hunc alium quoque posthumum ac advenam dixeris, eo nomine atque intuitu, quòd parens jam totus Reipublicæ*

vivat,

vivat, nobisq; & studiis nostris civiliter mortuus, & quasi peregrinus factus sit. Etenim cum aliquot abhinc mensibus occasio mihi data fuerit, ut in eum quem de Locorum Planorum & Solidorum per Artem Analyticam inventione tractatum Nobilissimus atque Amplissimus Vir D. IOHANNES DE WITT, *Consiliarius & Pensionarius, sive minister primarius Hollandiæ West-Frisiæq;, concinnaverat, opportunus inciderim: non potui non, cum Authoris permissu inspiciendi potestas mihi facta esset, quin sententiam, quid de illo videretur, rogatus, coram lubens exponerem. Hunc itaque quia admodum sublimem, tantoq; Viro dignâ ingeniositate conscriptum, ac insuper ad penitiorem hujus Geometriæ intellectum haud parum facere posse deprehenderam, (quippe qui subtilissimam illam de Locis materiam, in secundo Geometriæ libro paulò succinctiùs pertractatam, de integro resumit, alioq; pacto componit:) consultum duxi, ut in publicum emolumentum editionis adornandæ author essem. At verò facilè prævidebam, saltem suprema, quibus fungitur, Reipublicæ munera, gravèsq; hominis curas, impedimento fore, quo minùs tam splendida proles, quæ jam ante decennium formata in conceptu huc usque delituerat, absque obstetricis auxilio, in lucem unquam produceretur. Quocirca cum eam mei juris facere non dedignatus fuerit, neque etiam copiam eorum, quæ de Elementis Curvarum Linearum jam pridem conscripsit, mihi facere recusaverit: rem ubique gratam me facturum credidi, si tam hunc quàm illum tractatum ab ulteriori oblivione vindicandi operam darem; præsertim cum id iis, qui Mathesin seriò excolunt, acceptum fore perspexerim, quòd curvarum primi generis ortum longè simpliciùs generaliusq; ab ipso quàm à veteribus, absque ulla solidi consideratione, inspectum fuisse, reperturi sint. Quas itaque curvas eâ ratione pertractavit, ut non solùm inde dimanet ortus secundi generis curvarum (quas quidem omnes simili methodo in plano delineavit ac per species distinxit,) verùm etiam ulteriorum graduum curvæ sponte quasi ex eodem fonte fluant atque deriventur. Futurum sperans, ut, si primitiæ hujus fœtus ad illas viam sternentes operâ meâ in lucem*

emitterentur, iisq́; extrema imponeretur manus, quilibet judicaturus sit, & Literatorum commodo, & hujus Viri otio in absolvendis, quæ de Super-solidis Locis adinvenit, omni nisu à me fuisse consultum ac prospectum. Denique ut Methodi hujus Geometriæ dignitas splendorq́; omni ex parte in aperto esset, & cuique etiam pateret ejusdem calculo demonstrationes quoque Geometricas inniti aut ex eo elici posse, quales à Veteribus introductæ adhuc apud Recentiores passim in usu sunt, atque longâ propositionum serie ac lemmatum permixtione afferri solent, continuæ schematum animadversioni obnoxiæ: placuit coronidis loco & in operis complementum subnectere tractatum, in quo artem, iisdem Veteribus in difficiliorum hujusmodi demonstrationum compositione usitatam, occasione diversarum quæstionum, exponerem. ut, scilicet, his similibusq́; exemplis viam praeundo, non tantùm ejusmodi demonstrationes alias ex calculo facile depromi ostenderem; verùm etiam hoc pacto inventionis modum, quem in majorem admirationem suorum inventorum artificiosè suppresserant, indicarem, atque Matheseos studiosos ad hujus Methodi calculum ceu demonstrationum amussim, omni ambage ac ingenii defatigatione evitatâ, ablegarem. Quibus quidem omnibus, si singulis satisfacere non licet, habeo saltem de quo abundè mihi gratuler, quòd nostros in hoc studiorum genere labores rerum æstimatoribus haud displicuisse nec displicere sciam. Vale. Scripsi Leidæ, anno reparatæ salutis cIↄ Iↄc lix.

IN-

INDEX MATERIARUM,

IN HAC

GEOMETRIA

CONTENTARUM.

LIBER I.

De Problematis, quæ construi possunt, adhibendo tantùm rectas lineas & circulos.

LIBER II.

De natura linearum curvarum.

Quo-

LIBER III.

De constructione Problematum Solidorum, & Solida excedentium.

RENA-

RENATI DES CARTES GEOMETRIÆ LIBER PRIMUS.

De Problematibus, quæ construi possunt, adhibendo tantùm rectas lineas & circulos.



OMNIA Geometriæ Problemata facilè ad hujusmodi terminos reduci possunt, ut deinde ad illorum constructionem, opùs tantùm sit rectarum quarundam linearum longitudinem cognoscere.

Et quemadmodum Arithmetica tota ex quatuor aut quinque solummodo operationibus constat, quæ sunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, & Radicum Extractio, (quæ pro quadam Divisionis specie haberi potest:) Ita similiter in Geometria, quod spectat ad lineas, quæ quæruntur, præparandas, ut cognitæ fiant, aliud faciendum non est, quàm ut vel ipsis addantur, vel ab iisdem subtrahantur aliæ; vel etiam si una sit, (quæ vocetur unitas, ut eò commodiùs ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu assumere licet) atque præter hanc adhuc aliæ duæ, ut ad ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad alterutram, ut est altera ad unitatem, quod idem est, atque Multiplicatio; vel ut per ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Divisione; vel denique, ut inter unitatem & aliam quandam rectam inveniantur una, aut duæ, plu-

Quomodo computatio Arithmetica referatur ad operationes Geometricas.

A

B, C

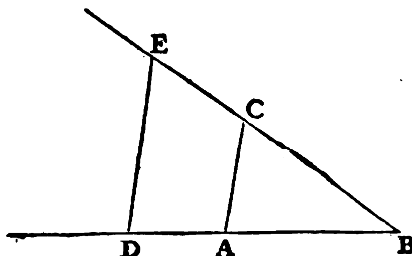
D

E

resve mediæ proportionales, quod idem est, quod radicis Quadratæ, aut Cubicæ, &c. extractio. Neque enim hosce Arithmetices terminos, ut faciliùs intelligi possim, in Geometriam introducere verebor.

Quomodo Geometricé fiat.

Multiplicatio,

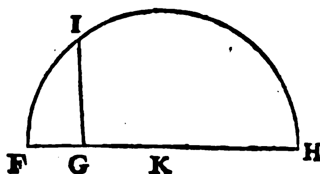


Sit, exempli gratiâ, AB unitas, oporteatque multiplicare BD per BC: jungo puncta A & C, ductâque DE parallelâ AC, erit BE productum hujus multiplicationis.

Divisio,

Vel si dividenda sit BE per BD, junctis punctis E & D, duco AC parallelam ipsi DE, eritque BC quotiens hujus Divisionis.

Extractio radicis Quadratæ.



Vel denique si ex GH extrahere oporteat radicem Quadratam, adjungo ipsi in directum lineam rectam FG, quæ unitas est; divisâque FH bifariam in puncto K, centro K intervallo FK seu KH describo circulum. quo facto, erit GI, quæ ex puncto G perpendicularis ducitur super FH usque ad I, radix quæsita.

Nihil hìc de radice Cubicâ, nec de aliis dico, quòd de iis in sequentibus commodiùs sim acturus.

Quo pacto notis uti liceat in Geometria.

At verò sæpe non est opùs, hasce lineas ita in charta ducere, sed sufficit illas litteris quibusdam designare, singulas singulis. Vt ad addendam lineam BD lineæ GH, voco unam a & alteram b, scribóque $a+b$; Et $a-b$, ad subtrahendam b ex a; Et ab, ad multipli-

tiplicandam unam per alteram; Et $\frac{a}{b}$, ad dividendam a per b; Et aa, seu a^2, ad multiplicandam a in se; Et a^3, ad eandem adhuc semel multiplicandam per a, atque ita in infinitum; Et $\sqrt{a^2 + b^2}$, ad extrahendam radicem Quadratam ex $a^2 + b^2$; Et $\sqrt{C. a^3 - b^3 + abb}$, ad extrahendam radicem Cubicam ex $a^3 - b^3 + abb$, & sic de cæteris.

Vbi notandum est, quòd per a^2 vel b^3, similésve, communiter, non nisi lineas omnino simplices concipiam, licèt illas, ut nominibus in Algebra usitatis utar, Quadrata aut Cubos, &c. appellem.

Deinde etiam notandum, quòd omnes ejusdem lineæ partes, quando unitas in quæstione non est determinata, æque-multis semper dimensionibus exprimi debeant, ut hìc a^3 tot habet dimensiones, quot abb, aut b^3, ex quibus composita est linea, quam nominavi $\sqrt{C. a^3 - b^3 + abb}$; Sed hoc non est necesse, cùm unitas determinata existit, quoniam illa ubique subintelligi potest, ubi vel nimis multæ, vel nimis paucæ dimensiones reperiuntur. Vt si radix Cubica sit extrahenda ex $aabb - b$, cogitandum est, quantitatem $aabb$ semel divisam esse per unitatem, atque alteram quantitatem b bis per eandem esse multiplicatam. F

Cæterùm ut quis facilè linearum nominum recordetur, oportet semper illa in catalogum referre, prout supponuntur vel mutantur, scribendo exempli causâ

AB ∞ 1, hoc est, AB æqualis est 1, seu unitati.

GH ∞ a

BD ∞ b, &c.

G *Quomodo ad Æquationes perveniendum*

Resoluturus igitur aliquod Problema, considerabit illud primâ fronte, ut jam factum, nominaque imponet lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius ne-

sit, quæ resolvendis Problematis inserviunt. cessariæ videbuntur, tam iis, quæ incognitæ sunt, quàm quæ cognitæ. Deinde nullo inter lineas hasce cognitas & incognitas facto discrimine, evolvenda est Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturalissimè pateat, quâ ratione dictæ lineæ à se invicem dependeant, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur; æquales enim sunt termini modi unius terminis modi alterius. Iam verò tot hujusmodi Æquationes invenire oportebit, quot suppositæ fuerunt incognitæ lineæ.

GG Vel si totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæstione desiderantur, omittatur, argumentum est, illam non penitùs esse determinatam. Tunc enim ad arbitrium assumi possunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non respondet aliqua Æquatio.

GGG Postea verò si plures adhuc supersint, ordine quoque utendum erit unaquâque Æquationum reliquarum, sive illam considerando separatim, sive ipsam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis

H lineis; atque ita, reducendo illas, efficere oportet, ut tantùm una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cujus quadratum, sive cubus, sive quadrato-quadratum, sive surde-solidum, sive quadrato-cubus, &c. æqualis sit ei, quod provenit ex additione vel subtractione duarum, pluriúmve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita sit, reliquæ autem compositæ ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, sive cubum, sive quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto designo.

$z \propto b$, aut

$z^2 \propto -az + b^2$, aut

$z^3 \propto +az^2 + b^2 z - c^3$, aut

$z^4 \propto +az^3 + b^2 z^2 - c^3 z + d^4$, &c.

Hoc

Hoc est, z, quam pro quantitate incognita sumo, est æqualis ipsi b; aut quadratum à z æquale est quadrato ex b, minus producto ex a in z; aut cubus à z æqualis est producto ex a in quadratum ipsius z, plus quadrato ex b ducto in z, minus cubo ex c. & sic de cæteris.

Possunt autem semper quantitates incognitæ ita ad unam solam reduci, atque tum Problema construi per rectas lineas & circulos, aut per sectiones Conicas, aut denique per aliam quandam lineam, quæ nonnisi uno duobúsve gradibus magis sit composita.

Sed nolo hìc prolixus esse, ut hoc magis particulatim explicem, eò quod vobis voluptatem præriperem discendi id ipsum vestro marte, & utilitatem ingenium vestrum excolendi, dum vos in eo exercetis, quæ, meo quidem judicio, præcipua est, quam ex hac scientia percipere licet. Deinde etiam, quòd nihil hìc adeò difficile deprehendam, ut ab illis, qui utcunque in Geometria communi atque Algebra versati sunt, & observaturi porrò sunt, quæ tractatu hoc continentur, inveniri non possit.

Atque ideo sufficiet, Vos monere, si quis in reducendis hisce Æquationibus non omiserit uti divisionibus omnibus quæ fieri possunt, ipsum quoque infallibiliter habiturum simplicissimos terminos, ad quos quæstio reduci possit. I

Quanam sint Problemata Plana.

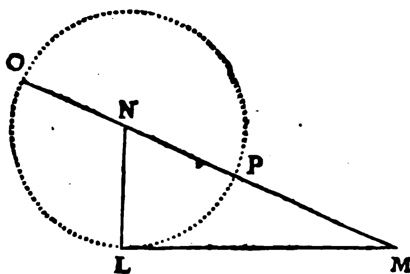
Iam verò si illa per Geometriam communem resolvi potest, hoc est, utendo tantùm rectis lineis & circularibus, in plana aliqua superficie descriptis, postquam ultima Æquatio omnino fuerit reducta, relinquetur nil præter quadratum aliquod incognitum, æquale ei, quod provenit ex additione vel subtractione ejus radicis, multiplicatæ per quantitatem ali-

quam cognitam, & alterius cujusdam quantitatis cognitæ.

Quomodo ipsa resolvantur.

Tuncque radix illa, sive incognita linea, facilè invenitur. Nam si, exempli gratiâ, habeatur

$$zz \infty az + bb,$$



facio triangulum rectangulum N L M, cujus unum latus L M sit æquale b, radici videlicet quadratæ quantitatis cognitæ bb; alterum autem latus L N æquale $\frac{1}{2}a$, semissi nimirum reliquæ quantitatis cognitæ, quæ multiplicata est per z, quam suppono lineam esse incognitam. Deinde productâ M N, base ejusdem trianguli, usque ad O, ita ut N O sit æqualis N L: erit tota O M æqualis z, lineæ quæsitæ. Quæ
K
quidem sic exprimitur

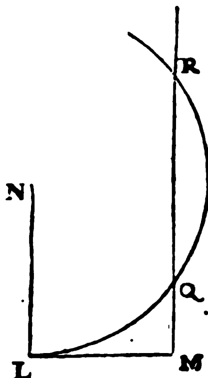
$$z \infty \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

Quòd si verò habeatur $yy \infty - ay + bb$, atque y sit quantitas, quam invenire oportet, facio rursus idem triangulum N L M, & à base ejus M N aufero N P, æ-
L
qualem N L, eritque reliqua P M, æqualis y, radici quæ-
M
sitæ. Ita ut fiat $y \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Nec aliter fit, si proponatur $x^4 \infty - ax^2 + b^2$. P M enim esset x^2, & haberetur $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: atque ita de aliis.

Deni-

Denique si habeatur

$$zz \propto az - bb:$$



facio NL æqualem $\frac{1}{2}a$, & LM æqualem b, ut ante. Deinde non ducò lineam per puncta M & N, ut in duobus aliis casibus, sed duco MQR parallelam ipsi LN; centroque N descripto per L circulo, secante MQR in punctis Q & R, erit MQ vel MR æqualis lineæ quæsitæ z. Hoc enim casu illa duobus modis exprimitur, nimirum $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel etiam $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Quòd si circulus centrum suum habens in puncto N, transiensque per punctum L, non secet nec tangat lineam rectam MQR, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde asserere liceat constructionem Problematis propositi esse impossibilem.

Cæterùm possunt hæ ipsæ radices infinitis fermè aliis modis inveniri; sed prædictos tantùm in medium afferre volui, velut admodum simplices, ut hâc ratione pateat: Problemata omnia Geometriæ communis construi posse, faciendo tantùm ea pauca, quæ quatuor præcedentibus figuris exposui. Quod quidem non credo à Veteribus fuisse animadversum, cum aliàs laborem eâ de re tantos libros conscribendi non suscepissent, in quibus vel solus ordo propositionum satis nobis ostendit, quòd ipsis non constiterit vera ratio inveniendi omnes, sed quòd solummodo collegerint illas, in quas fortè inciderunt.

Quod etiam ex iis, quæ Pappus initio sui septimi libri scribit, evidentissimè liquet. Vbi postquam aliquamdiu *Quæstio desumpta ex Pappo.*

diu in recenſendis illis omnibus, quæ ab anteceſſoribus ſuis in Geometria ſcripta ſunt, occupatus fuit, tandem de quæſtione quadam loquitur, quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quiſquam alius penitùs reſolvere potuerat, his verbis:

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non eſſe, neque ipſe perficere poterat, neque aliquis alius: ſed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides ſcripſit, per ea tantùm Conica, quæ uſque ad Euclidis tempora præmonſtrata ſunt, &c.

Paulò autem poſt explicat, quæſtionem illam eſſe hanc ſequentem.

At locus ad tres & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnificè ſe jactat, & oſtentat, nullâ habitâ gratiâ ei, qui priùs ſcripſerat, eſt hujuſmodi. Si poſitione datis tribus rectis lineis ab uno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data ſit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ: punctum contingit poſitione datum ſolidum locum, hoc eſt, unam ex tribus conicis ſectionibus. Et ſi ad quatuor rectas lineas poſitione datas in datis angulis lineæ ducantur; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data ſit: ſimiliter punctum datam coni ſectionem poſitione continget. Si quidem igitur ad duas tantùm, locus planus oſtenſus eſt. Quòd ſi ad plures quàm quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, ſed lineas tantùm dictas; quales autem ſint, vel quam habeant proprietatem, non conſtat: earum unam, neque primam, & quæ manifeſtiſſima videtur, compoſuerunt, oſtendentes utilem eſſe. propoſitiones autem ipſarum hæ ſunt.

Si ab aliquo puncto, ad poſitione datas rectas lineas, quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data ſit proportio ſolidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur, ad ſolidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur

tur

tur reliquis duabus, & datâ quâpiam lineâ, punctum positione datam lineam continget. Si autem ad sex, & data sit proportio solidi tribus lineis contenti ad solidum, quod tribus reliquis continetur; rursus punctum continget positione datam lineam. Quòd si ad plures quàm sex, non adhuc habent dicere, an data sit proportio cujuspiam contenti quatuor lineis, ad id, quod reliquis continetur: quoniam non est aliquid contentum pluribus quàm tribus dimensionibus.

Vbi velim ut ex occasione notetis, Veteres Mathematicos, ex eo, quòd vocabulis in Arithmetica usitatis, ad operationes Geometricas significandas, liberè uti noluerint, sæpe in modos eas explicandi valde intricatos & obscuros incidisse, cujus rei non alia potuit causa esse, quàm quòd non satis accuratè perceperint, quænam sit inter illas duas scientias affinitas. Pergit enim Pappus hoc modo.

Acquiescunt autem his, qui paulò ante talia interpretati sunt, neque unum aliquo pacto comprehensibile significantes, quod his continetur. Licebit autem per conjunctas proportiones hæc, & dicere, & demonstrare universè in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data sit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad datam lineam, si sint septem; si verò octo, & reliqua ad reliquam: punctum continget positione datas lineas. Et similiter quotcunque sint impares vel pares multitudine, cum hæc, ut dixi, loco ad quatuor lineas respondeant, nullum igitur posuerunt, ita ut linea nota sit &c.

Quæstio itaque quam Euclides resolvere inceperat atque Apollonius continuaverat, sed quæ à nemine fuit perfecta, erat hujusmodi.

Datis positione tribus, quatuórve, aut pluribus rectis

lineis; quæritur primò punctum, à quo totidem aliæ rectæ lineæ, singulæ ad singulas datarum duci possint, quæ cum ipsis datos efficiant angulos, & quarum rectangulum, sub duabus contentum, datam habeat rationem ad quadratum tertiæ, si sint tres; vel ad rectangulum reliquarum duarum, si sint quatuor; Aut si quinque sint, ut parallelepipedum, quod sub tribus ex illis comprehenditur, datam habeat rationem ad parallelepipedum, quod sub duabus reliquis comprehenditur & alia quadam data; Aut si sex sint, ut parallelepipedum sub tribus contentum datam habeat rationem ad parallelepipedum sub tribus reliquis comprehensum; Aut si sint septem, ut hoc, quod producitur ex multiplicatione quatuor ductarum in se invicem, datam habeat rationem ad illud, quod ex mutua multiplicatione reliquarum trium & alia quadam data producitur; Aut si sint octo, ut id, quod ex quatuor ductis inter se multiplicatis producitur, datam habeat rationem ad productum ex reliquis quatuor. Atque ita porrò quæstionem hanc, ad omnem alium linearum numerum, extendere licet.

Deinde, quia semper infinita sunt puncta, quæ satisfacere possunt iis, quæ hìc quæruntur, requiritur insuper, ut cognoscatur atque describatur linea, in quâ illa omnia reperiantur.

Dicit autem Pappus, si tantùm 3 aut 4 lineæ dentur, lineam illam tunc aliquam ex sectionibus Conicis existere. Verùm non suscipit ipsam determinare neque describere, non magis quàm explicare lineas illas, in quibus quæsita puncta inveniri debent, quando quæstio proposita est in pluribus lineis. Tantùm addit, quòd Veteres unam ex illis sibi imaginati fuerint, quam ibidem utilem esse monstrarunt, sed quæ manifestissima videretur, nec tamen prima existeret. Quod occasionem mihi præ-

hi præ-

hi præbuit tentandi, num illâ, quâ utor, methodo, æquè longè, quàm illi pervenerunt, progredi liceret.

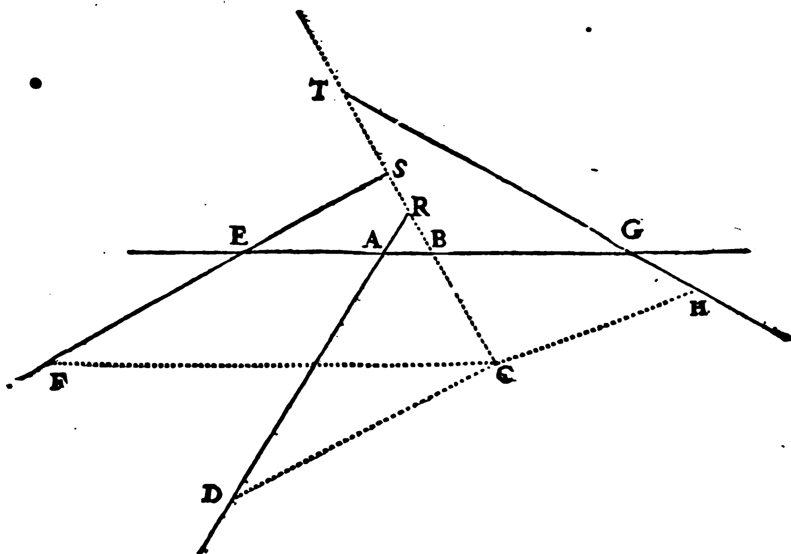
Primò autem inveni, quòd, dum hæc quæstio in tribus, quatuórve, aut quinque duntaxat lineis proponitur, puncta quæsita per simplicem semper Geometriam inveniri queant; hoc est, ut non nisi regulâ atque circino utamur; nec aliud quidquam, quàm quod jam traditum est, faciamus. Præterquam si quinque lineæ dantur, quæ omnes inter se parallelæ fuerint. Quo casu, ut & quum quæstio in 6, 7, 8, aut 9 lineis proponitur, quæsita puncta per Solidorum Geometriam inveniri possunt; hoc est, adhibendo, ad constructionem, aliquam ex tribus Conicis sectionibus. Excepto tantùm, si novem lineæ datæ fuerint, quæ omnes inter se parallelæ existant. Quo casu, ut & quum quæstio in 10, 11, 12, aut 13 lineis proposita est, quæsita puncta per curvam lineam, quæ uno tantùm gradu magis composita est, quàm sectiones Conicæ, inveniri possunt. Excepto in 13, quæ omnes inter se sint parallelæ. quo casu, ut & in 14, 15, 16, & 17 lineis, linea curva adhiberi debet, quæ uno gradu supra præcedentem composita est. Atque ita in infinitum.

Responsum ad Quæstionem Pappi.

Deinde inveni quoque, si tantùm tres aut quatuor lineæ datæ fuerint, quæsita puncta, non modò in aliqua trium Conicarum sectionum, sed interdum etiam in circuli circumferentia, aut in recta linea reperiri. Et si 5, 6, 7, aut 8 lineæ datæ fuerint, tum puncta illa incidere in aliquam ex lineis, uno gradu magis compositis, quàm sectiones Conicæ. Quarum quidem nullam, quæ ad hanc quæstionem non sit utilis, imaginari licet. Sed possunt rursus illa etiam in sectione Conica, aut in Circulo, aut linea recta reperiri. Similiter si 9, 10, 11, aut 12 lineæ datæ fuerint, reperientur hæc puncta in aliqua linea, quæ non nisi uno gradu supra præcedentes poterit esse

composita: quemadmodum etiam nullam earum imaginari licet, quæ ibidem utilis esse non possit. Atque ita porrò in infinitum.

Denique prima & post Conicas sectiones simplicissima, ea est, quæ per Parabolæ & rectæ lineæ intersectionem describi potest, quemadmodum pòst explicabitur. Adeò ut existimem, me prorsus satisfecisse iis, quæ Pappus nobis commemorat hìc à Veteribus fuisse quæsita. quorum quidem demonstrationem paucis subjicere conabor. Quippe me tædet jam multa hac de re scripsisse.



Sint A B, A D, E F, G H, &c. lineæ quotcunque positione datæ, oporteátque invenire punctum, ut C, à quo si ducantur totidem aliæ ad positione datas, ut C B, C D, C F, & C H, in datis angulis C B A, C D A, C F E, C H G, &c. ut hoc, quod producitur ex multiplicatione certarum quarundam harum linearum, sit

æquale

æquale illi, quod producitur ex multiplicatione reliquarum; vel etiam ut unum ad alterum datam habeat rationem. id enim quæstionem difficiliorem non reddit.

Primò itaque rem ut jam factam suppono, atque ut ex harum omnium linearum confusione me expediam, considero unam ex datis, atque unam ex quæsitis, exempli gratiâ, A B & C B, velut præcipuas, & ad quas reliquas omnes referre conor. Ponendo nimirum segmentum lineæ A B, quod intra puncta A & B continetur, vocari x. B C autem vocari y. aliásque lineas datas omnes productas esse, donec secent hasce duas, etiam productas, si opus fuerit, & ipsis non sint parallelæ. quemadmodum hìc apparet illas secare, lineam quidem A B in punctis A, E, & G; B C verò in punctis R, S, & T. Deinde quia omnes anguli trianguli A R B dati sunt, data quoque erit ratio, quæ est inter ejus latera A B & B R, quam pono ut z ad b, ita ut, cum A B sit x, R B futura sit $\frac{bx}{z}$, C R autem $y + \frac{bx}{z}$: siquidem punctum B cadit inter puncta C & R; nam si R caderet inter C & B, C R esset $y - \frac{bx}{z}$; sin verò C caderet inter B & R, C R foret $-y + \frac{bx}{z}$. Similiter, dantur quoque tres anguli trianguli D R C, unde & ratio, quæ est inter latera C R & C D, quam pono ut z ad c: ita ut, cum C R sit $y + \frac{bx}{z}$, C D futura sit $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$. Postea, quia lineæ A B, A D, & E F positione datæ sunt, data quoque erit distantia puncti A à puncto E: quæ si nominetur k, habebitur E B æqualis $k + x$; foret autem ipsa $k - x$, si punctum B caderet inter E & A; at verò $-k + x$, si E caderet inter A & B. Rursus, quoniam anguli trianguli E S B omnes dantur, dabitur quoque ratio lateris B E ad B S: quam si ponam esse ut z ad d, B S fiet

Quomodo ponendi sint termini in hac Quæstione, ut ad Æquationem deveniatur.

fiet $\frac{dk+dx}{z}$, CS verò $\frac{zy+dk+dx}{z}$; quæ quidem foret $\frac{zy-dk-dx}{z}$, si punctum S caderet inter B & C; at verò $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, si C caderet inter B & S. Porrò dantur tres anguli trianguli FSC, & consequenter ratio ipsius CS ad CF, quæ sit ut z ad e, unde tota CF erit $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$. Eodem modo, data est AG, quam voco l, unde BG erit $l-x$, & quia in triangulo BGT ratio ipsius BG ad BT data est, quæ sit ut z ad f, erit BT $\infty \frac{fl-fx}{z}$, & CT $\infty \frac{zy+fl-fx}{z}$. Rursus, propter triangulum TCH, data est ratio ipsius CT ad CH: quã si ponamus ut z ad g, habebitur CH $\infty \frac{+gzy+fgl-fgx}{zz}$.

Atque ita videre est, quòd, positione datis quotcunque lineis, ex puncto C semper totidem aliæ ad illas duci possint in datis angulis, (juxta quæstionis tenorem;) quæ singulæ exprimantur ad summum per tres terminos; quorum quidem unus compositus sit ex quantitate incognitâ y, multiplicatâ aut divisâ per aliam quandam cognitam; secundus verò ex incognitâ quantitate x, etiam multiplicatâ aut divisâ per aliam quandam cognitam; ac tertius denique ex quantitate aliquâ omnino cognitâ. Excepto tantùm, si datæ lineæ sint omnes parallelæ, vel lineæ AB, (quo casu terminus ex quantitate x compositus evanescet;) vel etiam lineæ CB, (quo casu terminus ex quantitate y compositus evanescet;) quemadmodum id plus satis per se manifestum est, nec prolixiori explicatione eget. Quod autem spectat ad signa + & —, quibus hi termini conjunguntur, ipsa quidem variari possunt modis omnibus, quos imaginari licet.

Deinde videre etiam licet, quòd multiplicando ita

hasce

hasce lineas in se invicem, quantitates x & y, quæ in producto reperiuntur; singulæ non plures dimensiones habere possint, quàm extiterint lineæ, (quarum explicationi inserviunt,) quæ ita sunt multiplicatæ. Adeò ut nunquam plures duabus habituræ sint dimensiones, ubi productum illud ex duarum tantùm linearum multiplicatione nascitur; nec plures tribus, cùm productum illud ex trium tantùm linearum multiplicatione genitum fuerit, & sic in infinitum.

Cæterùm quia ad determinandum punctum C una duntaxat conditio adimplenda est, nimirum ut hoc quod ex multiplicatione certi numeri harum linearum producitur sit æquale, vel (quod nihilo difficilius) datam habeat rationem ad illud quod provenit ex reliquarum multiplicatione: possumus ad libitum assumere alterutram quantitatem incognitam x vel y, atque alteram invenire per hanc Æquationem. Vbi liquet, si quæstio in quinque tantùm lineis proposita fuerit, quantitatem x, quæ quidem expressioni primæ lineæ non inservit, posse semper non plures quàm duas dimensiones recipere. *Quo pacto cognoscatur, Problema hoc esse planum, quando illud in quinque tantùm lineis est propositum.* Ita ut, si pro y sumatur quantitas aliqua cognita, relinquatur tantùm $xx \propto +$ vel $- ax +$ vel $- bb$. Et tum quidem quantitatem x invenire poterimus regulæ atque circini beneficio, quemadmodum superiùs explicatum fuit. Adeoque si in infinitum alia atque alia magnitudo sumatur pro linea y, invenietur quoque in infinitum alia atque alia pro linea x, atque ita obtinebitur infinitus numerus punctorum, cujusmodi est punctum C, quorum ope quæsita curva linea describetur.

Fieri etiam potest, quum quæstio in sex aut pluribus lineis proponitur, si inter datas fuerint, quæ ipsi A B vel B C parallelæ existant, ut una duarum quantitatum, x, y, duas tantùm aut etiam unam in Æquatione dimensio-

nes

nes habeat, adeò ut punctum C regulæ ac circini beneficio inveniri possit. Sed contra, si omnes sint parallelæ, etiamsi quæstio in quinque tantùm lineis proposita fuerit; non poterit tamen punctum C dictâ ratione inveniri: quia, dum quantitas *x* nusquam in Æquatione reperitur, permissum non erit ampliùs pro illa, quæ *y* vocata fuit, quantitatem cognitam assumere, cum hæc ea ipsa futura sit, quam quærere oportet. Et quandoquidem illa tres dimensiones habebit, non poterit ipsa nisi radicem ex Cubica Æquatione eliciendo inveniri. Quod quidem in genere, nisi ad id aliqua ad minimum Conica sectio adhibeatur, fieri nequit. Rursus, licèt lineæ ad novem usque datæ sint, dummodo non sint omnes parallelæ, semper fieri potest, ut Æquatio non altiùs quàm ad quadrato-quadratum ascendat. quare ipsa per Conicas sectiones resolvi quoque semper poterit, eo modo, quem postea sum explicaturus. Ac denique, licèt habeantur usque ad 13 lineas, efficere semper possumus, ut Æquatio quadrato-cubum non excedat. Ita ut illam deinde resolvere queamus beneficio lineæ, quæ uno duntaxat gradu supra sectiones Conicas est composita, quemadmodum etiam post explicabitur. Atque hoc primum est, quod hìc eram demonstraturus; sed antequam ad secundum progrediar, opùs est ut in genere aliquid de curvarum linearum natura dicam.

GEO-

GEOMETRIÆ

LIBER SECUNDUS.

De natura linearum curvarum.

Quænam sint curvæ lineæ, quæ in Geometriam recipi possunt.

VEteres optimè considerârunt, quòd Geometriæ Problematum alia sint Plana; alia Solida; alia denique Linearia; hoc est, quòd quædam eorum construi possint, ducendo tantùm rectas lineas & circulos; cum alia construi nequeant, nisi ad minimum adhibeatur Conica aliqua sectio; ac reliqua denique, quin ad constructionem eorum assumatur alia quædam linea magis composita.

Verùm satis mirari non possum, quòd non ulteriùs progressi lineas hasce magis compositas in certos distinxerint gradus; neque etiam planè capio, cur illas potiùs Mechanicas, quàm Geometricas nominaverint. Etenim, si dicatur, ideo id fuisse factum, quòd instrumento quodam, ad illas in plano describendas, uti opùs sit, circuli quoque & rectæ lineæ ob eandem rationem rejiciendæ essent: cum absque circino & regula, quæ non minùs instrumenta dicenda sunt, in charta describi non possint. Neque etiam ideo, quòd instrumenta, quæ describendis illis inserviunt, utpote magis composita quàm regula & circinus, nequeant esse tam exacta: quandoquidem ob hanc rationem potiùs repudiandæ forent ex Mechanica, ubi tantùm accurata operis convenientia, quæ à manu proficiscitur, desideratur, quàm ex Geometria, ubi solùm spectatur exacta ratiocinatio. quippe quæ proculdubio, tam hasce lineas quàm illas concernens, æquè perfecta esse potest. Neque tandem

ea de caussa, quòd numerum postulatorum suorum augere noluerint; quódque contenti fuerint, modò liceret, data duo puncta rectâ conjungere lineâ, atque ex dato centro circulum describere, transeuntem per datum punctum: cum ulteriùs, ut de Conicis sectionibus tractarent, supponere veriti non fuerint, datum Conum dato plano secare. Vbi sanè ad describendum lineas omnes curvas, quas hìc introducere instituo, nihil aliud supponere est opùs: quàm ut duarum pluriúmve linearum una per alteram moveri possit, ita ut illarum intersectiones alias designent; siquidem id nihilo difficilius mihi videtur. Verum equidem est, quòd sectiones Conicas non omnino in Geometriam suam receperint; neque etiam nomina, quæ usu approbata sunt, immutare volo; veruntamen evidens admodum est, ut mea fert opinio, quòd, si Geometricum censeamus illud, (ut fieri solet) quod omnino perfectum atque exactum est, & Mechanicum quod ejusmodi non existit; atque Geometriam consideremus ut scientiam, quæ generaliter mensuras omnium corporum cognoscere docet, non magis ex ea excludendæ erunt lineæ maximè compositæ, quàm omnium simplicissimæ: siquidem illas, per motum aliquem continuum, aut per plures, qui se mutuò consequantur, quorumque posteriores à prioribus regantur, imaginari possumus. Hâc enim ratione exactam semper illarum mensuræ cognitionem habere licet. Verùm enimverò fieri potest, ut scrupulus, quem sibi Veteres Geometræ in recipiendis lineis, magis quàm sectiones Conicæ compositis, injecerunt, fuerit, quòd primæ, quas considerarunt, fortè extiterint Spiralis, Quadratrix, atque similes; quæ reverâ non nisi ad Mechanicas pertinent, nec ex illarum numero sunt, quas hìc recipiendas autumo: quandoquidem illas duobus

bus motibus describi imaginamur, qui à se invicem sunt diversi, nec ullam inter se relationem habent, quæ exactè mensurari possit. Nam licèt postea examinaverint quoque Conchoïdem, Cissoïdem, & alias quasdam; tamen, quia fortè illarum proprietates non satis perspectas habuerunt, neque etiam majorem earum quàm præcedentium rationem habuêre. Vel etiam videntes, quòd nondum nisi pauca, quæ ad Conicas sectiones pertinerent, cognoscerent, & quòd multa illorum, quæ regulæ ac circini ope perfici possunt, quæ ignorarent, superessent, crediderunt, non oportere, ut materiam aliquam difficiliorem aggrederentur. Sed quoniam spero, quòd, qui in utendo calculo Geometrico, hìc proposito, exercitati erunt, non facilè quid in posterum reperturi sint, in quo hæreant, quod ad Plana, & Solida Problemata attinet: confido, non è re fore, si illos ad alia investiganda, ubi ipsis nunquam materia se exercendi defutura sit, invitem.

Sunto lineæ AB, AD, AF, & similes, quas suppono descriptas esse ope instrumenti XYZ, quod compositum est ex pluribus regulis, ita junctis, ut, cùm illa, quæ designatur per YZ, super lineam AN immota manet, angulus XYZ aperiri claudiq́ue possit; &, illo omnino clauso existente, puncta B, C, D, E, F, G, H omnia in punctum A cadant; Sed prout aperitur; ut regula BC, quæ ipsi XY in puncto B normaliter adfixa est, propellat versùs Z regulam CD, quæ super YZ incedit, faciens continuò cum illa angulos rectos; & rursus, ut CD propellat DE, quæ similiter super YX incedit, parallela manens ipsi BC; deinde ut DE propellat EF; EF verò ipsam FG; hæcq́ue denuo ipsam GH. Atque ita in infinitum, concipiendo semper alias atque alias, quarum successivè una

alteram eodem modo propellit, & quarum aliæ eosdem perpetuò angulos faciunt cum Y X, atque aliæ cum Y Z.

Iam verò dum sic aperitur angulus X Y Z, punctum B describit lineam A B, quæ circulus est; puncta autem D, F, H, ubi cæterarum regularum intersectiones fiunt, describunt alias curvas A D, A F, A H, quarum posteriores ordine magis compositæ sunt quàm prima, hæcque magis quam circulus. Verùm non video quid impedire possit, quò minùs accuratè atque distinctè hujus primæ descriptionem concipiamus quàm circuli, aut Conicarum saltem sectionum; neque etiam quid impedire queat, cur non secundam, tertiam, cæteràsque omnes, quæ sic describi possunt, æquè bene concipiamus atque primam; nec per consequens cur non omnes recipiantur, ut Geometriæ contemplationibus inserviant.

Ratio distinguendi eas in certa

Possem huc adferre plures alios modos describendi atque concipiendi lineas curvas, quæ magis magisque grada-

gradatim in infinitum essent compositæ; verùm ut has omnes, quæ in rerum natura sunt, simul comprehendam, easque in certa genera ordine distinguam: aptiùs quidquam afferre nescio, quàm ut dicam, quòd puncta omnia illarum, quæ Geometricæ appellari possunt, hoc est, quæ sub mensuram aliquam certam & exactam cadunt, necessariò ad puncta omnia lineæ rectæ, certam quandam relationem habeant, quæ per æquationem aliquam, omnia puncta respicientem, exprimi possit. Et quòd, cùm æquatio hæc non ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum, aut non ultra quadratum unius ex illis ascendit, linea curva tunc primi & simplicissimi sit generis; (sub quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensæ:) sed quòd, postquam æquatio ad tertiam aut quartam dimensionem duarum, aut unius è duabus quantitatibus indeterminatis ascendit, (siquidem hìc duæ ad relationem unius ad alterum punctum explicandam requiruntur) linea illa tunc secundi sit generis; & quòd, prout æquatio ad quintam aut sextam dimensionem ascendit, illa tunc sit tertii generis; & sic in infinitum de aliis.

genera; Et cognoscendi relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum.

Vt si scire cupiam cujus generis sit linea E C, quam suppono descriptam esse per intersectionem regulæ G L & plani rectilinei C N K L; cujus latus K N indefinitè productum est versùs C; quodque, dum movetur supra planum deorsum in recta linea, (hoc est, ut diameter ejus K L perpetuò adplicata reperiatur alicubi lineæ B A, utrinque indefinitè continuatæ,) facit, ut regula G L rotetur circa punctum G, quoniam ipsi continuò sic admovetur, ut simul quoque semper transeat per punctum L: eligo rectam aliquam lineam, veluti A B, ut ad diversa ejus puncta referam omnia puncta

hujus curvæ lineæ CE: deinde eligo etiam punctum aliquod in AB, veluti A, ad ordiendum ab eo calculum. Dico autem, me utrumque eligere, quoniam liberum est, illa assumere, prout volumus. Nam licèt plurimi referat, quo pacto illa eligam, ut æquatio possit reddi brevior & facilior; tamen, quocunque tandem modo sumantur, fieri potest, ut linea ejusdem generis esse appareat. Quemadmodum facilè demonstrari potest.

Iam verò ad libitum sumens aliquod punctum in curva, ut C, super quod suppono instrumentum, quod descriptioni ejus inservit, esse adplicatum, duco ex C lineam CB parallelam ipsi GA. Deinde quia CB & BA duæ sunt quantitates indeterminatæ & incognitæ, voco unam y, & alteram x. Porrò ut inveniam relationem unius ad alteram, considero etiam quantitates cognitas, quæ hujus curvæ lineæ descriptionem determinant, ut GA, quam voco a; KL, quam voco b; & NL pa-

NL parallelam ipsi GA, quam voco c. Tum dico, ut NL est ad LK, vel c ad b, ita CB, vel y, est ad BK, quæ ideo erit $\frac{by}{c}$: ac proinde BL $\frac{by}{c} - b$, & AL $x + \frac{by}{c} - b$. Denique ut CB est ad BL, vel y ad $\frac{by}{c} - b$, ita est GA, vel a, ad LA, vel $x + \frac{by}{c} - b$. adeò ut, si multiplicem secundam lineam per tertiam, producatur $\frac{aby}{c} - ab$, quod æquale erit $xy + \frac{by^2}{c} - by$, ei scilicet, quod producitur multiplicando primam lineam per ultimam. Atque ita æquatio, quæ invenienda erat, est hujusmodi, $y^2 \infty cy - \frac{cxy}{b} + ay - ac$. Ex qua cognoscitur, lineam EC esse primi generis, quemadmodum illa re ipsâ nulla alia est quàm Hyperbola. A

Quod si in instrumento, quod ipsi describendæ inservit, loco rectæ lineæ CNK sumatur inventa hæc Hyperbola, aut alia quæpiam primi generis curva linea, quæ planum terminet CNKL; intersectio hujus lineæ & regulæ GL, loco Hyperbolæ EC, aliam curvam describet, quæ secundi erit generis. Vt si CNK fuerit Circulus, cujus centrum L, describetur prima Conchoïdes Veterum; & si Parabola fuerit, cujus diameter KB, describetur curva linea, quam paulò ante dixi primam esse ac simplicissimam pro quæstione Pappi, cùm quinque tantùm lineæ positione datæ sunt. Sed si loco alicujus harum linearum primi generis sumatur quædam secundi, quæ terminet planum CNKL, describetur ejus ope alia tertii generis; aut si quædam tertii generis sumatur, describetur aliqua quarti, & sic in infinitum. Vt facilè ex calculo est cognoscere. Et sanè quocunque tandem modo curvæ alicujus lineæ descriptionem quis imaginatus fuerit, modò ipsa ex illarum numero, quas Geometricas voco, extiterit, poterit sem-

Vide Pappum ad prop. 22. lib. 4; & Eutocium in commentariis in secund. librum Archimedis de sphæra & cylindro.

rit ſemper inveniri æquatio, quâ omnia ejus puncta hâc ratione determinentur.

Cæterùm lineas curvas, quæ faciunt ut æquatio hæc ad Quadrato-quadratum adſcendat, ejuſdem generis eſſe pono cum illis, quæ ipſam tantùm ad Cubum perducunt. Atque illas, quarum æquatio ad Quadrato-cubum adſcendit, ejuſdem generis cum illis, quæ ipſam tantùm ad Surdeſolidum perducunt. Et ſic de cæteris.

Cujus rei ratio eſt, quòd generalis regula habeatur reducendi ad Cubum difficultates omnes, quæ aſcendunt ad Quadrato-quadratum; & ad Surdeſolidum omnes illas, quæ aſcendunt ad Quadrato-cubum, ita ut magis compoſitæ cenſeri non debeant.

Notandum autem eſt, quòd inter lineas cujuſque generis, licèt major pars æqualiter ſit compoſita, ita ut ad eorundem punctorum determinationem ſervire poſſint, atque ad eadem Problemata conſtruenda; tamen quædam illarum ſint, quæ ſimpliciores exiſtant, quæque non tantam in ſua potentia extenſionem habeant. Vt, inter lineas primi generis, præter Ellipſin, Hyperbolam, & Parabolam, quæ æqualiter ſunt compoſitæ, etiam Circulus eſt comprehenſus, qui manifeſtò ſimplicior eſt. Et inter illas ſecundi generis, numeratur quoque Conchoïdes vulgaris, quæ ſuam originem ex Circulo ducit; quemadmodum & aliæ præterea reperiuntur, quæ, etiamſi non tantam extenſionem habeant, quantam maxima illarum pars, quæ ejuſdem generis ſunt, tamen inter lineas primi generis poni non poſſunt.

Continuatio explicationis quæſtionis, quæ præcedenti libro ex Pappo fuit allata.

Reductis igitur curvis lineis ad certa genera, facilè erit progredi in demonſtratione reſponſi, quod paulò ante dedi ad quæſtionem Pappi. Primùm enim, cum ſupra oſtenderim, quòd, quando tantùm 3 aut 4 lineæ rectæ dantur, æquatio, quæ ad quæſita puncta determinanda

nanda inservit, non ultra quadratum ascendat: evidens est, lineam curvam, in qua hæc puncta reperiuntur, necessariò aliquam esse primi generis: quandoquidem hæc æquatio relationem, quam omnia linearum primi generis puncta habent ad puncta lineæ rectæ, explicat. Et quòd, cùm non plures quàm 8 lineæ rectæ datæ sunt, æquatio hæc tum ad summum non ultra Quadrato-quadratum ascendat, ac per consequens quæsita linea non nisi secundi aut inferioris generis esse possit. Et quòd, cùm non plures quàm 12 lineæ rectæ datæ sunt, æquatio tum non ultra Quadrato-cubum ascendat, ac per consequens, quæsita linea solummodo tertii aut inferioris generis existat. Atque ita de reliquis. Quin etiam, quoniam datarum rectarum positio omnifariam variari potest, & per consequens mutare tam quantitates cognitas, quàm signa + & — ipsius æquationis, modis omnibus, quos sibi quis imaginari queat: evidens est, nullam primi generis curvam lineam reperiri, quæ ad hanc quæstionem non sit utilis, quando illa in 4 lineis est proposita; neque ullam secundi, quæ ibidem *non inserviat*, quando illa in 8 lineis est proposita; neque etiam ullam tertii, quando illa in 12 lineis est proposita. Et sic de reliquis.

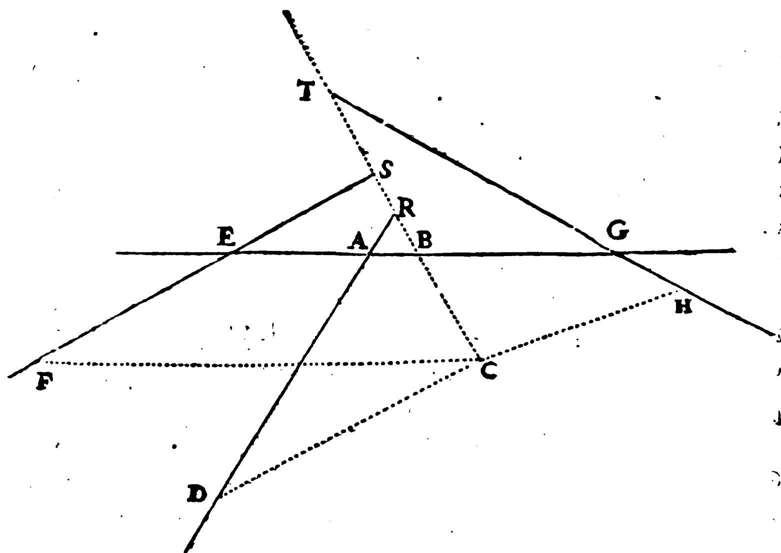
Adeò ut nulla curva linea, quæ sub calculum cadit, atque in Geometriam recipi potest, reperiatur, quæ ibidem ad aliquem linearum numerum non sit utilis.

Sed oportet ut de his specialiùs agam, atque rationem inveniendi lineam quæsitam, cuilibet casui inservientem, exhibeam, quando tantùm 3 aut 4 lineæ datæ sunt; atque eâdem operâ videbitur, quòd primum linearum curvarum genus alias nullas, præter tres Sectiones Conicas & Circulum, complectatur. *Solutio hujus quæstionis, cùm ipsa in 3 aut 4 tantùm lineis est proposita.*

Repetamus itaque quatuor lineas AB, AD, EF, &

GH, superiùs datas, oporteátque aliam invenire lineam, in quâ infinita reperiantur puncta, quale est C, unde si ducantur quatuor lineæ CB, CD, CF, & CH, in datis angulis ad positione datas: ut CB multiplicata per CF tantundem producat ac CD multiplicata per CH. hoc est, positâ CB $\infty\, y$, CD $\infty\, \frac{czy+bcx}{zz}$, CF ∞ $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$, & CH $\infty\, \frac{gzy+fgl-fgx}{zz}$: æquatio erit

$$yy \infty \frac{\left.\begin{matrix}-dekzz\\+cfglz\end{matrix}\right\}y\;\left.\begin{matrix}-dezzx\\-cfgzx\\+bcgzx\end{matrix}\right\}y\;\begin{matrix}+bcfglx\\-bcfgxx\end{matrix}}{ez^3-cgzz}$$



B Saltem si supponamus quantitatem ez majorem quàm cg. nam si minor foret, mutanda essent omnia signa +
BB & —. Vnde si in hac æquatione quantitas y nulla sit, aut minor quàm nihil, postquam punctum C supposuimus in angulo DAG, oporteret & illud supponere in angulo DAE,

DAE, aut EAR, aut etiam RAG, mutando signa + & —, prout ad effectum hunc requireretur. Quòd si verò in quatuor hisce positionibus valor ipsius y nullus reperiretur, indicio esset, quæstionem casu propositо esse impossibilem. Sed supponamus illam hìc possibilem esse, & ad abbreviandum ejus terminos, loco quantitatum $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$ scribamus $2m$, & loco $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$ scribamus $\frac{2n}{z}$; sicque habebimus

$$yy \propto 2my - \frac{2n}{z}xy \frac{+bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz},$$

cujus æquationis radix est

$$y \propto m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}$$

Rursus autem abbreviandi causâ, pro $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}$ scribamus o, & pro $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ scribamus $\frac{p}{m}$. Cum enim quantitates hæ omnes datæ sint, illas, ut placuerit, nominare possumus. Atque ita habebimus

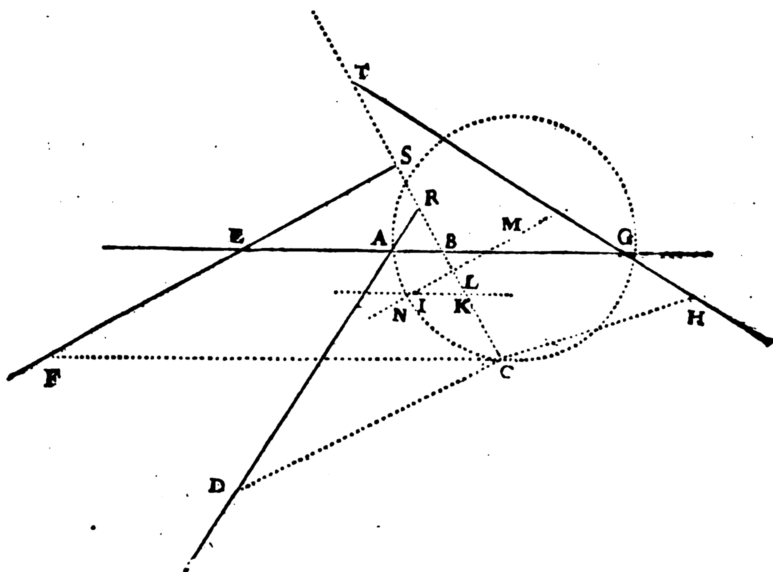
$$y \propto m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}.$$

quæ longitudo esse debet lineæ BC, relinquendo AB, seu x, indeterminatam.

Vbi patet, si quæstio in tribus aut quatuor tantùm lineis est proposita, semper ejusmodi terminos inveniri posse; præterquam quòd quidam ex illis interdum abesse possint, signáque + & — diversimodè mutari.

His peractis, duco KI parallelam & æqualem ipsi AB, ita ut ex BC segmentum auferat BK, æquale ipsi m: quandoquidem hìc habetur $+ m$; quod quidem aliàs addidissem ipsi BC, ducendo hanc lineam IK ad alteram partem, si illic fuisset $- m$; eamque nullo modo duxissem, si quantitas m prorsus defuisset. Deinde duco IL, ita ut linea IK sit ad KL, sicut z ad n. hoc

est, ut, cùm I K est x, K L sit $\frac{nx}{z}$. Atque hâc ratione innotescit etiam ratio, quæ est inter K L & I L, quam pono eandem, quæ est inter n & a: ita ut, cùm K L est



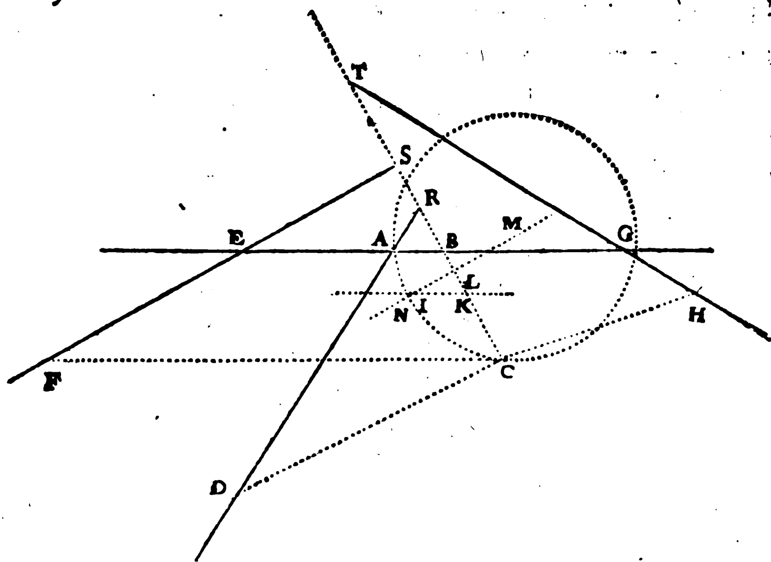
$\frac{nx}{z}$, I L sit $\frac{ax}{z}$: & facio ut punctum K cadat inter L & C; siquidem hìc habetur $-\frac{nx}{z}$; ubi aliàs L sumpsissem inter K & C, si habuissem $+\frac{nx}{z}$. Neque omnino duxissem hanc lineam I L, si $\frac{nx}{z}$ defuisset.

C Hinc nihil mihi ampliùs restare video pro linea L C præter hosce terminos: L C ∞ $\sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Vnde cognosco, quòd, si nulli fuissent, punctum C repertum fuisset in linea recta I L; & si tales extitissent, ut inde radix extrahi potuisset, hoc est, ut, mm & $\frac{p}{m}xx$ signo-

ſigno + notatis, oo fuiſſet æqualis $4pm$, ſive etiam termini mm & ox, aut ox & $\frac{p}{m}xx$ nihilo fuiſſent æquales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidiſſet, quæ quidem inventu difficilior non fuiſſet quàm I L. Sed ſi hoc non fiat, punctum C reperietur ſemper in aliqua trium Conicarum ſectionum, aut in Circulo, cujus una ex diametris ſit in linea I L, & linea L C una ex iis, quæ ad hanc diametrum ordinatim adplicantur; vel contra, L C erit parallela diametro, ad quam illa, quæ eſt in linea I L, ordinatim adplicatur. Nimirum, ſi terminus $\frac{p}{m}xx$ non reperiatur, erit Conica hæc ſectio Parabola; at verò ſi denotetur ſigno +, erit Hyperbola; ac denique ſi ſigno —, erit Ellipſis. Excepto tantùm, cùm quantitas aam eſt æqualis quantitati pzz, & angulus I L C rectus: quo caſu, loco Ellipſis Circulus obtinebitur. CC

Quòd ſi hæc ſectio Parabola exiſtit, latus rectum æquale erit $\frac{oz}{a}$, diameterque ſemper in linea I L. atque ad inveniendum punctum N, quod illius vertex eſt, oportebit I N æqualem ſumere $\frac{amm}{oz}$; ita ut punctum I cadat inter L & N, ſi termini fuerint $+mm+ox$; aut etiam, ut punctum L cadat inter I & N, ſi illi fuerint $+mm-ox$; aut denique ut N cadat inter I & L, ſi habeatur $-mm+ox$. Sed nunquam illic haberi poteſt $-mm$, eo modo, quo termini hìc ſunt poſiti. Poſtremò verò punctum N erit idem quod punctum I, ſi quantitas mm nulla ſit. Quâ quidem ratione inde facile eſt invenire hanc Parabolam per Problema 1[mum] primi libri Conicorum Apollonii. CCC

Quòd ſi quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis, aut denique Hyperbola, oportet primò invenire punctum



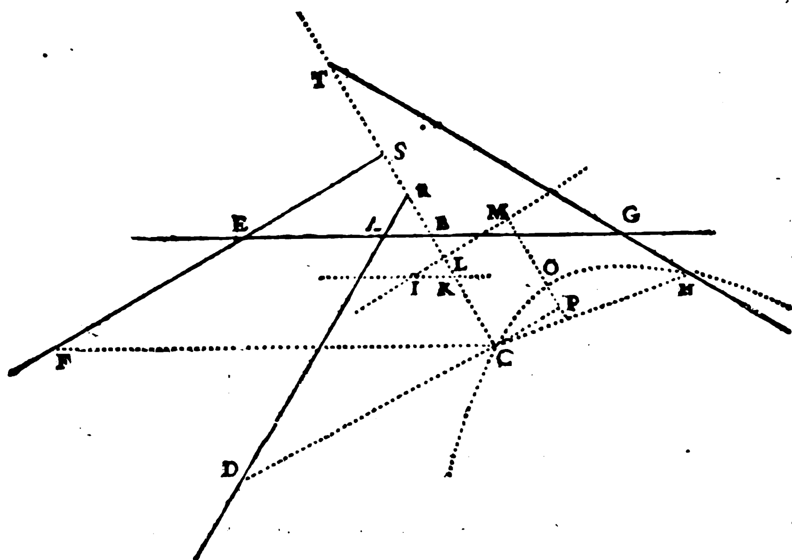
ctum M, quod illius centrum est, quódque semper in linea recta I L cadit, ubi invenitur, sumendo $\frac{aom}{2pz}$ pro I M. Ita ut, si quantitas o nulla est, centrum hocce cadat semper in punctum I. Et si quæsita linea est Circulus, aut Ellipsis, erit punctum M ex eadem parte puncti L sumendum, respectu puncti I, si habeatur $+ox$; at si habeatur $-ox$, sumendum erit illud ex altera parte. Sed contra in Hyperbola, si habeatur $-ox$, centrum illud sumi debebit versùs L; & si habeatur $+ox$, debebit illud sumi versùs alteram partem. Postea figuræ rectum latus sumendum erit $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, cùm habetur $+mm$, & quando quæsita linea est Circulus, aut Ellipsis; vel etiam cùm habetur $-mm$, & quando quæsita linea est Hyperbola. Vel denique $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, quando quæsita linea est Circulus,

aut

aut Ellipsis, & habetur $-mm$; vel etiam quando Hyperbola, & quantitas oo major est quàm $4mp$, & cùm habetur $+mm$. Quòd si verò quantitas mm non reperiatur, latus hocce rectum erit $\frac{oz}{a}$, & si ox nulla sit, id ipsum erit $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Deinde ad inveniendum latus transversum, debet inveniri linea, quæ sit ad hoc latus rectum, ut aam ad pzz, nimirum si latus hocce rectum statuatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, transversum erit $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$. Atque in omnibus hisce casibus sectionis diameter erit in linea I M, erítque L C una earum, quæ ad ipsam ordinatim adplicantur. Ita ut, si fecerimus M N æqualem dimidio lateris transversi, atque illam ex eadem parte puncti M sumpserimus quâ punctum L, habebitur punctum N pro vertice ipsius diametri. Vnde porrò facilè est dictam sectionem invenire, per 2^dum^ & 3^tium^ Problema 1^mi^ Libri Conicorum Apollonii. D

Sed si, sectione Hyperbolâ existente, habeatur $+mm$; & quidem quantitas oo nulla sit, aut minor quàm $4pm$; oportebit ex centro M lineam ducere M O P parallelam ipsi L C, nec non C P ipsi L M, atque M O æqualem facere $\sqrt{mm-\frac{oom}{4p}}$; aut etiam æqualem m, si non reperiatur quantitas ox. Deinde considerare oportebit punctum O tanquam verticem Hyperbolæ, cujus diameter sit O P, & linea C P, quæ ad illam sit ordinatim adplicata, cujúsque latus rectum sit $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4}-\frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$, transversum verò $\sqrt{4mm-\frac{oom}{p}}$. Excepto tantùm cùm ox nulla est: siquidem eo casu latus rectum E

fit



fit $\frac{2aamm}{pzz}$, & transversum $2m$. Ita ut inde facile sit illam invenire per 3^{tium} Problema 1^{mi} libri Conicorum Apollonii.

Demonstratio ejusdem solutionis.

Quorum quidem demonstrationes perspicuæ sunt. Etenim, si componatur spatium aliquod ex quantitatibus, quas recto & transverso lateri assignavi, atque etiam segmento diametri N L, vel O P, juxta sensum 11^{mi}, 12^{mi}, & 13^{tii} Theorematum primi libri Conicorum Apollonii, invenientur iidem omnes termini, ex quibus compositum est quadratum lineæ C P, vel C L, quæ huic diametro ordinatim est adplicata. Vt in hoc exemplo, auferendo I M, quæ est $\frac{aom}{2pz}$, ab N M, quæ est $\frac{am}{2pz}\sqrt{oo + 4mp}$, relinquitur I N; cui si addatur I L, quæ est $\frac{a}{z}x$, fit summa N L; quæ ideo erit

$\frac{a}{z}x$ —

$\frac{a}{z}x - \frac{aom}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{oo + 4mp}$. Hæc autem multiplicata per $\frac{z}{a}\sqrt{oo + 4mp}$, quæ est figuræ latus rectum, provenit $x\sqrt{oo + 4mp} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo + 4mp} + \frac{moo}{2p} + 2mm$, pro rectangulo. A quo auferendum est spatium, quod sit ad quadratum ex N L, ut latus rectum ad latus transversum. Hinc cum quadratum ex N L sit $\frac{aa}{zz}xx - \frac{aaom}{pzz}x + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{oo + 4mp} + \frac{aaoomm}{2ppzz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaomm}{2ppzz}\sqrt{oo + 4mp}$, oportebit id ipsum dividere per aam, & multiplicare per pzz, propterea quòd hi termini rationem, quæ est inter latus transversum & rectum, explicent, fietque $\frac{p}{m}xx - ox + x\sqrt{oo + 4mp} + \frac{oom}{2p} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo + 4mp} + mm$. Hoc ergo si auferatur ex rectangulo præcedenti, invenietur $mm + ox - \frac{p}{m}xx$, pro quadrato lineæ C L: quæ proinde una est ex ordinatim adplicatis in Ellipsi, aut Circulo, ad segmentum diametri N L.

Iam verò si datas omnes quantitates numeris velimus explicare, ponendo, exempli gratiâ, E A ∞ 3, A G ∞ 5, A R ∞ B R, B S ∞ $\frac{1}{2}$ B E, G B ∞ B T, C D ∞ $\frac{3}{2}$ C R, C F ∞ 2 C S, C H ∞ $\frac{2}{3}$ C T; & quòd angulus A B R sit 60 graduum; ac denique quòd rectangulum sub duabus lineis C B & C F, sit æquale rectangulo sub duabus reliquis C D & C H; (quandoquidem hæc omnia data requiruntur, ut quæstio sit penitus determinata;) & quòd præterea A B sit ∞ x, & C B ∞ y: inveniemus per modum, supra explicatum, $yy \infty 2y - xy + 5x - xx$, & $y \infty 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$: Ita ut B K fieri de-

beat 1, & K L semissis ipsius K I vel A B. Cumque angulus I K L sit 60 graduum, angulus I L K erit rectus. Quoniam autem I K seu A B vocata est x, K L erit $\frac{1}{2}x$, I L verò $x\sqrt{\frac{3}{4}}$; & quantitas, quæ paulò ante nominabatur z, erit 1; quæ autem a, erit $\sqrt{\frac{3}{4}}$; quæ m, erit 1; quæ o, erit 4; & quæ appellabatur p, erit $\frac{3}{4}$: ita ut habeatur $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pro I M, & $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pro N M. Et quia aam, quæ est $\frac{3}{4}$, hìc æquatur pzz, atque angulus I L C est rectus, linea curva N C invenitur esse circulus. Eodem modo reliqui casus omnes facilè examinari possunt.

Quid intelligendum sit per loca Plana, & Solida; Et ratio ipsa inveniendi.

Cæterùm, quia æquationes, quæ ultra Quadratum non ascendunt, omnes in eo sunt comprehensæ, quod jam explicavi; non solùm Veterum Problema in 3 & 4 lineis hìc penitus ad finem perductum est; sed etiam illud, quod ad id, quod Solidorum Locorum Compositionem vocabant, pertinet; adeoque etiam locorum
F Planorum, cum illa in Solidis contineantur. Quippe hæc loca nihil aliud sunt, quàm cùm in quæstione aliqua est inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipsa prorsus sit determinata. Quemadmodum in hoc exemplo, ubi omnia ejusdem lineæ puncta pro eo accipi possunt, quod est quæsitum. Etenim lineâ illâ existente rectâ aut circulari, locus vocatur Planus. At si illa est Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis, tum locus ille nominatur Solidus. Quotiescunque autem id evenit, potest perveniri ad æquationem, quæ duas quantitates incognitas continet, quæque alicui ex illis, quas jam resolvi, similis existit. Quòd si verò linea, quæ sic quæsitum punctum determinat, uno gradu magis quàm sectiones Conicæ sit composita, ipsam eodem modo locum Sursolidum appellare licebit, atque ita
G de cæteris. At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud

lud

Ind reperitur, superficies est, quæ similiter aut plana, aut sphærica, aut magis composita esse potest. Verùm summus scopus, quem sibi in hac materia Veteres præfixêre, fuit, ut ad Solidorum Locorum compositionem pervenirent; Et verisimile est, omne illud, quod Apollonius de Conicis sectionibus scripsit, eò tantùm, ut illam indagaret, respexisse.

Præterea apparet etiam, illud, quod pro primo linearum curvarum genere sumpsi, non posse alias ullas præter Circulum, Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsim complecti. Quod quidem id omne est, quod demonstrare susceperam.

Quænam sit prima & simplicissima linearum curvarum, Veterum quæstioni inservientium, cùm ipsa quæstio in 5 lineis est proposita.

Quòd si Veterum quæstio in 5 lineis est proposita, quæ omnes sunt parallelæ; evidens est, quæsitum punctum semper in linea recta fore. Sed si in 5 lineis proposita fuerit, ita ut 4 illarum sint parallelæ, & quæ à quinta ad angulos rectos secentur; tum etiam, ut lineæ omnes à quæsito puncto ad angulos rectos illis occurrant; ac demum ut parallelepipedum ex tribus lineis ita ductis ad tres ex iis, quæ parallelæ sunt, sit æquale parallelepipedo ex duabus ad reliquas ductis, & ex tertia quadam data linea: (qui, ut videtur, post præcedentem simplicissimus casus est, quem quis concipere potest:) punctum quæsitum cadet in lineam curvam, quæ motu Parabolæ describitur, quemadmodum superiùs est explicatum.

Sint, exempli gratiâ, datæ lineæ A B, I H, E D, G F, & G A; & oporteat invenire punctum C; ita ut, ducendo C B, C F, C D, C H, & C M ad angulos rectos ad positione datas, parallelepipedum ex tribus C F, C D, & C H compositum, sit æquale parallelepipedo composito ex duabus reliquis C B, C M, & tertia data linea, quæ sit A I.

 Pono

Pono CB $\propto y$, CM $\propto x$, AI vel AE vel GE $\propto a$; ita ut, existente puncto C inter lineas AB & DE, habeam CF $\propto 2a - y$, CD $\propto a - y$, & CH $\propto y + a$; & multiplicando hasce tres in se invicem, habeam $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$, æquale producto trium reliquarum, quod est axy.

Post hæc considero lineam curvam CEG, quam imaginor descriptam esse per intersectionem Parabolæ CKN, interea dum movebatur in linea recta AB, atque secabatur à regula GL, rotata circa punctum G, semperque transeunte per punctum L, in plano Parabolæ.

bolæ. Et facio KL ∞a, latusque principale, hoc est, quod ad axem Parabolæ pertinet, itidem æquale a, GA verò $\infty 2a$, CB seu MA ∞y, & CM seu AB ∞x. Deinde propter similitudinem triangulorum GMC & CBL, GM seu $2a-y$ est ad MC seu x, ut CB seu y ad BL, quæ ideo est $\frac{xy}{2a-y}$. Vnde cum LK sit a, BK erit $a-\frac{xy}{2a-y}$, seu $\frac{2aa-ay-xy}{2a-y}$. Denique, quoniam eadem BK, quæ diametri Parabolæ est segmentum, se habet ad BC, quæ ipsi ordinatim est adplicata, ut BC se habet ad latus rectum, quod est a: calculus monstrat, quòd $y^3-2ayy-aay+2a^3$ æquabitur axy, & per consequens, quòd punctum C erit illud, quod quærebatur. Quod quidem, ubicunque libuerit, in linea CEG assumi potest; vel etiam in ejus adjuncta cEGc, quæ eodem modo describitur, præterquam quòd Parabolæ vertex versùs alteram partem vergat; vel denique in earundem oppositis NIo, nIO, quæ per intersectionem, quam linea GC facit in altero Parabolæ latere KN, describuntur.

Iam verò etiamsi datæ parallelæ AB, IH, ED, & GF non æqualiter inter se distantes essent, nec GA ipsas ad rectos angulos secaret, neque etiam lineæ à puncto C ad easdem ductæ; tamen non minùs hocce punctum C reperiretur semper in linea curva, quæ ejusdem esset naturæ. Quemadmodum id etiam aliquando contingere potest, licèt nullæ ex datis lineis sint parallelæ. Sed quando ita quatuor parallelæ sunt, & quinta easdem secans; & quidem parallelepipedum ex tribus, à quæsito puncto ductis, quarum una super quintam cadat, & aliæ duæ super duas ex parallelis, æquetur parallelepipedo sub duabus ad duas reliquas parallelas, & tertia quadam data linea: punctum quæsitum

reperietur in linea curva, quæ alterius erit naturæ. ſcilicet in una, cujus omnes ordinatim adplicatæ ad diametrum æquales ſunt ordinatim adplicatis ad diametrum ſectionis Conicæ, cujúſque ſegmenta diametri inter verticem & ordinatim adplicatas interjecta, eandem rationem habent ad datam aliquam lineam, quam hæc ipſa ad ſimilia diametri ſegmenta ſectionis Conicæ, quibus illæ lineæ ordinatim ſunt adplicatæ. Neque aſſeverare auſim, hanc lineam non ſimpliciorem eſſe præcedenti; quam tamen pro prima ſumendam putavi: propterea quòd deſcriptio ejus ac calculus aliquo modo ſint faciliores.

Quod ad lineas attinet, quæ reliquis caſibus inſerviunt, non immorabor iis per ſpecies diſtinguendis, neque enim omnia dicere ſuſcepi: Sed quia modum inveniendi infinita puncta, per quæ tranſire debent, explicui, ſimul modum, quo deſcribendæ ſunt, me ſatis oſtendiſſe puto.

Quænam curva linea in Geometriam ſint recipiendæ, quæ deſcribuntur inveniendo plura earum puncta.

Ac proinde non è re fuerit, hìc conſiderare, magnum eſſe diſcrimen, inter hunc modum inveniendi plura puncta, ad deſcribendam aliquam curvam lineam, atque illum, quo utimur in deſcriptione Spiralis & ſimilium. Quandoquidem hoc poſteriore modo, non indifferenter omnia quæſitæ lineæ puncta inveniuntur, ſed tantùm ea, quæ per menſuram aliquam ſimpliciorem determinari poſſunt, quàm eſt ea, quæ ad illam componendam requiritur. Atque ita propriè loquendo nullum ex ejus punctis invenitur, hoc eſt, nullum eorum, quæ ipſi ita propria ſunt, ut non niſi per illam inveniri poſſint. Sed è contra nullum habetur punctum in lineis, quæ quæſtioni propoſitæ inſerviunt, quod non inter illa, quæ modo ſupra explicato determinantur, inveniri queat. Cum autem modus deſcribendi lineam curvam,

curvam, indifferenter plura ejus puncta inveniendo, ad illas tantùm se extendat, quæ itidem per motum aliquem ordinatum & continuum describi possunt, non erit is omnino à Geometria rejiciendus.

Quemadmodum non magis etiam ex ea rejiciendus est modus, in quo filo seu chordâ complicatâ utimur, ad determinandam summam vel differentiam duarum pluriúmve linearum rectarum, quæ à quolibet quæsitæ curvæ puncto duci possunt ad certa quædam alia puncta, vel lineas in certis angulis, sicut in Dioptrica fecimus, ad explicandam Ellipsin & Hyperbolam. Nam licèt in Geometria nullæ lineæ, quæ chordis similes videntur, hoc est, quæ modò rectæ, modò curvæ sunt, recipi possint; (cum ratio, quæ inter rectas & curvas existit, non cognita sit, nec etiam ab hominibus (ut arbitror) cognosci queat; nihilque inde, quod exactum atque certum est, concludere possimus:) Tamen, quia non aliter chordis illis in dictis constructionibus utimur, quàm ut earum beneficio lineas rectas determinemus, quarum longitudo exactè cognoscitur, efficere hoc non debet ut rejiciantur.

Quæ etiam illæ sint, quæ ope fili describuntur, & ibidem recipi possint.

Iam verò ex hoc solo, quòd scitur relatio, quam omnia lineæ curvæ puncta habent ad puncta omnia lineæ rectæ, modo illo, quem supra explicavi; facile quoque est invenire relationem, quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque exinde cognoscere diametros, axes, centra, aliasque lineas, & puncta, ad quæ unaquæque curva linea relationem habebit specialiorem vel simpliciorem quàm ad alia: atque ita imaginari diversos modos illas describendi, ex quibus faciliores eligi possunt. Immo verò, potest quoque ex hoc solo inveniri propemodum omne id, quod determinari potest, atque ad spacii, quod comprehendunt, magnitudinem

H

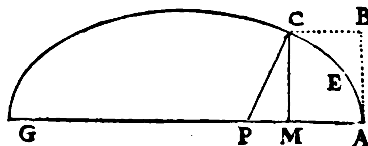
Quòd, ad inveniendum omnes linearum curvarum proprietates, sufficiat scire relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum; &

modum ducendi lineas rectas, quæ ipſas ſecent in omnibus illis punctis ad angulos rectos.

nem ſpectat: ita ut non opùs ſit de his agere apertiùs. Et denique quantum ad omnes reliquas proprietates, quas lineis curvis attribuere poſſumus, ipſæ tantummodo ab angulorum, quos cum certis quibuſdam aliis lineis efficiunt, amplitudine dependent. Sed ſi lineæ rectæ duci poſſint, quæ illas in punctis, ubi aliæ, cum quibus angulos faciunt, quos menſurarè volumus, ipſis oc-
I currunt, ſecent ad angulos rectos, vel, quod hìc pro eodem haberi volo, quæ earum contingentes ſecent: magnitudo horum angulorum non erit inventu difficilior, quàm ſi à duabus rectis lineis comprehenſi eſſent. Atque ideo confidam, me expoſuiſſe hìc omnia illa, quæ pro curvarum linearum elementis requiruntur, poſtquam generalem modum ducendi rectas lineas, quæ eas ad rectos angulos in quibuſvis ipſarum punctis ſecent, oſtendero. Nec verebor dicere, Problema hoc, non modò eorum, quæ ſcio, utiliſſimum & generaliſſimum eſſe; ſed etiam eorum, quæ in Geometria ſcire unquam deſideraverim.

K

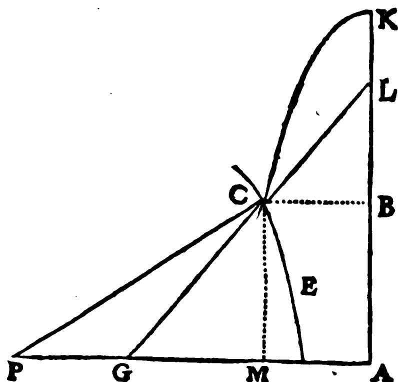
Modus generalis inveniendi lineas rectas, quæ ſecent datas curvas, vel earum contingentes, ad angulos rectos.



Sit C E linea curva, oporteatque per punctum C rectam lineam ducere, facientem cum ipſa angulos rectos.

Suppono rem tanquam jam factam, lineamque quæſitam eſſe C P, quam produco uſque ad punctum P, ut occurrat rectæ G A, quam ſuppono illam eſſe, ad cujus puncta referenda ſunt puncta omnia lineæ C E: ita ut faciendo M A ſeu C B ∞ y, & C M ſeu B A ∞ x, habeam æquationem aliquam, quæ mihi relationem, quæ eſt inter x & y, explicet. Deinde facio P C ∞ s, & P A ∞ v, ſeu P M ∞ $v - y$. Vnde propter triangulum

lum rectangulum P M C invenio ss, quod est quadratum basis, æquale $xx + vv - 2vy + yy$, quadratis duorum laterum, hoc est, invenio $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, aut $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$. Cujus æquationis ope aufero ex æquatione altera, (quæ mihi relationem explicat, quam puncta curvæ C E habent ad puncta rectæ G A) alterutram è duabus quantitatibus indeterminatis x vel y. Quod quidem facile est, si ubique pro x ponamus $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, & quadratum hujus summæ pro xx, & ejus cubum pro x^3, & ita porrò; si fuerit x, quam tollere velimus; aut si fuerit y, ponendo ejus loco $v + \sqrt{ss - xx}$, & quadratum, cubúmve, &c. hujus summæ, loco yy, aut y^3, &c. Ita ut inde semper restet æquatio, in qua non nisi una habeatur quantitas indeterminata x, vel y.



Quemadmodum si C E est Ellipsis, in qua M A sit segmentum diametri ad quam C M sit ordinatim adplicata, quódque pro latere recto habeat r; pro transverso autem q: fiet per 13^{tium} Theorema 1^{mi} libri Conicorum Apollonii: $xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$. Vnde tollendo xx, restabit $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{ryy}{q}$, vel

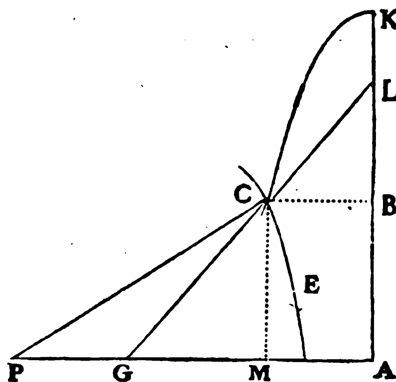
L Exemplum hujus Operationis in Ellipsi.

$yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ æquale nihilo.

Præstat enim hoc loco ita totam summam considerare, quàm unam ejus partem alteri parti adæquare.

M

Aliud Exemplum in Parabola secundi generis.



Eodem modo, si C E sit curva linea, per motum Parabolæ descripta, ut superiùs fuit explicatum, & pro G A ponatur b, pro K L, c; & d pro latere recto, pertinente ad Parabolæ diametrum K L: æquatio explicans relationem, quæ est inter x & y, erit $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \propto 0$. E qua auferendo x, habebitur $y^3 - byy - cdy + bcd + dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$. Hoc est, ordinando æquationem ope multiplicationis, prodibit

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd \propto 0.$$

Atque ita de aliis.

Quinetiam, licèt puncta lineæ curvæ ad puncta lineæ rectæ sese eo, quo dixi, modo non haberent; sed alio quolibet, quem sibi quis imaginari posset: poterit tamen nihilominus semper æquatio ejusmodi inveniri.

Tertium exemplum in Ovali, sive Ellipsi secundi generis.

Quemadmodum si C E est linea, habens ejusmodi relationem ad tria puncta F, G, & A, ut lineæ rectæ, à quolibet ejus puncto, ut C, ad punctum F ductæ, excedant lineam F A, quantitate aliqua, quæ datam habeat rationem ad quantitatem, quâ G A excedit lineam, quæ ab eodem puncto C ducitur ad punctum G: facio G A $\propto b$, A F $\propto c$, sumendoque punctum C ad libitum

bitum

bitum in curva, suppono, quantitatem, quâ CF superat FA, esse ad illam, quâ GA superat GC, sicut d ad e: ita ut si prior illa quantitas indeterminata vocetur z, FC sit $c+z$, GC verò $b-\frac{ez}{d}$. Deinde ponendo MA $\infty\ y$, GM erit $b-y$, & FM $c+y$: & quandoquidem triangulum CMG rectangulum est, si auferam quadratum ex GM à quadrato ex GC, relinquetur quadratum ex CM, $\frac{ee}{dd}zz-\frac{2be}{d}z+2by-yy$. Non secus, si à quadrato ex FC auferam quadratum ex FM, relinquetur itidem quadratum ex CM in aliis terminis, videlicet $zz+2cz-2cy-yy$. Vnde cum hi termini præcedentibus sint æquales, ostendunt y seu MA fore $\frac{ddzz+2cddz-eezz+2bdez}{2bdd+2cdd}$. Ac proinde, substituendo hanc summam loco y in quadrato ex CM, invenietur, illud exprimendum esse hisce terminis $\frac{bddzz+ceezz+2bcddz-2bcdez}{bdd+cdd}-yy$.

Porrò suppono, lineam rectam PC occurrere curvæ CE ad angulos rectos in puncto C, faciendóque PC $\infty\ s$, & PA $\infty\ v$, ut ante, PM erit $v-y$; habebiturque propter triangulum rectangulum PCM, $ss-vv+2vy-yy$ pro quadrato ex CM. Vbi si rursus pro y substituamus summam ipsi æqualem, exurget
$$zz\frac{+2bcddz-2bcdez-2cddvz-2bdevz-bddss+bddvv-cddss+cddvv}{bdd+cee+eev-ddv}\ \infty\ 0,$$
pro æquatione, quam quærebamus.

Postquam igitur invenimus talem æquationem, non eâ utemur ad cognoscendas quantitates x, y, vel z, quæ

hìc datæ ſunt, quia punctum C eſt datum, ſed ad inveniendam quantitatem v vel s, quæ quæſitum punctum P determinant. In quem finem conſiderari debet: ſi punctum P tale eſt, quale deſideratur, quòd circulus, cujus id ipſum eſt centrum, quique per punctum C tranſit, tangat ibidem curvam lineam C E, nec ipſam ſecet. Sed quòd, ſi idem punctum P propiùs aut remotiùs ſumatur à puncto A, quàm oportet, circulus hic non ſolùm in puncto C, ſed etiam neceſſariò in alio quodam puncto curvam C E ſit ſecturus.

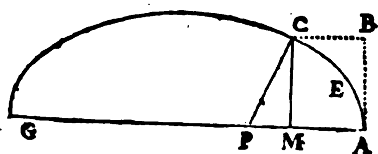
Deinde conſiderandum quoque eſt, quòd, quando hic circulus lineam curvam C E ſecat, æquatio, per quam quantitas x vel y, vel quædam alia ſimilis quæritur, ſupponendo P A & P C eſſe cognitas, neceſſariò duas contineat radices, quæ ſunt inæquales. Nàm ſi, exempli gratiâ, circulus hic ſecet curvam C E, in punctis C & E, ac ducatur E Q parallela ipſi C M: nomina quantitatum indeterminatarum x & y æquè bene convenient lineis E Q & Q A, atque ipſis C M & M A, exiſtente P E æquali P C, propter circulum. Adeò ut, quærendo lineas E Q & Q A, per P E & P A, (quæ tanquam cognitæ ſupponuntur) eandem habituri ſimus æquationem, quam ſi quærerentur C M & M A per P C & P A. Vnde liquidò conſtat, ipſius x, vel y, vel alterius ejuſmodi quantitatis, quam ſuppoſuerimus, valorem, in hac æquatione fore duplicem, hoc eſt, æquationem duas admiſſuram radices, quæ ſunt inæquales; quarum quidem una futura eſt C M, & altera E Q, ſi

fuerit

fuerit x, quam quærimus; aut quarum una futura est MA, & altera QA, si fuerit y, quæ quæritur. Verum equidem est, quòd, cùm punctum E non ad eandem curvæ partem reperitur cum puncto C, una tantùm duarum harum radicum sit vera, & altera inversa seu minor quàm nihil: sed quò hæc puncta C & E sibi invicem sunt propiora, eò quoque differentia inter radices hasce erit minor, quæ denique omnino inter se æquales futuræ sunt, si bina hæc puncta in unum punctum cadant; hoc est, si circulus, qui per C transit, curvam CE ibidem tangat, nec omnino secet.

Præterea considerandum est, quòd æquatio, in qua duæ sunt radices æquales, necessariò eandem formam habeat, ac si in se ipsam multiplicetur quantitas, quam velut incognitam supponimus, multata quantitate cognitâ sibi æquali: & deinde hæc ultima summa, si non tot dimensiones habet, quot præcedens, rursus per aliam summam multiplicetur, totidem, quot alteri desunt, dimensiones habentem, sic ut separatim æquatio inter singulos unius atque singulos alterius terminos haberi possit.

Vt, exempli causâ, dico, primam æquationem supra inventam, nimirum: $yy \frac{+qry - qvy + qvv - qss}{q - r}$, eandem formam habituram, quam illa, quæ producitur, faciendo e æqualem y, atque multiplicando $y - e$ in se, unde exsurgit $yy - 2ey + ee$; ita ut separatim singulos earum terminos inter se comparare possimus, ac dicere: quòd, postquam primus terminus, qui est yy, in utraque æquatione planè idem



est, secundus, qui in una est $\frac{qry - 2qvy}{q-r}$, sit æqualis secundo alterius, qui est $-2ey$. Vnde quærendo quantitatem v, quæ quantitatem lineæ PA designat, invenietur $v \infty e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$. vel quia e æqualem supposuimus ipsi y, habebitur $v \infty y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Non secus inveniri quoque posset s per tertium terminum $ee \infty \frac{qvv - qss}{q-r}$; sed quia quantitas v satis determinat punctum P, quod solum quærebamus, necesse non erit ulteriùs progredi.

Eâdem ratione secunda æquatio superiùs inventa: nempe,

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix}-2cd\\+bb\\+dd\end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix}+4bcd\\-2ddv\end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix}-2bbcd\\+ccdd\\-ddss\\+ddvv\end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd,$$

eandem debet habere formam, quam summa, quæ producitur multiplicando $yy - 2ey + ee$ per $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, quæ est

$$y^6 \left.\begin{matrix}+f\\-2e\end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix}+gg\\-2ef\\+ee\end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix}+h^3\\-2egg\\+eef\end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix}+k^4\\-2eh^3\\+eegg\end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix}-2ek^4\\+eeh^3\end{matrix}\right\} y + eek^4.$$

ita ut ex binis hisce æquationibus alias sex eliciam, quæ ad inveniendas sex quantitates f, g, h, k, v, & s inserviunt.

Vnde facilè est intelligere, quòd, cujuscunque generis linea curva proposita esse possit, tot semper hoc procedendi modo æquationes resultent, quot quantitates incognitas supponere coacti fuerimus. Verùm ut ordine æquatiónes hasce disjungamus, tandemque quantitatem v (quæ quidem ea sola est, qua indigemus, & cujus occasione cæteræ quæruntur) inveniamus: oportet primò per secundum terminum quærere f, primam quantitatum incognitarum ultimæ summæ, invenieturque $f \infty 2e - 2b$.

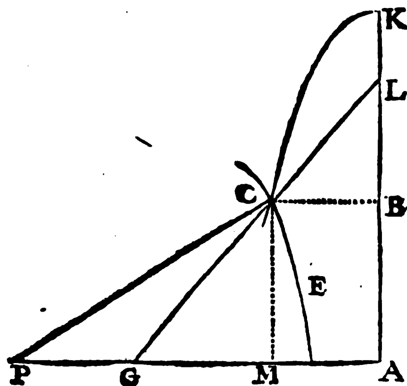
Dein-

Deinde per ultimum quærenda eſt k, ultima quantitatum incognitarum ejuſdem ſummæ, fitque $k^4 \propto \frac{bbccdd}{ee}$.

Porrò per tertium terminum quærenda eſt g, ſecunda quantitas, & fit $gg \propto 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$.

Denique per penultimum invenienda eſt h, penultima quantitas, & fit $h^3 \propto \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$. Atque ita eodem ordine uſque ad ultimam progrediendum eſſet, ſi plures ejuſmodi quantitates in eadem ſumma haberentur; ſiquidem hoc eodem ſemper modo fieri poteſt.

Præterea per terminum, qui in hoc ipſo ordine ſequitur, atque hic quartus eſt, oportet inveſtigare v, & fit



$$v \propto \frac{2e^3}{dd} - \frac{3bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3},$$

vel, ponendo y loco e, quæ ipſi eſt æqualis, habebitur

$$v \propto \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3},$$

pro linea AP.

Simi-

Similiter quoque tertia æquatio, quæ est

$$zz \frac{+2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv},$$ eandem formam habet, quam $zz - 2fz + ff$, supponendo f æqualem z: ita ut obtineatur rursus æquatio inter $-2f$, vel $-2z$ & $\frac{+2bcdd - 2bcde - 2cddv - 2bdev}{bdd + cee + eev - ddv}$. Vnde cognoscitur quantitatem v fore $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{cdd + bde - eez + ddz}$.

Ideoque si componamus lineam AP ex hac summa, ipsi v æquali, cujus quantitates omnes sunt cognitæ, atque à puncto sic invento P rectam lineam ducamus versùs C, secabit ipsa ibidem curvam CE ad angulos rectos. Quod faciendum erat. Nec video quid impedire possit, quo minùs Problema hoc eodem modo ad omnes lineas curvas, quæ sub calculum aliquem Geometricum cadunt, extendatur.

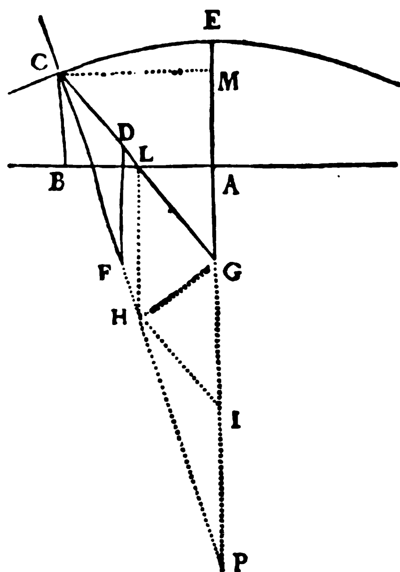
Et quidem quod ad ultimam summam attinet, quæ pro libitu sumpta est ad implendum dimensionum numerum alterius summæ, quando in illa quædam dimensiones desunt, quemadmodum paulò ante sumpsimus $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, operæ pretium est ut advertamus, signa + & − talia ibi supponi posse, qualia quis voluerit, nec propterea lineam v, seu AP diversam inveniri, ut facilè experienti constabit. Si enim demonstrandis Theorematîs omnibus, quorum hìc mentionem aliquam facio, immorarer, conscribendus mihi esset liber multò major, quàm quidem mihi esset animus.

mus. Attamen obiter vos monere volo, quòd inventio hæc ſupponendi duas ejuſdem formæ æquationes, ad comparandum ſeparatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, ut inde ex una ſola naſcantur plures aliæ, (cujus hìc exempla vidiſtis,) infinitis aliis Problematîs inſervire poſſit, neque una ex minimis, methodi, quâ utor, exiſtat.

Non adjungo conſtructiones, ſecundùm quas contingentes, ſive perpendiculares quæſitæ, poſt calculum, quem jam explicavi, ſunt ducendæ: quandoquidem illæ ſemper facilè inveniri poſſunt; etiamſi aliquâ ſæpe induſtriâ, ut breves atque ſimplices reddantur, opùs ſit.

Vt, exempli causâ, ſi C E eſt prima Conchoïdes Veterum, cujus G ſit Polus, & A B regula, cujus ope ducta N

Exemplum conſtructionis hujus Problematis in Conchoïde.



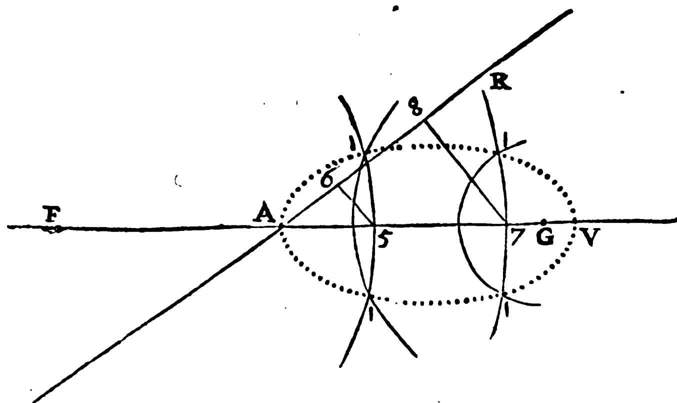
eſt; adeò ut lineæ omnes rectæ, quæ tendunt versùs G, atque intra curvam C E, & rectam A B continentur,

G (ut

(ut E A & C L) ſibi invicem ſint æquales: Velimuſque rectam lineam ducere C F, quæ ſecet hanc Conchoïdem in dato puncto C ad angulos rectos: Quærendo juxta methodum, à nobis expoſitam, in linea A B punctum, per quod dicta linea C F tranſire debet, incidemus in calculum, nullo præcedentium breviorem; & nihilominus conſtructio inde elicienda valde brevis eſt. Oportet enim duntaxat in linea recta C G ſumere C D æqualem C B, quæ perpendiculariter cadit in B A, & deinde ex puncto D ducere D F, parallelam G A, ac æqualem L G: quâ ratione habebitur punctum F, per quod quæſita linea C P eſt ducenda.

Explicatio quatuor generum novarum Ovalium Opticæ inſervientium.

Cæterùm ut ſciatis, conſiderationem curvarum linearum, hìc propoſitarum, non carere uſu, & quòd illæ diverſas habeant proprietates, quæ nullâ ratione cedunt proprietatibus ſectionum Conicarum, libet præterea hìc ſubjicere explicationem certarum quarundam Ovalium, quas ad Catoptricæ & Dioptricæ Theoriam utiliſſimas eſſe videbitis. Modus autem quo illas deſcribo, talis eſt.

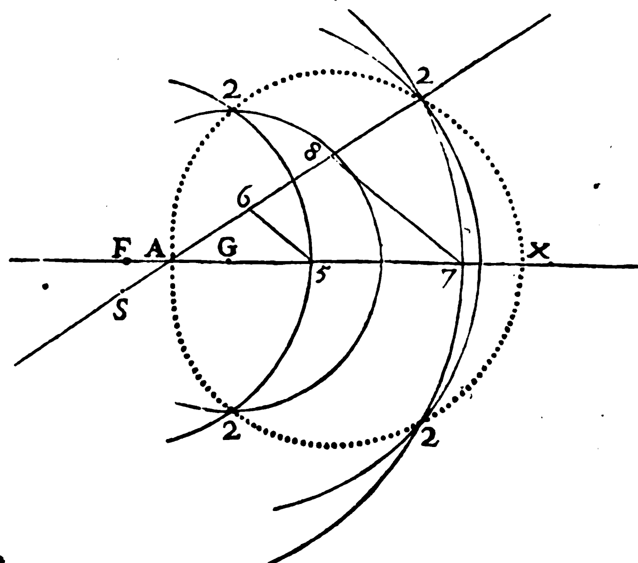


Primùm ductis rectis lineis F A & A R, ſeſe interſecan-

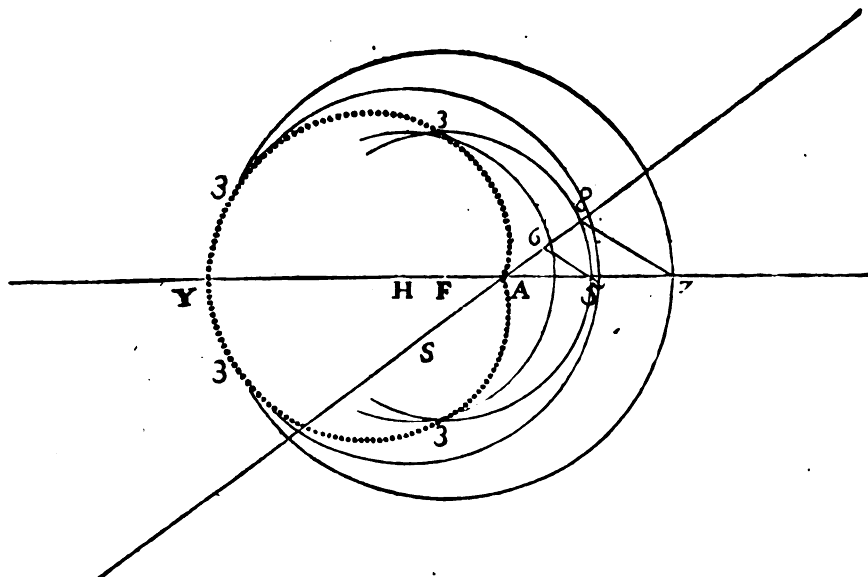
ſecantibus in puncto A, ad quoslibet angulos, ſumo ad arbitrium in una ex ipſis punctum F, hoc eſt, propiùs aut remotiùs ab A puncto, prout Ovales haſce majores aut minores deſcribere animus eſt; atque ex puncto F, ceu centro, deſcribo circulum, tranſeuntem aliquantulum ultra A, ut per punctum 5. Deinde ex hoc puncto 5 duco lineam rectam 5, 6, ſecantem alteram in puncto 6; ita ut A 6 minor ſit quàm A 5, juxta quamlibet rationem datam, nimirum eam, quæ refractiones menſurat, ſi eâ in Dioptrica uti velimus. Quo facto, ad libitum quoque ſumo punctum G in linea FA, ex eadem parte, quâ punctum 5 eſt ſumptum, hoc eſt, faciendo, ut *lineæ* A F & G A eam inter ſe rationem habeant, quam volumus. Poſtea poſitâ R A æquali G A in linea A 6, deſcribo alium circulum ex centro G, cujus radius æqualis ſit lineæ R 6, priorem ab utraque parte lineæ F G in puncto 1 ſecantem; quod quidem unum eſt ex illis, per quæ prima quæſitarum Ovalium tranſire debet. Similiter, deſcribo rurſus circulum ex centro F, qui tranſeat aliquantulum ultra citráve punctum 5, ut per punctum 7; ductâque lineâ rectâ 7, 8, parallelâ ipſi 5, 6, ex centro G deſcribo alium circulum intervallo lineæ R 8, priorem, qui per punctum 7 tranſit, ſecantem in puncto 1, quod aliud præterea punctum eſt ejuſdem Ovalis. Atque ita invenire licet tot alia puncta, quot voluerimus, ducendo ſemper alias atque alias lineas ipſi 7, 8 parallelas, nec non alios alióſque circulos ex centris F & G.

Quod ad ſecundæ Ovalis deſcriptionem attinet, ibi nulla quidem alia differentia advertenda occurrit, quàm quòd loco A R ſumere oporteat A S ipſi A G æqualem, ex altera parte puncti A, & quòd radius circuli, ex centro G deſcripti, ad ſecandum eum, qui ex centro F per pun-

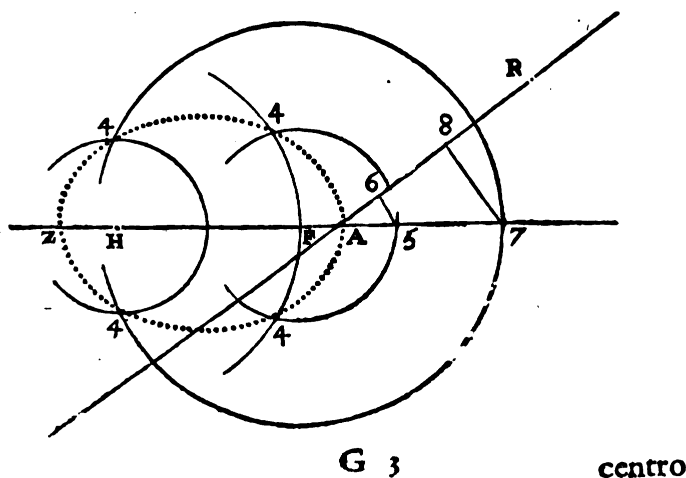
punctum 5 descriptus est, æqualis sumendus sit lineæ S 6; aut etiam æqualis lineæ S 8, si illum, qui per punctum 7 transit, secare debeat. Atque ita de aliis. Quâ quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 sese intersecabunt, per quæ secunda hæc Ovalis erit ducenda.



Porrò quod spectat ad tertiam & quartam, loco lineæ A G sumenda erit A H ex altera parte puncti A, nimirum ex eadem parte, qua punctum F est sumptum. Vbi ampliùs observandum venit, lineam hanc A H excedere debere ipsam A F. quæ quoque nulla esse potest, ita ut punctum F idem sit, quod punctum A, in descriptione omnium harum Ovalium. Deinde postquam lineæ A R & A S sic ipsi A H sunt æquales factæ, ad describendam tertiam Ovalem A 3 Y, describo circulum ex centro H, cujus radius sit æqualis lineæ S 6, circulum ex centro F, descriptum per punctum 5, secantem

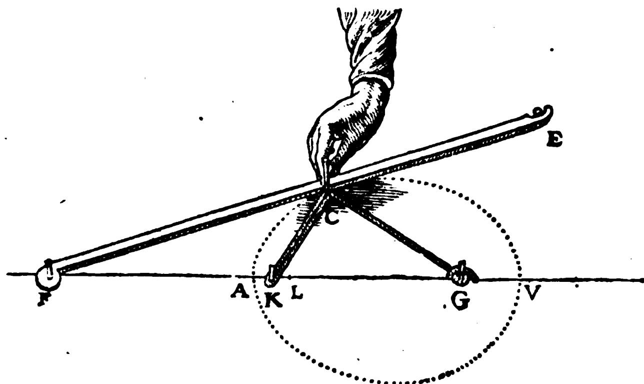


tem in puncto 3; ſimiliterque alium ex centro H, intervallo lineæ S 8, qui circulum ex centro F, deſcriptum per punctum 7, ſecet in puncto itidem notato 3. atque ita de aliis. Denique pro ultima, deſcribo circulos ex



centro H, quorum radii ſint æquales lineis R 6, & R 8, atque ſimilibus, qui reliquos circulos ſecent in punctis notatis 4.

Poſſent præterea infiniti alii modi excogitari ad deſcribendas haſce Ovales. Vt, exempli causâ, ad deſcribendam primam A V, quando lineæ F A & A G ponuntur æquales: divido totam F G in puncto L; ita ut F L ſit

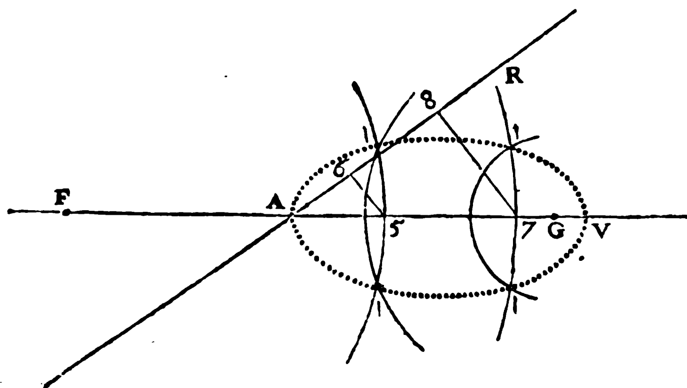


ad L G, ſicut A 5 ad A 6. hoc eſt, ut ipſæ inter ſe rationem ſervent, quæ refractiones metitur. Deinde ſectâ A L bifariam in K, facio rotare regulam aliquam, ut F E, circa punctum F, interea dum juxta ipſam velut agglutinata tenetur chorda E C, quæ, uno extremo annexa extremitati regulæ versùs E, ſe flectit à C versùs K, atque deinde rurſus à K versùs C, ac denuo à C versùs G, ubi alterum ejus extremum eſt alligatum; ſic ut longitudo ipſius compoſita ſit ex longitudine lineæ G A plus A L, plus F E, minus A F, & motus puncti C Ovalem hanc deſcribat: ad imitationem ejus, quod in Dioptrica de Ellipſi & Hyperbola dictum fuit. Sed nolo huic argumento diutiùs immorari.

Ad hæc, etiamſi hæ Ovales ejuſdem fermè naturæ viden-

videntur, ipsæ nihilominus quatuor diversorum sunt generum, quorum unumquodque sub se infinita alia genera continet, & unumquodque rursus tot diversas species, quot facit Ellipsium aut Hyperbolarum genus. Etenim prout ratio, quæ inter lineas A 5 & A 6, similésve, consistit, diversa est, genus quoque subalternum harum Ovalium fit diversum. Deinde prout ratio inter lineas A F & A G vel A H mutatur, Ovales quoque cujusque subalterni generis mutantur specie. Prout autem A G vel A H major vel minor est, ipsæ magnitudine quoque differunt. Quòd si verò lineæ A 5 & A 6 æquales sumantur, loco Ovalium primi aut tertii generis, describentur tantùm lineæ rectæ; sed loco secundi, omnes Hyperbolæ; & locò ultimi, omnes Ellipses.

Vlteriùs in qualibet harum Ovalium considerandæ sunt etiam duæ partes, quæ diversas proprietates habent; quippe in prima pars illa, quæ est versùs A, facit ut radii, qui in aëre existentes ex puncto F prodeunt, detorqueantur omnes versùs G punctum, postquam in convexam vitri superficiem inciderunt, qualis hìc est 1 A 1. Et in quo vitro refractiones sic fiunt, ut juxta ea, *Proprietates harum Ovalium concernentes reflexiones & refractiones.*



quæ

quæ in Dioptricis dicta ſunt, illæ omnes per rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6, aut ſimiles, quarum ope hæc Ovalis deſcripta eſt, obtinetur, menſurari poſſint.

Verùm pars illa, quæ eſt versùs V, facit ut radii, qui ex puncto G prodeunt, omnes versùs F reflectantur, ſi in ſuperficiem concavam ſpeculi inciderint, cujus figura ſit 1 V 1; & quod ex tali materia conſtet, ut vim horum radiorum, ſecundùm rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6 reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in Dioptrica demonſtravimus, liquet, hoc poſito, futurum, ut etiam reflexionum anguli non ſecus ac refractionum inæquales exiſtant, atque eodem modo menſurari poſſint.

In ſecunda Ovali, pars 2 A 2 ſimiliter reflexionibus inſervit, quarum anguli inæquales ſupponuntur. Si enim illa ſuperficiem ſpeculi, ex eadem materia, qua præcedens, confecti, referret, faceret ut radii omnes, qui ex puncto G venirent, ſic reflecterentur, perinde ac ſi poſt reflexionem illam viderentur procedere ex puncto F. Et notandum eſt, quòd, ſi linea A G multò major ſit aſſumpta quàm A F, ſpeculum hoc in medio versùs A concavum ſit futurum, atque concavum in extremitatibus. Quippe hujus lineæ figura talis exiſtit, ut potiùs cor quàm Ovalem repræſentet.

At verò altera ejus pars 2 X 2 refractionibus inſervit, facitque ut radii, qui in aëre ſunt, ac tendunt versùs F, ſe omnes incurvent versùs G, tranſeundo ſuperficiem vitri, quod figuram illam habet.

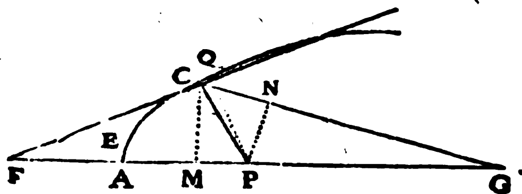
Tertia Ovalis tota refractionibus inſervit, facitque ut radii, qui in aëre exiſtentes versùs F tendunt, in vitro ſe omnes versùs H recipiant, poſtquam ſuperficiem ejus tranſiêrunt, cujus figura eſt A 3 Y 3, quæ undique eſt convexa; præterquam versùs A, ubi paululùm concava

cava existit, ita ut ipsa pariter atque præcedens cordi haud sit absimilis. Differentia autem, quæ est inter duas ejus partes, in eo consistit, quòd punctum F uni ex illis propius sit, quàm punctum H; quódque ab altera remotius quàm idem punctum H existat.

Eodem modo ultima Ovalis omnino reflexionibus inservit, facitque, ut radii, qui ex puncto H veniunt, atque in superficiem concavam alicujus speculi ejusdem cum præcedentibus materiæ incidunt, cujusque figura est A 4 Z 4, reflectantur omnes versùs F.

Ita ut puncta F, & G seu H Focos harum Ovalium appellare liceat, ad exemplum eorum, quæ in Ellipsibus & Hyperbolis habentur, atque in Dioptrica ita nominata sunt.

Omitto multas alias refractiones & reflexiones, quæ harum Ovalium ope diriguntur: cum enim harum solummodo conversæ aut contrariæ sint, ex iis facilè deduci poterunt.



Verùm non omittenda est demonstratio ejus, quod dixi. In quem finem sumamus, exempli causâ, punctum C pro libitu in priore parte primæ harum Ovalium; deinde ducamus lineam rectam C P, quæ secet hanc curvam in C, ad angulos rectos. Quod quidem facile est, per Problema præcedens. Etenim, sumendo *b* pro A G, *c* pro A F, $c + z$ pro F C; supponendoque, quòd ratio, quæ est inter *d* & *e*, (quam hìc *Demonstratio harum proprietatum.*

 sem-

ſemper pro ea ſumam, quæ propoſiti vitri refractiones metitur) illam quoque, quæ eſt inter lineas A 5, & A 6, ſimilésve, quibus in Ovalis hujus deſcriptione uſi ſumus, deſignet: ipſi G C attribuit $b - \frac{ez}{d}$, invenitur-que lineam A P eſſe $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$. ut ſupra eſt oſtenſum.

Porrò ex puncto P deductâ ſuper rectam F C perpendiculari P Q, nec non P N perpendiculari ſuper G C, conſiderandum eſt, num P Q ſit ad P N, ſicut d ad e, hoc eſt, ut lineæ, quæ vitri convexi A C refractiones metiuntur: hoc enim ſi fiat, radius, qui à puncto F venit ad punctum C, ita ſe ibidem incurvare debebit, intrando hocce vitrum, ut inde versùs G tendat. Quemadmodum ex iis, quæ in Dioptrica tradidi, manifeſtiſſimum eſt. Atque eapropter per calculum exploremus, num verum ſit, P Q eſſe ad P N, ſicut d ad e. Vt ſequitur.

Triangula rectangula P Q F & C M F ſimilia ſunt, unde liquet, C F eſſe ad C M, ut F P ad P Q; ac proin-

de F P multiplicatam per C M atque diviſam per C F, eſſe æqualem ipſi P Q. Eodem modo, triangula rectangula P N G & C M G ſimilia ſunt; unde ſequitur, G P multiplicatam per C M & diviſam per C G, eſſe æqualem ipſi P N. Deinde, quia multiplicationes vel diviſiones duarum quantitatum per eandem, ratio-

nem,

nem quæ inter ipsas est, non mutant: si F P multiplicata per C M, & divisa per C F, est ad G P, etiam multiplicatam per C M, & divisam per C G, sicut d ad e: dividendo utramque summam per C M, & deinde multiplicando utramque per C F, ac denuo per C G: relinquitur, F P multiplicatam per C G, in eadem ratione esse ad G P multiplicatam per C F, ut est d ad e. At verò per constructionem F P est $c \frac{+bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, sive F P $\propto \frac{bcdd + ccdd + bddz + cddz}{bde + cdd + ddz - eez}$, & C G est $b - \frac{ez}{d}$. Vnde si multiplicemus F P per C G, proveniet

$$\frac{bbcdd + bccdd + bbddz + bcddz - bcdez - ccdez - bdezz - cdezz}{bde + cdd + ddz - eez}.$$

Similiter G P est $b \frac{-bcdd + bcde - bddz - ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, sive G P $\propto \frac{bbde + bcde - beez - ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, & C F est $c + z$. Ideo si multiplicemus G P per C F, exurget

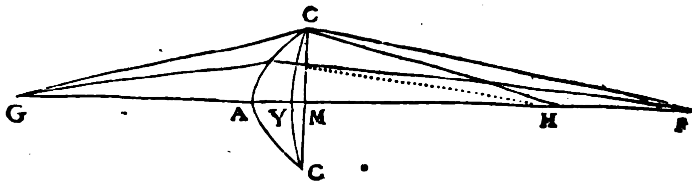
$$\frac{bbcde + bccde - bceez - cceez + bbdez + bcdez - beezz - ceezz}{bde + cdd + ddz - eez}.$$

Et quia prima harum summarum divisa per d, eadem est quæ, secunda divisa per e: manifestum est, quòd F P *multiplicata* per C G sit ad G P, multiplicatam per C F, hoc est, quòd P Q sit ad P N, sicut d ad e. Quod demonstrandum erat.

Vbi sciendum, demonstrationem hanc se extendere ad omne illud, quod de aliis refractionibus aut reflexionibus, quæ in expositis Ovalibus fiunt, dictum est. Præterquam quòd aliud nihil quàm signa + & — in calculo sit mutandum. Quæ ideo unusquisque proprio marte examinare poterit, ita ut huic rei diutiùs immorari non sit opùs.

Sed oportet, ut nunc id præstem, quod in Dioptrica omisi, cùm ibi ostensum est, plurium diversarum figurarum vitra haberi posse, quæ singula faciunt, ut radii,

dii, ab eodem objecti puncto venientes, coëant rursus omnes in aliud punctum, postquam per illa transiêrunt; & quòd horum vitrorum illa, quæ ab una parte admodum convexa sunt, & concava ab altera, majorem efficaciam ad comburendum habeant, quàm illa, quæ ab utraque parte æqualiter sunt convexa; cum hæc posteriora contra pro perspicillis sint meliora: Contentus enim ibi fui explicare tantùm illa, quæ ad praxin existimavi fore optima, habendo præcipuè rationem difficultatis, quæ artificibus in iis expoliendis occurrere possit. Adeoque nequid, quod ad ejus scientiæ Theoriam spectat, desiderari queat, explicanda hìc mihi superest vitrorum figura, quæ unam ex superficiebus suis tam convexam aut concavam habeant, quàm quis voluerit, & nihilominus efficiant, ut radii omnes, qui ab uno puncto effunduntur, aut paralleli sunt, colligantur rursus in alio puncto: Quemadmodum etiam figura vitrorum, quæ idem præstant, & æqualiter ab utraque parte sunt convexa; aut in quibus convexitas unius superficiei datam habet rationem ad convexitatem alterius.



Quomodo vitrum fieri possit, cujus una superficies tam convexa aut conca-

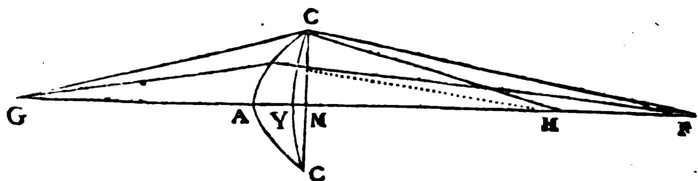
Ponamus igitur pro primo casu, quòd, cùm dantur puncta G, Y, C, & F, radii omnes, qui ex puncto G veniunt, aut ipsi G A sunt paralleli, colligi debeant in puncto F, postquam vitrum transierint, ita concavum, ut, Y in medio ejus superficiei interioris existente, extremitas

mitas sit in puncto C; ita ut chorda C M C, & sagitta Y M, arcus C Y C datæ sint. Quæstio eò recidit, ut primò considerandum sit, cujusnam ex Ovalibus jam explicatis superficies vitri Y C figuram requirat, ad faciendum, ut radii omnes, qui intra illud existentes versùs idem punctum, ut H, quod nondum est cognitum, tendunt, egrediendo se versùs aliud punctum recipiant, ut F. Quippe nullus effectus est, rationem, quâ hi radii reflexione aut refractione detorquentur, concernens, qui per aliquam harum Ovalium produci non possit. Atque facilè cognoscitur, hunc produci posse per tertiæ Ovalis partem, paulò ante vocatam 3 A 3; aut etiam per ejusdem partem, nominatam 3 Y 3; aut denique per secundæ partem, appellatam 2 X 2. Et quia hæ tres sub eundem hìc calculum cadunt, pro una pariter atque pro altera punctum Y sumendum erit pro ipsarum vertice; C autem pro uno ex punctis, quæ in ipsarum sunt circumferentia; & F pro uno ex focis; post quæ tantùm punctum H quærendum restat, quod alter focus esse debet. Illud autem invenitur, considerando, quòd differentia, quæ est inter lineas F Y & F C, se habere debeat ad differentiam, quæ est inter lineas H Y & H C, sicut *d* est ad *e*, hoc est, ut major linearum, quæ vitri propositi refractiones metiuntur, ad minorem. Quemadmodum ex harum Ovalium descriptione perspicere licet. Et quoniam lineæ F Y & F C datæ sunt, datur quoque ipsarum differentia, & per consequens etiam illa, quæ est inter lineas H Y & H C: quandoquidem ratio, quæ inter duas hasce differentias consistit, data est. Ampliùs, quia Y M est data, datur quoque differentia, quæ est inter M H & H C; ac tandem, quia C M est data, superest tantùm inveniendum M H, latus trianguli rectanguli C M H, cujus latus

va sit, quàm libueris, quod radios omnes, qui ex uno dato puncto procedunt, colligat rursus in altero dato puncto.

tus C M datum est, quemadmodum etiam differentia, quæ est inter C H basin, & M H latus quæsitum. Vnde illud facilè inveniri potest. Si enim sumatur k pro excessu, quo C H excedit M H, & n pro longitudine lineæ C M, habebitur $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$ pro M H.

Postquam igitur sic inventum est punctum H, si illud longiùs reperiatur dissitum à puncto Y, quàm inde distat punctum F, linea C Y debet esse prima pars Ova-



lis tertii generis, quæ ante nominata fuit 3 A 3: sed si H Y minor est quàm F Y, aut in tantum H F superat, ut differentia ipsarum, ratione totius F Y, major sit, quàm est e, minor linearum, quæ refractiones metiuntur, comparata cum d majore, hoc est, ut faciendo H F ∞ c, & H Y ∞ $c + h$, dh sit major quàm $2ce + eh$, & tunc C Y debet esse secunda pars ejusdem tertiæ Ovalis, quæ paulò antè vocata fuit 3 Y 3; sed erit secunda pars Ovalis secundi generis, quæ supra nominata fuit 2 X 2, si dh æqualis vel minor est quàm $2ce + eh$. Et denique si punctum H illud ipsum est, quod punctum F, quod quidem non contingit, nisi cùm F Y & F C sunt æquales, tum dicta linea Y C erit Circulus.

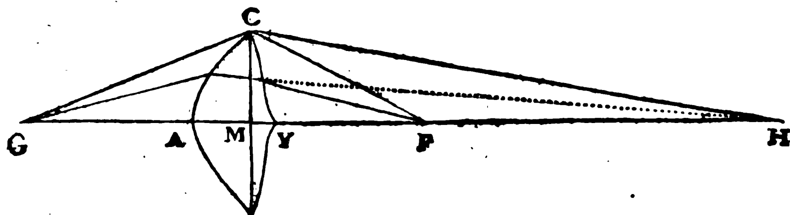
Post hæc quærenda est C A C altera hujus vitri superficies, quæ debet esse Ellipsis, cujus focus H, si radii incidentes paralleli supponantur. Quo etiam casu facile est illam invenire. Sed si supponantur à puncto G veni-

G venire, tum quidem superficies illa debet esse prima pars Ovalis primi generis, cujus bini foci sint G & H, quæque transeat per punctum C. unde porro invenitur punctum A, vertex ipsius Ovalis; considerando scilicet, quòd G C excedere debeat G A, quantitate aliquâ, quæ sit ad illam, quâ H A superat H C, sicut *d* ad *e*. Etenim, sumptâ *k* pro differentia, quæ est inter C H & H M; si pro A M supponatur *x*, habebitur $x - k$, pro differentia, quæ est inter A H & C H. Deinde si sumatur *g* pro differentia, quæ est inter G C & G M, quæ datæ sunt, habebitur $g + x$ pro illa, quæ est inter G C & G A. Et quandoquidem hæc ultima $g + x$ est ad alteram $x - k$, sicut *d* ad *e*, habebitur $ge + ex \infty dx - dk$, hoc est, $\frac{ge + dk}{d - e}$, pro linea *x* vel A M, per quam determinatur punctum A, quod quærebatur.

Quomodo aliud fieri possit, quod idem præstet, cujusque convexitas unius superficiei datam rationem habeat ad convexitatem vel concavitatem alterius.

Ponamus jam pro casu altero, quòd tantùm dentur puncta G, C, & F, ut & ratio, quæ est inter lineas A M & M Y, & quòd invenienda sit figura vitri A C Y, quæ faciat ut radii omnes, à puncto G venientes, coëant rursus in punctum F.

Hic autem rursus duabus Ovalibus uti possumus, quarum una A C pro focis habeat puncta G & H, altera



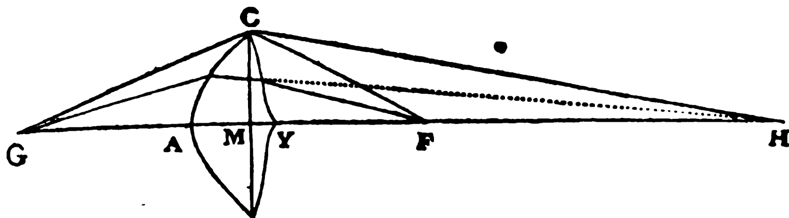
autem C Y puncta F & H. Qui igitur ut inveniantur, supponendo primùm punctum H, quod utrique est

com-

commune, esse cognitum, quæro A M per tria puncta G, C, & H, ratione modò explicatâ; nimirum sumendo k pro differentia, quæ est inter C H & H M, & g pro eâ, quæ est inter G C & G M. Vnde cùm A C est prima pars Ovalis primi generis, invenio $\frac{ge+dk}{d-e}$ pro A M. Deinde quæro etiam M Y per tria puncta F, C, & H, ita ut C Y sit prima pars Ovalis tertii generis; sumendóque y pro M Y, & f pro differentia, quæ est inter C F & F M, habebo $f+y$ pro ea, quæ est inter C F & F Y: hinc cum habeam k pro illa, quæ est inter C H & H M, habebo $k+y$ pro ea, quæ est inter C H & H Y, quam scio esse debere ad $f+y$, sicut e ad d, propter Ovalem tertii generis. unde invenio y seu M Y esse $\frac{fe-dk}{d-e}$; ita ut addendo simul quantitates inventas pro A M & M Y, habeam $\frac{ge+fe}{d-e}$ pro tota A Y. E quibus manifestum fit, quòd, ad quamcunque partem punctum H suppositum fuerit, dicta linea A Y semper composita sit ex quantitate aliqua, quæ sit ad differentiam, quâ G C & C F simul sumptæ superant G F, ut est e minor duarum linearum, quæ dimetiendis refractionibus vitri propositi inserviunt, ad $d-e$, differentiam, quâ major minorem excedit. Quod quidem satis scitum est Theorema.

Postquam igitur sic inventa est tota linea A Y, secanda est ipsa juxta rationem, quam inter se servare debent ejus partes A M & M Y; quibus mediantibus, (quia jam habetur punctum M) invenientur quoque puncta A & Y; & per consequens punctum H, per Problema præcedens. Verùm considerandum est priùs, num linea A M sic inventa, sit major quàm $\frac{ge}{d-e}$, an minor, an verò ipsi æqualis. Nam si major fuerit, cogno-

scitur



ſcitur inde, quòd curva A C eſſe debeat prima pars Ovalis primi generis, & C Y prima tertiæ, quemadmodum hìc ſuppoſitæ fuêre: cum aliàs, ſi minor fuerit, id indicet, quòd C Y debeat eſſe prima pars Ovalis primi generis, & A C prima pars tertiæ. Et denique ſi A M æqualis fuerit ipſi $\frac{ge}{d-e}$, quòd duæ hæ curvæ A C & C Y debeant eſſe duæ Hyperbolæ.

Poſſent extendi hæc duo Problemata ad infinitos alios caſus, quibus quidem deducendis ſuperſedeo, quòd nullum eorum uſum in Dioptricis deprehenderim.

Poſſem quoque ulteriùs progredi, & dicere, cùm una ex vitri ſuperficiebus data eſt, modò illa ſit aut plana, aut à ſectionibus Conicis, aut Circulo effecta, quomodo altera ejus ſuperficies confici debeat, ut radios omnes ab uno dato puncto venientes tranſmittat ad aliud punctum etiam datum. Neque enim hoc ullo modo difficilius eſt, quàm quod modò explicavi; immo verò res multò facilior eſt, quoniam via illuc perveniendi jam aperta eſt. Verùm malo alios id quærere, ut, ſi inter inveſtigandum negotii adhuc aliquid repererint, eò pluris inventionem rerum hìc demonſtratarum æſtiment.

Cæterùm in toto hoc libro locutus ſum tantùm de lineis *Quomodo id omne,*

quod hic de lineis curvis, in plana superficie descriptis, dictum fuit, applicari possit ad illas, quæ describuntur in spatio trium dimensionum sive superficie aliqua curva.

lineis curvis, quæ in superficie aliqua plana describi possunt; verùm facile est, quæ de iis dixi, etiam ad omnes alias referre, quas imaginari possumus formatas esse, motu aliquo ordinato punctorum alicujus corporis in spatio trium dimensionum. Nimirum demittendo duas perpendiculares à quolibet puncto lineæ curvæ, quam considerare volumus, ad duo plana, ad angulos rectos se invicem secantia, unam ad unum, & alteram ad alterum: quippe perpendicularium harum extremitates singulæ duas alias curvas lineas describunt, unam in uno, & alteram in altero plano, quarum puncta omnia modo superiùs explicato determinari ac referri possunt ad puncta lineæ rectæ, quæ utrique plano est communis, ut hâc ratione puncta curvæ, tres dimensiones habentis, omnino sint determinata. Ita etiam si rectam lineam ducere velimus, quæ hanc curvam in dato puncto ad angulos rectos secet, opùs tantùm est duas alias rectas lineas ducere, unam in uno, & alteram in altero plano, quarum singulæ singulas curvas ibidem secent in punctis, ubi cadunt perpendiculares, quæ à dato puncto ad utrumque planum sunt deductæ. Etenim postquam duo alia plana, unum super unam, & alterum super alteram, erecta sunt, quæ ad utrumque planum, in quibus lineæ illæ sunt, recta existant, erit horum duorum planorum communis intersectio linea recta quæsita. Atque ita arbitror me omnia tradidisse Elementa, quæ ad curvarum linearum cognitionem sunt necessaria.

GEO-

GEOMETRIÆ
LIBER TERTIUS.

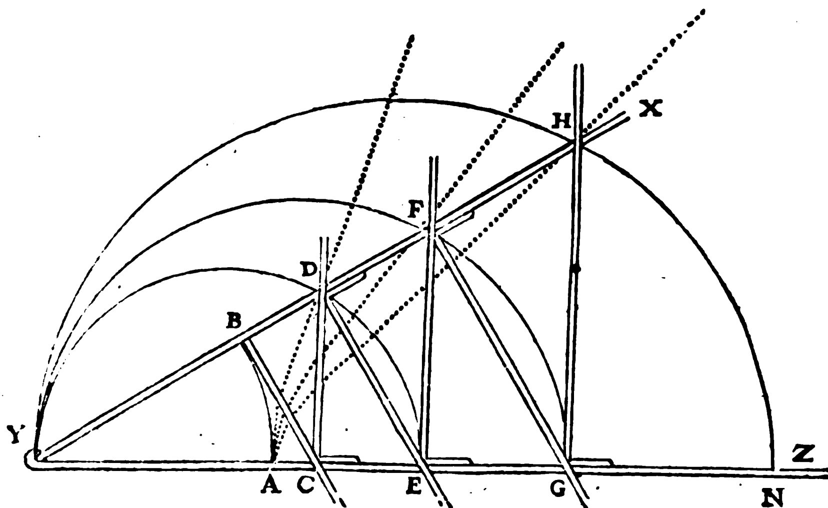
De Constructione Problematum Solidorum, & Solida excedentium.

Quanam curva linea adhiberi possint ad constructionem cujusque Problematis.

Tametsi omnes lineæ curvæ, quæ motu aliquo ordinato describi possunt, in Geometriam sunt recipiendæ, non ideo tamen permissum est uti indifferenter quâlibet, quæ primùm occurrat, ad Problematis cujusque constructionem; sed cura semper adhibenda est, ut simplicissimam, cujus ope id ipsum solvi queat, eligamus. Vbi quidem observandum est, per simplicissimas non solùm intelligendas esse illas, quæ omnium facillimè describi possunt; neque quæ propositi Problematis constructionem vel demonstrationem faciliorem reddunt; sed præsertim, quæ simplicissimi sunt generis, quod ad quantitatem quæsitam determinandam inservire queat.

Exemplum concernens inventionem plurium mediarum proportionalium.

Quemadmodum, exempli caussâ, ad inveniendas tot medias proportionales, quot libuerit, non opinor modum ullum faciliorem dari, nec cujus demonstratio evidentior sit, quàm si curvæ lineæ adhibeantur, quæ per instrumentum X Y Z (supra explicatum) describuntur. Etenim si inter Y A & Y Z duas medias proportionales invenire libeat, oportet tantùm circulum describere, cujus diameter sit Y E, qui curvam A D secet in puncto D, eritque Y D una ex quæsitis mediis proportionalibus. Cujus rei demonstratio ex sola instrumenti hujus ad lineam Y D adplicatione perspicua est.



Nam ſicut Y A ſeu Y B, quæ ipſi eſt æqualis, ſe habet ad Y C; ſic Y C ſe habet ad Y D; & Y D ad Y E.

Eodem modo ad inveniendas 4 medias proportionales inter Y A & Y G; aut ad inveniendas 6 inter Y A & Y N, deſcribendus eſt tantùm circulus Y F G, qui ſecans curvam A F in puncto F determinat lineam rectam Y F, quæ una eſt ex quatuor quæſitis proportionalibus; aut circulus I H N, qui ſecans curvam A H in puncto H determinat ipſam Y H, quæ una eſt ex ſex quæſitis proportionalibus. Et ſic de cæteris.

Verùm quia linea curva A D ſecundi eſt generis, & duæ mediæ proportionales inveniri poſſunt per ſectiones Conicas, quæ ſunt primi generis; tum etiam, quoniam 4 & 6 mediæ proportionales inveniri queunt beneficio linearum, generum non adeò compoſitorum atque A F & A H: peccatum eſſet in Geometria, ſi illæ hìc adhiberentur. Quemadmodum etiam ex altera parte pro peccato reputandum eſſet, ſi quis inutiliter in

con-

construendo Problemate aliquo per genus linearum simplicius, quàm natura ejus permittit, desudaret.

De natura Æquationum.

Quocirca ut hìc adducere possim regulas quasdam, quibus utrumque peccatum evitetur, opùs est, ut in genere aliquid dicam de natura Æquationum; hoc est, de summis, quæ ex pluribus terminis sunt compositæ, partim cognitis, partim verò incognitis, quorum alii aliis sunt æquales, vel potiùs, qui omnes simul considerati nihilo sunt æquales. Quippe sæpe præstat illos hâc ratione considerare.

Quot haberi possint radices in qualibet Æquatione.

Sciendum itaque, quòd incognita quantitas in qualibet Æquatione, tot diversas radices seu diversos valores habere possit, quot ipsa habet dimensiones. Nam si, exempli gratiâ, x supponatur æqualis 2, seu $x - 2$ æqualis nihilo; & rursus $x \infty 3$, seu $x - 3 \infty 0$; & multiplicetur $x - 2 \infty 0$ per $x - 3 \infty 0$: habebitur $xx - 5x + 6 \infty 0$, seu $xx \infty 5x - 6$. quæ Æquatio est, in qua quantitas x valet 2, & præterea etiam 3. Quòd si rursus fiat $x \infty 4$, atque $x - 4 \infty 0$ multiplicetur per $xx - 5x + 6 \infty 0$, producetur $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$. quæ alia est Æquatio, in qua x habens tres dimensiones, tres quoque habet valores, qui sunt 2, 3, & 4.

A *Quænam sint falsæ radices.*

Verùm sæpe accidit, quòd quædam harum radicum sint falsæ, seu minores quàm nihil: ut, si supponatur x designare quoque defectum alicujus quantitatis, utputa 5, ita ut habeatur $x + 5 \infty 0$, quæ multiplicata per $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$, faciat $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, pro Æquatione, in qua quatuor sunt radices, nimirum tres veræ, quæ sunt 2, 3, & 4, atque una falsa, quæ est 5.

B *Quomodo diminui possit dimensionum numerus ali-*

Vnde liquidò constat, quòd Æquationis summa, quæ plures radices continet, dividi semper possit per binomium, quod compositum est ex quantitate incognita,

cujus Æquationis, quando cognoscitur aliqua ex ejus radicibus.

gnita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem sit, aut plus valore alicujus ex falsis. cujus divisionis ope dimensiones ejus in tantum diminuuntur.

C

Quâ ratione indagari queat, num data quantitas sit valor alicujus radicis.

Et vicissim si Æquationis summa dividi non possit per binomium, constans ex quantitate incognita + vel — certa alia quadam quantitate; indicio est, quantitatem hanc non esse valorem alicujus ex ejus radicibus. Quemadmodum hæc ultima $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, dividi quidem potest per $x - 2$, per $x - 3$, per $x - 4$, & per $x + 5$; sed nullo modo per $x +$ vel — quacunque alia quantitate. Id quod ostendit, ipsam non posse admittere alias radices præter hasce quatuor 2, 3, 4, & 5.

D

Quot haberi possint veræ radices in qualibet Æquatione.

Ex quibus etiam cognoscitur, quot veræ & quot falsæ radices in unaquaque Æquatione haberi possint. Nimirum, tot in ea veras haberi posse, quot variationes reperiuntur signorum + & —; & tot falsas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa +, vel duo signa —, quæ se invicem sequuntur. Vt in ultima, quia post $+ x^4$ habetur $- 4x^3$, quæ est una variatio signi + in —, & post $- 4x^3$ habetur $- 19xx$, quæ sunt duo signa similia; & post $- 19xx$ habetur $+ 106x$; & post $+ 106x$ habetur $- 120$, quæ sunt adhuc duæ aliæ variationes: cognoscitur quòd illa tres admittat veras radices, & unam falsam, propter duo signa — terminorum $4x^3$ & $19xx$, quæ se invicem sequuntur.

E

Quomodo faciendum sit, ut falsæ radices Æquationis evadant veræ, & veræ falsæ.

Porrò facile est efficere, ut in una eademque Æquatione radices omnes, quæ falsæ erant, evadant veræ; & ut eâdem operâ omnes illæ, quæ veræ erant, falsæ fiant. Nimirum mutando signa omnia + & —, quæ in 2do, 4to, 6to, aliisve locis reperiuntur, qui per numeros pares designantur; reliquis 1^mi^, 3^tii^, 5^ti^, similiumque locorum,

rum, qui per impares numeros designantur, non mutatis.

Vt si loco

$$+x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0,$$

scribatur

$$+x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0,$$

habebitur Æquatio, in quâ una tantùm est vera radix, quæ est 5; & tres falsæ, quæ sunt 2, 3, & 4.

Quòd si verò non cognito radicum alicujus Æquationis valore, ipsas augere vel diminuere velimus quantitate aliquâ cognitâ, oportet tantùm in locum incogniti termini substituere alium, qui eâdem hâc quantitate major sit vel minor, eumque ubique primi loco subrogare.

Quomodo augeri vel diminui possint Æquationis radices, ipsis non cognitis.

Vt si augere velimus 3^{nario} radicem hujus Æquationis $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$, sumenda est y loco x, & cogitandum, quantitatem hanc y majorem esse quàm x, excessu 3, ita ut $y - 3$ ipsi x sit æqualis; loco autem xx scribendum est quadratum ex $y - 3$, quod est $yy - 6y + 9$; & loco x^3 sumendus est ejus cubus, qui est $y^3 - 9yy + 27y - 27$; & denique loco x^4 ponendum est ejus quadrato-quadratum, quod est $y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$. Vnde si scribamus F summam præcedentem, substituendo ubique y pro x, invenietur

$$\begin{array}{rrrrr}
y^4 - 12y^3 & + 54yy & - 108y & + 81 \\
+ 4y^3 & - 36yy & + 108y & - 108 \\
& - 19yy & + 114y & - 171 \\
& & - 106y & + 318 \\
& & & - 120 \\
\hline
\end{array}$$

$y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y * \propto 0$, vel $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$. ubi vera radix, quæ erat 5, jam est 8, propter ternarium ipsi additum.

Sin

Sin verò contra ternario radicem ejuſdem Æquationis diminuere velimus, facienda eſt $y + 3 \propto x$, & $yy + 6y + 9 \propto xx$. Atque ita porrò. Ita ut loco

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$$

ſcribatur

$$\begin{array}{rrrrr} y^4 + 12y^3 & + 54yy & + 108y & + 81 \\ + 4y^3 & + 36yy & + 108y & + 108 \\ & - 19yy & - 114y & - 171 \\ & & - 106y & - 318 \\ & & & - 120 \\ \hline y^4 + 16y^3 & + 71yy & - 4y & - 420 \propto 0. \end{array}$$

Quòd, augendo veras radices, falſa diminuantur, & contra.

Vbi notandum eſt, dum veræ radices alicujus Æquationis augentur, falſas eâdem quantitate diminui; & contra, dum veræ diminuuntur, falſas augeri: Et quidem tum has tum illas prorſus evaneſcere, ſi quantitate ipſis æquali diminuantur; ſi verò quantitate ipſas ſuperante, tum ex veris falſas evadere, & ex falſis veras. Vt hîc, augendo ternario veram radicem, quæ erat 5, diminuitur ternario quælibet ex falſis; ita ut illa, quæ erat 4, non valeat plus quàm 1; & quæ erat 3, ſit cyphra ſeu 0; & quæ erat 2, facta ſit vera, ſitque 1 (cum $-2 + 3$ faciat $+1$.) Adeò ut in hac Æquatione $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$, non plures quàm tres ſint radices, inter quas duæ veræ exiſtunt, utpote 1 & 8; & una falſa, quæ etiam eſt 1: Et in hac altera $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0$, una tantùm vera, quæ eſt 2, (quia $+5 - 3$ facit $+2$;) & tres falſæ, quæ ſunt 5, 6, & 7.

Quâ ratione ſecundus terminus Æquationis tolli poſſit.

Iam verò beneficio modi hujus mutandi valorem radicum, ipſis non cognitis, duo fieri poſſunt, quæ in ſequentibus uſum aliquem habebunt. Vnum eſt, quòd ſemper ſecundus terminus Æquationis, quam examinamus, tolli poſſit: Nimirum, diminuendo veras radices,

dices, quantitate cognitâ secundi termini divisâ per numerum dimensionum primi, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo +, & alter signo −; aut augendo illas eâdem quantitate, si uterque eodem signo fuerit adfectus.

Vt ad tollendum secundum terminum ultimæ Æquationis

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0,$$

divisis 16 per 4, propter 4^{or} dimensiones termini y^4, proveniet rursus 4: hinc facio $z - 4 \propto y$, & scribo,

$$\begin{array}{rrrrr} z^4 - 16z^3 & + 96zz & - 256z & + 256 \\ + 16z^3 & - 192zz & + 768z & - 1024 \\ & + 71zz & - 568z & + 1136 \\ & & - 4z & + 16 \\ & & & - 420 \\ \hline z^4 \quad * & - 25zz & - 60z & - 36 \propto 0. \end{array}$$

ubi vera radix, quæ erat 2, est 6, cum ipsa quaternario sit aucta; & falsæ, quæ erant 5, 6, & 7, tantummodo sunt 1, 2, & 3, cum illæ quaternario singulæ sint diminutæ.

Eodem modo si tollere velimus secundum terminum Æquationis

$$x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix} +2aa \\ -cc \end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \propto 0:$$

quoniam divisis $2a$ per 4, quotiens fit $\frac{1}{2}a$, faciendum est $z + \frac{1}{2}a \propto x$, ac scribendum

$$\begin{array}{rrrrr} z^4 + 2az^3 & + \frac{3}{2}aazz & + \frac{1}{2}a^3z & + \frac{1}{16}a^4 \\ - 2az^3 & - 3aazz & - \frac{3}{2}a^3z & - \frac{1}{4}a^4 \\ & + 2aazz & + 2a^3z & + \frac{1}{2}a^4 \\ & - cczz & - accz & - \frac{1}{4}aacc \\ & & - 2a^3z & - a^4 \\ & & & + a^4 \\ \hline z^4 \quad * & + \frac{1}{2}aazz & - a^3z & + \frac{5}{16}a^4 \propto 0: \\ & - cc & - acc & - \frac{1}{4}aacc \end{array}$$

ubi postquam innotuit valor ipsius z, addendo ipsi $\frac{1}{2}a$, habebitur valor radicis x.

Quo pacto fiat ut falsæ radices Æquationis evadant veræ, nec tamen veræ fiant falsæ.

Alterum, quod hìc postea usum aliquem habebit, est, quòd, dum augetur valor verarum radicum, quantitate majore aliquâ ex falsis, radices omnes veræ semper fieri possint, ita ut non habeantur duo signa $+$, aut duo signa $-$, quæ se invicem sequantur; & insuper, ut quantitas cognita tertii termini quadrato semissis secundi major sit. Nam licèt id fiat, etiamsi falsæ radices incognitæ sint; tamen facile est de illarum magnitudine præterpropter judicare, atque quantitatem aliquam assumere, quæ ipsas in tantum vel plus superet, quantum ad effectum hunc requiritur.

H. Vt si habeatur

$$x^6 + n x^5 - 6nn x^4 + 36 n^3 x^3 - 216 n^4 x^2 + 1296 n^5 x - 7776 n^6 \infty 0:$$

faciendo $y - 6n \infty x$, invenietur

$$\left.\begin{matrix} y^6 - 36n \\ + n \end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix} + 540nn \\ - 30nn \\ - 6nn \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} - 4320n^3 \\ + 360n^3 \\ + 144n^3 \\ + 36n^3 \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} + 19440n^4 \\ - 2160n^4 \\ - 1296n^4 \\ - 648n^4 \\ - 216n^4 \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} - 46656n^5 \\ + 6480n^5 \\ + 5184n^5 \\ + 3888n^5 \\ + 2592n^5 \\ + 1296n^5 \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} + 46656n^6 \\ - 7776n^6 \\ - 7776n^6 \\ - 7776n^6 \\ - 7776n^6 \\ - 7776n^6 \end{matrix}$$

$$y^6 - 35n\, y^5 + 504nn\, y^4 - 3780n^3\, y^3 + 15120n^4\, yy - 27216n^5\, y * \infty 0.$$

Vbi manifestum est, quòd $504nn$ (quantitas cognita tertii termini) major sit quadrato à $\frac{35}{2}n$ (semisse quantitatis cognitæ secundi termini.) Neque ullus alius est casus, in quo quantitas, quâ veræ radices augentur, ad hoc efficiendum, ratione earum quæ datæ sunt, major requiritur.

Quoniam autem ultimus terminus hìc nullus reperitur, si id quidem non desideretur, augendus est adhuc aliquantillo valor radicum, quod sanè tam parum esse non potest, quin id ad effectum hunc sit satis.

Quomodo faciendum sit, ut loca omnia

Eodem modo si augere velimus dimensionum numerum alicujus Æquationis, & facere ut loca omnia termino-

minorum ejus sint repleta (ut si loco $x^5 **** - b \infty 0$, desideretur Æquatio, in quâ incognita quantitas sex dimensiones habeat, & in qua nullus terminus desit): oportet primùm pro $x^5 **** - b \infty 0$, scribere $x^6 **** - bx \infty 0$; deinde factâ $y - a \infty x$, habebitur

Æquationis sint completa.

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy - \begin{matrix}6a^5y\\ -b\end{matrix} + \begin{matrix}a^6\\ +ab\end{matrix} \infty 0.$$

Vbi liquet, quòd, quantula etiam supposita fuerit quantitas a, omnia tamen Æquationis loca non desinant esse repleta.

Præterea possunt quoque radices alicujus Æquationis, etiamsi sint incognitæ, multiplicari aut dividi per quantitatem aliquam cognitam, quam libuerit.

Quomodo multiplicari vel dividi possint Æquationis radices, ipsis incognitis.

Quod fit, supponendo, quantitatem incognitam, multiplicatam, aut divisam per quantitatem, quæ multiplicare aut dividere debet radices, esse æqualem alicui alteri. Deinde multiplicando aut dividendo quantitatem cognitam secundi termini per hanc ipsam, quæ multiplicare aut dividere debet radices; & per ipsius quadratum, quantitatem tertii; & per ipsius cubum, quantitatem quarti, atque ita porrò usque ad ultimum. Id quod inservire potest, ut ad integros & rationales numeros reducantur fracti, aut sæpe etiam surdi, qui in Æquationum terminis reperiuntur.

Quâ ratione fracti numeri alicujus Æquationis reducantur ad integros.

Vt si habeatur

$$x^3 - xx\sqrt{3} + \tfrac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} \infty 0,$$

& ipsius loco alia desideretur, cujus omnes termini per numeros rationales exprimantur, oportet supponere $y \infty x\sqrt{3}$, & multiplicare per $\sqrt{3}$ quantitatem cognitam secundi termini, quæ quoque est $\sqrt{3}$; & per ipsius quadratum, quod est 3, quantitatem tertii, quæ est $\tfrac{26}{27}$; & per ipsius cubum, qui est $3\sqrt{3}$, quantitatem ultimi, videlicet $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, id quod facit $y^3 - 3yy + \tfrac{26}{9}y - \tfrac{8}{9} \infty 0$.

Deinde si hujus loco adhuc alia requiratur, in qua quantitates omnes cognitæ solis integris numeris exprimantur; supponendo $z \infty 3y$, & multiplicando 3 per
1 3, $\frac{26}{9}$ per 9, & $\frac{8}{9}$ per 27, fiet Æquatio

$z^3 - 9zz + 26z - 24 \infty 0$. Vbi, cum radices sint 2, 3, & 4, sequitur alterius radices esse $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$; & prioris Æquationis $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Quo pacto quantitas cognita alicujus termini Æquationis æqualis fiat cuicunque alteri data.

Quæ operatio servire quoque potest ad faciendam quantitatem cognitam alicujus termini in Æquatione æqualem alicui alteri datæ. Vt si habeatur $x^3 * - bbx + c^3 \infty 0$, & ipsius loco alia sit invenienda Æquatio, in qua quantitas cognita tertii termini, nimirum ea, quæ hic est bb, sit $3aa$, non autem bb: sup-
K ponendum est $y \infty x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, deinde verò scribendum,

$$y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0.$$

Quòd radices, tam vera quam falsa, possint esse reales, vel imaginaria.

Cæterùm radices tam veræ quàm falsæ non semper sunt reales, sed aliquando tantùm imaginariæ: hoc est, semper quidem in qualibet Æquatione tot radices quot dixi, imaginari licet; verùm nulla interdum est quantitas, quæ illis, quas imaginamur, respondet. Quemadmodum, tametsi tres imaginari possimus in hac, $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$; tamen una tantùm est realis, nempe 2; & quod ad reliquas duas attinet, quamvis illæ augeantur, diminuantur, aut multiplicentur, sicut jam exposui; tamen non nisi imaginariæ fieri possunt.

Reductio Æquationum Cubicarum, cùm Problema est Planum.

Iam verò, postquam ad inveniendam constructionem alicujus Problematis pervenimus ad Æquationem, in quâ incognita quantitas tres habet dimensiones: Primùm si quantitates cognitæ, quæ in ea reperiuntur, numeros fractos continent, ipsi ad integros, beneficio multiplicationis, modò explicatæ, reducendi sunt; At si surdos continent, tum quantùm fieri potest, similiter

ad

ad rationales sunt reducendi, tam per eandem hanc multiplicationem, quàm per diversos alios modos, inventu satis faciles. Deinde examinando ordine quantitates omnes, quæ absque fractione ultimum terminum dividere possunt, videndum est, num aliqua ex ipsis, juncta cum quantitate incognita per signum + vel —, componere possit binomium, quod dividat totam summam; Id enim si contingat, Problema erit Planum, hoc est, construi poterit regulâ atque circino. Etenim L
aut quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsita; aut Æquatio, per ipsum divisa, ad duas dimensiones erit reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro sunt ostensa, inveniri queat.

Exempli gratiâ, si habeatur

$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \propto 0$: ultimus terminus, qui est 64, dividi potest absque fractione per 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64. Quare ordine examinando hanc Æquationem, num dividi possit per aliquod ex binomiis $yy - 1$ aut $yy + 1$, $yy - 2$ aut $yy + 2$, $yy - 4$ aut $yy + 4$, &c. invenitur dividi posse per $yy - 16$, hoc modo:

$$\begin{array}{cccccc}
+\,y^6 & -\,8y^4 & -\,124yy & -\,64 & \propto 0 \\
-\,1y^6 & -\,8y^4 & -\,4yy & -\,16 & \\
0 & -\,16y^4 & -\,128yy & & \\
 & 16 & 16 & & \\
\hline
+ & y^4 + & 8yy + & 4 & \propto 0
\end{array}$$

Incipio ab ultimo termino, & divido -64 per -16, quod facit $+4$, quæ repono in quotiente; deinde multiplico $+4$ per $+yy$, & fit $+4yy$, quare in summa dividenda repono $-4yy$. Quippe scribendum semper est signum + vel — planè contrarium illi, quod producitur per multiplicationem. Addendo autem $-124yy$ ad $-4yy$, invenio $-128yy$, quod rursus divido per

Modus dividendi Æquationem per binomium, quod illius continet radicem.

— 16, & provenit + 8 yy, reponendum in quotiente. Multiplicando verò hoc ipsum per yy, exsurgit — 8 y^4. addendum termino dividendo, qui etiam est — 8 y^4. quæ quidem simul conficiunt — 16 y^4, quod per — 16 divido, & fit + 1 y^4 pro quotiente, & — 1 y^6 addendum ipsi + 1 y^6, id quod facit o, monstratque divisionem esse ad finem perductam. Quòd si verò quantitas aliqua superfuisset, vel aliquis præcedentium terminorum absque fractione dividi non potuisset, manifestum fuisset, divisionem nullo modo fieri potuisse.

Similiter si habeatur $y^6 \begin{smallmatrix} +aa \\ -2cc \end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix} -a^4 \\ +c^4 \end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -acc^4 \end{smallmatrix} \infty\, 0.$

ultimus terminus absque fractione dividi potest per a, aa, $aa + cc$, $a^3 + acc$, & similes. Sed duas sufficit ex illis considerare, nempe aa, & $aa + cc$; aliæ enim, cum in quotiente plures paucioresve dimensiones exhibeant, quàm quidem in quantitate cognita penultimi termini

M reperiuntur, impedirent, ut divisio fieri posset. Vbi notandum, me ipsius y^6 dimensiones tantùm pro tribus dimensionibus habere, cum non reperiatur y^5, nec y^3, nec y in tota summa. Examinando igitur binomium $yy - aa - cc$, invenitur, divisionem per illud fieri posse, hoc modo:

$$+y^6 \begin{smallmatrix} +aa \\ -2cc \end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix} -a^4 \\ +c^4 \end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix} -a^6 \\ -2a^4cc \\ -aac^4 \\ \hline -aa-cc \end{smallmatrix} \infty\ 0,$$

$$\begin{array}{ccc} -y^6 & -2aa & -a^4 \\ — & +cc & -aacc \\ 0 & \overline{-aa-cc} & \overline{-aa-cc} \\ \hline \end{array}$$

$$+\ y^4 \begin{smallmatrix} +2aa \\ -cc \end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix} +a^4 \\ +aacc \end{smallmatrix} \infty\ 0.$$

Id quod monstrat radicem quæsitam esse $aa + cc$. Quemadmodum facilè per multiplicationem probari potest.

At

At verò si nullum inveniatur binomium, quod ita totam Æquationis propositæ summam dividere possit, certum est, Problema quod ab ea dependet, esse Solidum. Nec minus vitium est, constructionem ejus postea per rectas lineas & circulos tentare, quàm ad constructionem illorum, in quibus non nisi circulis est opùs, sectiones Conicas adhibere: siquidem quicquid ignorantiam aliquam testatur, peccatum dici meretur.

Quanam Problemata sint Solida, Æquatione existente Cubicâ.

Porrò si habeatur Æquatio, in quâ incognita quantitas quatuor habeat dimensiones: eodem modo, sublatis primùm surdis & fractis numeris; (si qui sunt) videndum est, num inveniri possit binomium, compositum ex incognita quantitate + vel — quantitate aliqua, quæ absque fractione ultimum terminum dividit, quod dividat totam summam. Hoc enim si inveniatur; vel quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsita; vel saltem post divisionem hanc relinquentur tantùm in Æquatione tres dimensiones, ita ut illa deinde rursus eodem modo sit examinanda. Quòd si verò tale binomium non inveniatur, oportebit augendo aut diminuendo valorem radicis, secundum summæ terminum tollere, modo paulò ante explicato: & deinde ipsam ad aliam reducere, quæ tres duntaxat dimensiones contineat. Id quod hoc modo fit:

Reductio Æquationum quatuor dimensionum, cùm Problema est Planum. Et quanam illa sint, quæ Solida sunt dicenda.

loco $+x^4 \; * \; .\, p\,xx \; .\, q\,x \; .\; .\, r \propto 0$,
scribendum est:

$$+y^6 \;.\; 2py^4 \; \substack{+pp \\ .4r}\; yy - qq \propto 0.$$

Reductio Æquationis Quadrato-quadratæ ad Cubicam.

Et quod ad signa + & — attinet, quæ omisi, si habeatur $+p$ in Æquatione præcedente, in hac ponendum est $+2p$; aut si habeatur $-p$, ponendum est $-2p$. & contra, si habeatur ibi $+r$, ponendum hìc est $+4r$; aut si habeatur ibi $-r$, ponendum hìc est $+4r$. & sive

illìc

illìc fuerit $+q$, sive $-q$, semper tamen hìc ponendum est $-qq$, & $+pp$. saltem si x^4 & y^6 signis $+$ notatæ supponantur. quippe contrarium fieri deberet, si supponeretur ibi signum $-$.

Exempli causâ, si habeatur $+x^4 * -4xx-8x+35 \infty 0$, scribendum ejus loco est $y^6-8y^4-124yy-64 \infty 0$. Cum enim quantitas, quam nominavi p, sit -4, ponendum est $-8y^4$ pro $2py^4$. & cum illa, quam vocavi r, sit 35, ponendum est $\begin{matrix}+16\\-140\end{matrix}yy$, hoc est, $-124yy$, loco $\begin{matrix}+pp\\-4r\end{matrix}yy$. Et denique cum q sit 8, ponendum est -64, pro $-qq$.

Eodem modo pro $+x^4 * -17xx-20x-6 \infty 0$, scribendum est $+y^6-34y^4+313yy-400 \infty 0$. Nam 34 est duplum ipsius 17, & 313 est hujus quadratum junctum quadruplo ipsius 6, & 400 est quadratum ipsius 20.

Similiter quoque loco

$$+z^4 * \begin{matrix}+\frac{1}{2}aa\\ -cc\end{matrix} zz \begin{matrix}-a^3\\ -acc\end{matrix} z \begin{matrix}+\frac{5}{16}a^4\\ -\frac{1}{4}aacc\end{matrix} \infty 0,$$

scribendum est

$$y^6 \begin{matrix}+aa\\ -2cc\end{matrix} y^4 \begin{matrix}-a^4\\ +c^4\end{matrix} yy \begin{matrix}-a^6\\ -2a^4cc\\ -aac^4\end{matrix} \infty 0.$$

quippe p est $+\frac{1}{2}aa-cc$, & pp est $\frac{1}{4}a^4-aacc+c^4$, & $4r$ est $-\frac{5}{4}a^4+aacc$, ac tandem $-qq$ est $-a^6-2a^4cc-aac^4$.

Postquam igitur Æquatio sic ad tres dimensiones est reducta, quærendus est valor ipsius yy, methodo jam explicatâ. Quòd si verò ita inveniri nequeat, non opùs erit ulteriùs progredi. Infallibiliter enim inde sequitur, Problema esse Solidum. Sin autem inveniatur, poterit ejus beneficio Æquatio præcedens in duas alias dividi, in quarum utrâque incognita quantitas duas tantùm dimensiones habeat, quarumque radices ab illius

lius radicibus non differant. Nimirum loco Æquationis

$$+ x^4 * . p xx . qx . r \propto 0,$$

scribendæ sunt hæ duæ aliæ

$$+ xx - yx + \tfrac{1}{2} yy . \tfrac{1}{2} p . \tfrac{q}{2y} \propto 0, \text{ \&}$$

$$+ xx + yx + \tfrac{1}{2} yy . \tfrac{1}{2} p . \tfrac{q}{2y} \propto 0.$$

Et quod attinet ad signa $+$ & $-$, quæ omisi, si in Æquatione præcedente habeatur $+p$, ponendum erit in utraque harum duarum $+\frac{1}{2}p$; & $-\frac{1}{2}p$, si in priore habeatur $-p$. Ponendum verò est $+\frac{q}{2y}$ in una, ubi habetur $-yx$; & $-\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur $+yx$, prout habetur $+q$ in prima. Et contra, si habetur ibi $-q$, ponendum est $-\frac{q}{2y}$ in illa, ubi habetur $-yx$; & $+\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur $+yx$. Vnde consequenter facile est omnes Æquationis propositæ radices cognoscere, atque hinc Problema, cujus solutionem continet, construere, adhibendo tantùm circulos & lineas rectas.

Exempli gratiâ, quia pro $x^4 * - 17xx - 20x - 6 \propto 0$ ponendo $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \propto 0$ invenitur yy esse 16: hinc loco Æquationis $+x^4 * - 17xx - 20x - 6 \propto 0$ scribendæ sunt hæ duæ $+xx - 4x - 3 \propto 0$ & $+xx + 4x + 2 \propto 0$. Nam y est 4, $\frac{1}{2}yy$ est 8, p est 17, & q est 20; ita ut $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ faciat -3, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ faciat $+2$. E quibus binis Æquationibus si extrahantur radices, invenientur eædem omnes, quæ eliciuntur ex ea, in qua habetur x^4. Nimirum una vera, quæ est $\sqrt{7} + 2$, & tres falsæ, quæ sunt $\sqrt{7} - 2$, $2 + \sqrt{2}$, & $2 - \sqrt{2}$.

Similiter cùm habetur $x^4 * - 4xx - 8x + 35 \propto 0$:

quoniam radix ex $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$ rursus est 16, hinc scribere oportet

$$xx - 4x + 5 \infty 0, \; \& \; xx + 4x + 7 \infty 0.$$

Hic enim $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ facit 5, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ facit 7. Et quandoquidem nulla in utraque harum Æquationum invenitur radix, sive vera, sive falsa, liquidò constat, quatuor radices Æquationis, ex qua deductæ sunt, imaginarias esse, & Problema, cujus gratiâ Æquatio inventa est, naturâ suâ esse Planum; sed nullâ ratione construi posse, cum datæ quantitates conjungi nequeant.

Sic etiam cùm habetur

$$z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix} zz \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix} z \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} \infty 0:$$

quia pro yy invenitur $aa + cc$, scribendum est

$$zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0, \; \&$$

$$zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0.$$

Nam y est $\sqrt{aa+cc}$, & $+\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$ est $\frac{3}{4}aa$, & $\frac{q}{2y}$ est $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. Unde cognoscitur, valorem ipsius z esse

$\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, vel

$\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

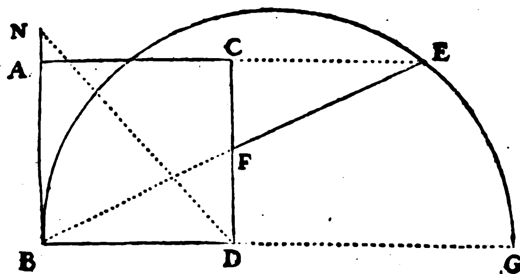
Et quandoquidem supra feceramus $z + \frac{1}{2}a \infty x$, innotescit, quantitatem x, ad quam cognoscendam omnes hasce operationes instituimus, esse

$$+\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Verùm enimverò ut utilitas hujus regulæ meliùs cognosci possit, operæ pretium est, ut illam Problemati alicui resolvendo applicemus.

Exemplum ostendens usum ha-

Datis quadrato A D, & rectâ lineâ B N; oporteat producere latus A C usque ad E, ita ut E F, ductâ ab E versùs



versùs B, sit æqualis ipsi N B. Docet Pappus, quòd, postquam primùm latus B D productum est usque in G, ita ut D G æquetur D N, circulusque descriptus est, cujus diameter B G, producendum deinde tantùm sit latus A C, donec circumferentiæ hujus circuli occurrat in puncto E, quod requirebatur. Quæ sanè constructio investigatu iis, quos lateret, difficilis satis foret: Etenim quærendo illam per methodum hìc propositam, nunquam certè cogitarent assumendam esse D G pro quantitate incognita, sed potiùs C F vel F D vel C E: cum hæ tales sint, quæ facillimè omnium nos ad Æquationem perducant; sed ad Æquationem quæ non ita facilè absque regula, quam jam exposui, explicari posset. Quippe ponendo a pro B D vel C D, c pro E F, & x pro D F, fit C F $\propto a-x$; Et ut C F seu $a-x$ est ad F E seu c, sic F D seu x est ad B F, quæ proinde erit $\frac{cx}{a-x}$. Deinde propter triangulum rectangulum B D F, cujus unum latus est x, & alterum a, quadrata ipsorum, utpote $xx+aa$, æqualia sunt quadrato basis, quod est $\frac{ccxx}{xx-2ax+aa}$. Vnde multiplicando totum per $xx-2ax+aa$, invenietur Æquatio $x^4-2ax^3+2aaxx-2a^3x+a^4 \propto ccxx$, vel $x^4-2ax^3 \begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix} xx-2a^3x+a^4 \propto 0$. rum reductionum.

Q Vbi per præcedentes regulas cognoſcitur, radicem ejus, quæ eſt longitudo lineæ D F, eſſe

$$\tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}.$$

Quòd ſi verò B F vel B E poneretur pro quantitate incognita, perveniremus rurſus ad Æquationem, in qua quatuor dimenſiones eſſent, ſed quæ faciliùs reduci poſ-
R ſet; & ad quam etiam ſatis facilè perveniretur. Cum aliàs, ſi pro ea ſupponeretur D G, multò difficiliùs ad Æquationem, ſed quæ ſimpliciſſima foret, perveniremus. Quod quidem hìc refero, ut vobis indicem, quòd, cùm Problema propoſitum non eſt Solidum, ſi quærendo illud unâ viâ ad Æquationem deveniatur valde compoſitam, tum communiter aliâ viâ ad ſimpliciorem Æquationem perveniri poſſit.

Poſſem præterea hìc diverſas regulas adjungere, reducendi Æquationes, quæ ad Cubum vel Quadrato-quadratum adſcendunt, verùm ſuperfluæ forent: quandoquidem conſtructionem eorum Problematum, quæ Plana ſunt; ſemper per haſce invenire licet.

Regula generalis reducendi Æquationes omnes, quæ Quadrato-quadratum excedunt.

Poſſem quoque alias afferre pro Æquationibus, quæ ad Surdeſolidum, vel Quadrato-cubum, aut altiùs aſſurgunt; ſed malo omnes ſub una comprehendere, dicendo in genere: quòd, poſtquam aliquis illas ad eandem formam, quam habent illæ, quæ æquè multis dimenſionibus conſtant, & ex multiplicatione duarum aliarum, pauciorum dimenſionum, producuntur, reducere conatus fuerit, atque modos omnes, quibus hæc multiplicatio fieri poſſit, enumeraverit, nec juxta aliquem ex ipſis ſuccedere compererit, aſſeverandum ſit, illas ad ſimpliciores reduci non poſſe. Ita ut, ſi incognita quantitas 3 vel 4 dimenſiones habeat, Problema, in cujus gratiam Æquatio quæritur, Solidum exiſtat; & ſi 5

vel

vel 6 dimensiones habeat, uno gradu magis sit compositum. Et sic de cæteris.

Cæterùm omisi hìc demonstrationes plurimorum, quæ dixi: quoniam ita faciles mihi visæ sunt, ut, si modò operam, methodicè examinandi, num erraverim, impenderitis, illæ suâ sponte vobis sint occursuræ. quin etiam utiliùs erit ipsas hâc ratione, quàm si legantur, addiscere.

Iam verò postquam compertum est Problema propositum esse Solidum; sive Æquatio, per quam illud quæritur, ad Quadrato-quadratum adscendat; sive non altiùs quàm ad Cubum assurgat: potest semper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum Sectionum, quæcunque illa tandem sit; aut etiam per ipsarum particulam aliquam, quantumlibet exiguam, nec utendo nisi rectis lineis & circulis. Verùm suffecerit regulam generalem hìc adducere, inveniendi radices omnes ope Parabolæ, quandoquidem hæc aliquo modo est simplicissima. S

Modus generalis construendi omnia Problemata Solida, reducta ad Æquationem trium, quatuorve dimensionum.

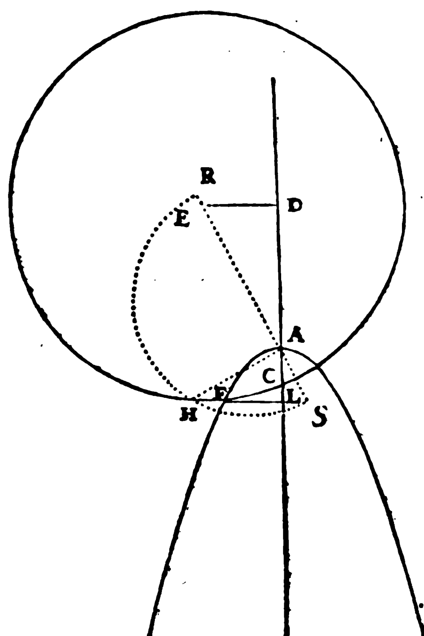
Primò igitur tollendus est secundus Æquationis propositæ terminus, modò jam non abfuerit, atque ita Æquatio reducenda ad hanc formam: $z^3 \infty * . apz . aaq$, si incognita quantitas tres tantùm dimensiones habeat; aut ad hanc: $z^4 \infty * . apzz . aaqz . a^3 r$, si quatuor obtineat dimensiones; Seu sumendo a pro unitate, ad hanc: $z^3 \infty * . pz . q$; aut ad hanc $z^4 \infty * . pzz . qz . r$. T

Deinde supponendo Parabolam F A G jam descriptam esse, & axem ejus esse A C D K L, latusque rectum a seu 1, cujus A C sit dimidium, & denique punctum C esse intra hanc Parabolam, cujus vertex sit A: Oportet facere C D $\infty \frac{1}{2}p$, eamque sumere in linea A C, continuata versùs C, si in Æquatione habeatur $+p$; sed versùs alteram partem, si habeatur $-p$. Porrò è pun- V

a
p
q
r

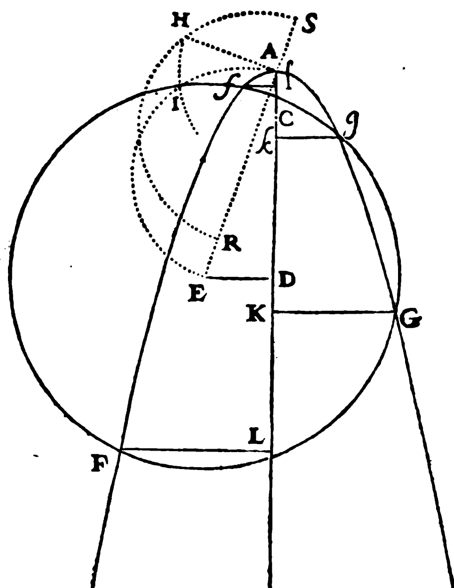
H S A C R E D M K G L F

cto D, aut ex puncto C, si non habeatur quantitas *p*, erigendo ad axem perpendicularem D E æqualem $\frac{1}{2}$ *q*, oportet ex centro E circulum describere F G, cujus semidiameter sit A E, si Æquatio tantùm Cubica fuerit, hoc est, si non habeatur quantitas *r*. Ast si habeatur *r*, & quidem signo + adfecta, oportet ulteriùs in hac linea A E, producta utrinque, ex una parte sumere A R ∞ *r*, & ex altera parte A S æqualem lateri recto Para-



Parabolæ, quod eſt 1, deſcriptóque circulo cujus diameter R S, erigere A H perpendicularem ad A E, quæ occurrat huic circulo R H S in puncto H, quod illud ipſum eſt, per quod alter circulus F H G tranſire debet. Quòd ſi verò habeatur — *r*, oportet inſuper in alio circulo, cujus diameter eſt A E, inſcribere A I, æqualem inventæ A H: inventumque erit punctum I, per quod primus circulus quæſitus F I G tranſire debet.

Vbi ſciendum, quòd circulus hic F G ſecare vel tangere poſſit Parabolam in 1, 2, 3, aut 4 punctis, à quibus ſi ad axem demittantur perpendiculares, habebuntur omnes



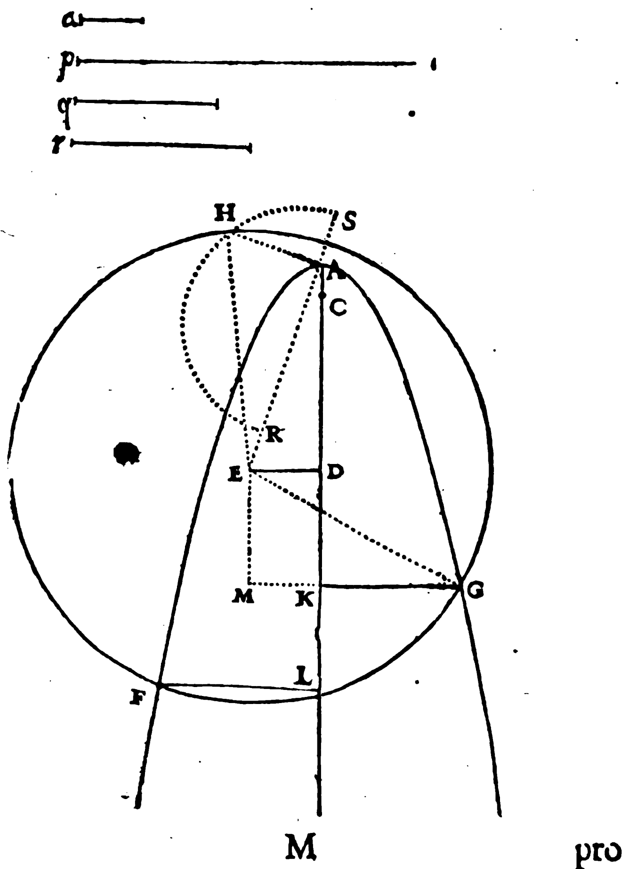
omnes Æquationis radices, tam veræ, quàm falsæ. Nimirum si quantitas q sit adfecta signo $+$, veræ radices erunt illæ harum perpendicularium, quæ ex eadem Parabolæ parte, qua est E circuli centrum, reperientur, ut FL; & reliquæ, ut GK, erunt falsæ. Sed contra, si hæc quantitas q notata fuerit signo $-$, veræ erunt illæ, quæ ex altera sunt parte; & falsæ, seu minores quàm nihil, quæ ex parte illa, ubi est centrum circuli E. Et denique si hic circulus non secat, nec tangit Parabolam in aliquo puncto, indicio est, Æquationem nullam admittere radicem sive veram, sive falsam, sed tantùm
V v imaginarias. Adeò ut hæc regula omnium, quas quis exoptare queat, generalissima sit & perfectissima.

Quorum quidem demonstratio admodum facilis est.

Etenim

Etenim si linea G K, per constructionem hanc inventa, vocetur z, A K erit zz, propter Parabolam, in qua G K debet esse media proportionalis inter A K & latus rectum, quod est 1. Deinde, si ab A K auferam A C, quæ est $\frac{1}{2}$, ut & C D, quæ est $\frac{1}{2}p$, relinquetur D K seu E M $zz - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, cujus quadratum est

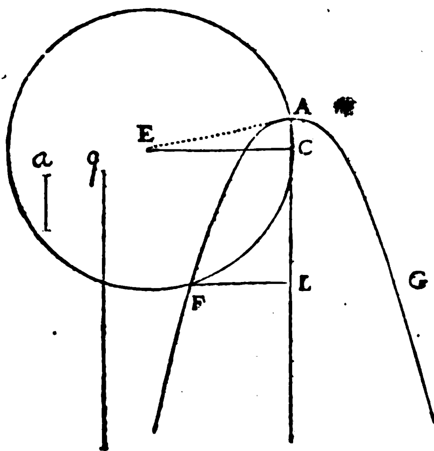
$z^4 - pzz - zz + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Et quia D E seu K M est $\frac{1}{2}q$, tota G M fit $z + \frac{1}{2}q$, cujus quadratum est $zz + qz + \frac{1}{4}qq$, additisque hisce duobus quadratis, habebitur $z^4 - pzz + qz + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$,



pro

pro quadrato lineæ G E, quippe quæ basis est trianguli rectanguli E M G.

Sed quia hæc eadem linea G E est semidiameter circuli F G, poterit ipsa aliis adhuc terminis explicari. Nimirum si E D fuerit $\frac{1}{2}q$, & A D $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}$, E A erit $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}}$, propter angulum rectum A D E. Deinde cum A H sit media proportionalis inter A S, quæ est 1, & A R, quæ est r, erit ipsa $\sqrt{r}$. Ac denique, propter angulum rectum E A H, quadratum ex H E seu E G est $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4} + r$: adeò ut habeatur Æquatio inter hanc summam & præcedentem. Eadem quippe quæ $z^4 \infty * + pzz - qz + r$. Vnde consequenter liquet, inventam lineam G K, quæ nominata fuit z, Æquationis hujus esse radicem. Quod erat demonstrandum. Et si calculum hunc ad omnes alios hujus regulæ casus applicueritis, mutando signa + & —, prout opus exiget, eodem modo ad quæsitum pervenietis; ita ut illis diutiùs immorari non sit opùs.



Si

Si itaque juxta hanc regulam inter lineas a & q duas libeat medias proportionales invenire, nemo ignorat, ponendo z pro una, esse ut a ad z, sic z ad $\frac{zz}{a}$, & $\frac{zz}{a}$ ad $\frac{z^3}{aa}$; ita ut habeatur Æquatio inter q & $\frac{z^3}{aa}$, utpote, $z^3 \infty * * aaq$.. Deinde descriptâ Parabolâ F A G, unà cum segmento sui axis A C, quod est $\frac{1}{2}$, semissis nempe lateris recti, erigenda est ex puncto C perpendicularis C E, æqualis $\frac{1}{2}q$, atque ex centro E per A describendus circulus A F, ut obtineantur F L & [redacted], duæ mediæ quæsitæ.

Inventio duarum mediarum proportionalium.

LA

Similiter si dividere velimus angulum N O P, sive arcum, portionémve circuli N Q T P in tres æquales partes; si sumatur N O ∞ 1 pro radio circuli, & N P ∞ q pro subtensa arcus dati, ac N Q ∞ z pro subtensa trientis hujus arcus, exsurget Æquatio $z^3 \infty * 3z - q$. Etenim ductis lineis N Q, O Q, & O T; si Q S parallela fiat ipsi T O, patet, quòd, sicut N O est ad N Q, sic N Q sit ad Q R, & Q R ad R S; adeò ut, cum N O sit 1, & N Q z, Q R futura sit zz, & R S z^3. Et quia tantùm R S seu z^3 impedit, quò minùs linea N P, quæ est q, tripla sit lineæ N Q, quæ est z, habebitur

$$q \infty 3z - z^3,\ \text{vel}\ z^3 \infty * 3z - q.$$

Ratio dividendi angulum in tres partes æquales.

Deinde descriptâ Parabolâ F A G, in qua C A sit æqualis semissi lateris recti principalis, si sumatur C D ∞ $\frac{3}{2}$, & perpendicularis D E ∞ $\frac{1}{2}q$: secabit circulus F A g G, centro E per A descriptus, hanc Parabolam in tribus punctis F, g, & G, non numerato puncto A, quod est ejus vertex. Id quod indicat in hac Æquatione tres haberi radices, nimirum duas G K & gk, quæ veræ sunt, & tertiam, nempe F L, quæ est falsa; Atque ex hisce duabus veris minorem gk illam esse, quam pro quæsita linea N Q sumere oportet. Altera enim G K, æqualis

est ipsi N V, subtensæ trientis arcus N V P, qui cum reliquo arcu N Q P totum circulum complet. Falsa autem F L æqualis est duabus hisce Q N & N V simul sumptis, quemadmodum ex calculo facile est videre.

Quòd omnia Solida Problemata reduci possint ad hasce duas constructiones.

Superfluum foret si insisterem hic aliis exemplis in medium afferendis, cum Problemata omnia, quæ non nisi Solida sunt, eò reduci possint, ut hâc regulâ ad constructionem ipsorum non aliter indigeamus, quàm quatenus inservit ad inveniendas duas medias proportionales, aut ad dividendum angulum in tres æquales partes. Quod cognoscetis, considerando, ipsorum difficultates semper Æquationibus, quæ ultra Quadrato-quadratum non adscendunt, comprehendi posse; Et omnes illas, quæ ad Quadrato-quadratum adscendunt, reduci posse ad Quadratum, ope quarundam aliarum, quæ tantùm ad Cubum adscendunt; Et tandem, harum secundum terminum tolli posse. Ita ut nulla earum sit, quam ad aliquam ex hisce tribus formis reducere non liceat.

z^3 ∞

$$z^3 \infty * - pz + q.$$
$$z^3 \infty * + pz + q.$$
$$z^3 \infty * + pz - q.$$

Si autem habeatur $z^3 \infty * - pz + q$, regula, cujus inventionem Cardanus cuidam, Scipioni Ferreo, tribuit, nos docet, radicem esse

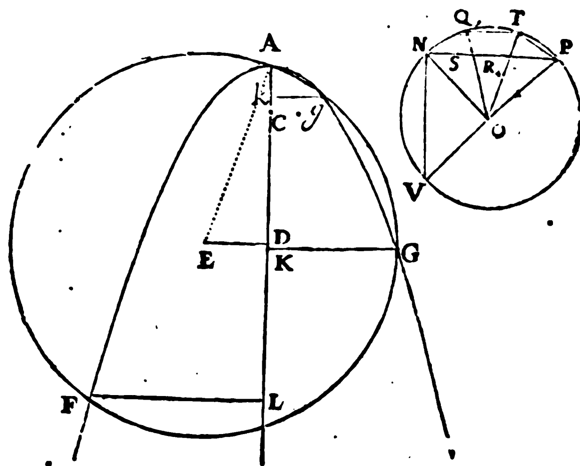
$$z \infty \sqrt{C.\, + \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.\, - \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Quemadmodum etiam, si habeatur $z^3 \infty * + pz + q$, & Quadratum semissis ultimi termini majus sit Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi; similis fermè regula nos docet, radicem esse

$$z \infty \sqrt{C.\, + \tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\, + \tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Vnde apparet, quòd Problemata omnia, quorum difficultates ad Æquationem unius ex hisce duabus formis reducuntur, construi semper possint, ut Conicas sectiones adhibere non sit opùs, nisi ad extrahendas radices Cubicas ex quibusdam quantitatibus datis, hoc est, ad inveniendas duas medias proportionales inter hasce quantitates & unitatem.

Deinde si habeatur $z^3 \infty * + pz + q$, & Quadratum semissis ultimi termini non sit majus Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi termini; supponendo Circulum N Q P V, cujus semidiameter N O sit $\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, hoc est, media proportionalis inter trientem quantitatis datæ p & unitatem; tum etiam supponendo lineam N P huic Circulo esse inscriptam, quæ sit $\frac{3q}{p}$, hoc est, quæ sit ad alteram quantitatem datam q, ut est unitas ad trientem ipsius p; dividendus tantùm est uterque arcus N Q P, N V P in tres æquales partes, eritque N Q, subtensa trientis unius arcus, unà cum N V, subtensâ trientis alterius, æqualis radici quæsitæ.



Denique si habeatur $z^3 \infty * + pz - q$, supponendo rursus Circulum NQPV, cujus radius NO sit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & in quo inscripta NP sit $\frac{3q}{p}$: erit NQ, subtendens trientem arcus NQP, una ex radicibus quæsitis: & NV, subtendens trientem arcus NVP, radix altera. Saltem si Quadratum semissis ultimi termini non excedat Cubum è triente quantitatis cognitæ penultimi termini. Etenim si majus esset, non posset linea NP huic Circulo inscribi, quippe quæ diametro ejus major foret. Id quod ostenderet, duas veras radices hujus Æquationis non nisi imaginarias esse, nec ullam realem extare præter falsam, quæ juxta Cardani regulam foret

$\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Modus exprimendi valorem radicum omnium. Cæterùm notandum est, modum hunc exprimendi valorem radicum per relationem, quam habent ad latera certorum Cuborum, quorum tantùm contentum cognoscitur, nequaquam magis intelligibilem, neque sim-

ſimpliciorem eſſe, quàm ſi exprimantur per relationem, quam habent ad ſubtenſas certorum arcuum, ſeu Circuli portionum, quarum triplum eſt datum. Ita ut Cubicarum Æquationum radices illæ omnes, quæ per Cardani regulas exprimi nequeunt, æquè clarè aut etiam clariùs per modum hìc propoſitum exprimi poſſint.

Æquationum Cubicarum: ac per conſequens illarum omnium, quæ Quadrato-quadratum non excedunt.

Si enim, exempli cauſsâ, radicem cognoſcere arbitremur hujus Æquationis $z^3 \infty * + pz + q$: quia ipſam compoſitam eſſe ſcimus ex duabus lineis; quarum una eſt latus Cubi, cujus contentum eſt ſumma, quæ conflatur ex $\frac{1}{2}q$, & ex latere Quadrati, cujus contentum eſt $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$; & altera latus alterius Cubi, cujus contentum eſt differentia, quæ eſt inter $\frac{1}{2}q$, & latus Quadrati, cujus contentum eſt $\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3$, (quod illud omne eſt, quod ex Cardani regula addiſcimus); Dubitandum non eſt, quin æquè diſtinctè aut etiam diſtinctiùs radix hujus $z^3 \infty * + pz - q$ cognoſcatur, ſi ea conſideretur inſcripta Circulo, cujus ſemidiameter ſit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in quo pro ſubtenſa arcus intelligatur, cujus tripli ſubtenſa ſit $\frac{3q}{p}$. Quin etiam hi termini prioribus illis multò minùs ſunt intricati, & qui etiam multò breviores reddentur, ſi peculiari aliquâ notâ ad exprimendas haſce ſubtenſas, quemadmodum fit notâ $\sqrt{C}$. ad exprimendum latus Cubicum, uti velimus.

Poſſunt quoque per regulas hìc ſupra explicatas deinceps exprimi radices Æquationum omnium, quæ ad Quadrato-quadratum adſcendunt; ita ut neſciam, quid in hac materia deſiderari ampliùs poſſit. Neque enim natura harum radicum permittit, ut terminis exprimantur ſimplicioribus, nec ut per conſtructionem aliquam, quæ unà & generalior & ſimplicior ſit, determinentur.

Verum

Cur Problemata Solida construi non possint absque sectionibus Conicis, nec quæ magis composita sunt sine aliis lineis, magis compositis.

Verum quidem est, me nondum dixisse, quibus rationibus nitar, quòd affirmare audeam, utrùm res aliqua fieri possit nec ne. At verò si consideretur, quomodo per methodum qua utor, id omne, quod sub Geometricam contemplationem cadit, ad unum idemque genus Problematum reducatur, quod est; ut quæratur valor radicum alicujus Æquationis; satis judicabitur, non difficile esse ita enumerare vias omnes, quibus inveniri possunt: ut hoc sufficiat ad ostendendum, generalissimam & simplicissimam fuisse selectam. Et speciatim, quod spectat ad Solida Problemata, quòd videlicet, ut dixi, citra lineam aliquam magis compositam quàm circularem construi non possint, vel inde evidens esse potest, quòd illa omnia ad duas constructiones reducantur; in quarum unâ duo simul puncta requiruntur, quæ inter duas datas lineas duas medias proportionales determinent; & in alterâ duo puncta, quæ datum arcum in tres æquales partes dividant. Etenim cum Circuli curvatura tantùm dependeat à simplici relatione omnium partium ad punctum unum, quod est ipsius centrum; inde fit, ut eo quoque non nisi ad unum solummodo punctum inter duas extremas determinandum uti possimus, utpute ad inveniendam unam mediam proportionalem inter duas datas, aut ad datum arcum in duas Æquales partes dividendum. At verò curvatura Conicarum Sectionum, quæ semper à duabus diversis rebus dependet, ad duo diversa puncta determinanda inservire potest.

Ob eandem rationem fieri nequit, ut aliquod eorum Problematum, quæ uno gradu magis quàm Solida sunt composita, & inventionem 4 mediarum proportionalium, aut anguli in 5 æquales partes divisionem, præsupponunt, ope alicujus Conicæ sectionis construi

ſtrui poſſit. Quare nihil melius hìc à me fieri poſſe confido, quàm ſi regulam generalem tradam conſtruendi illa ope lineæ curvæ, quæ deſcribitur per interſectionem Parabolæ & lineæ rectæ, quemadmodum ſupra fuit explicatum. Affirmare enim audeo, nullam, quæ huic effectui inſervire queat, ſimpliciorem in rerum natura inveniri. Atque etiam vidiſtis, quomodo hæc linea immediatè ſectiones Conicas ſequatur in quæſtione tantopere à Veteribus quæſitâ, cujus ſolutio ordine omnes curvas lineas, in Geometriam recipiendas, exhibet.

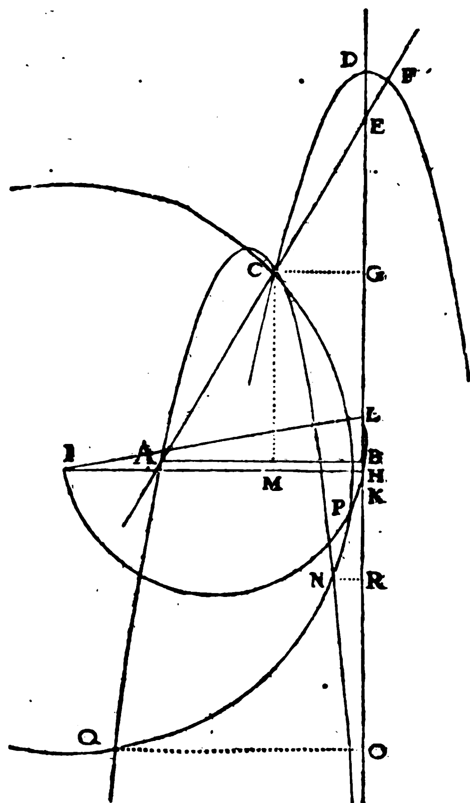
Modus generalis conſtruendi Problemata omnia, reducta ad Æquationem, ſex dimenſiones non excedentem.

Iam noſtis, cùm inveſtigantur quantitates, quæ ad conſtructionem horum Problematum requiruntur, quâ ratione ſemper ad Æquationem aliquam reduci poſſint, quæ non niſi ad Quadrato-cubum, aut Surdeſolidum adſcendat. Deinde etiam noſtis, quomodo, augendo valorem radicum hujus Æquationis, fieri ſemper poſſit, ut radices hæ omnes veræ evadant, ac ſimul ut quantitas cognita tertii termini excedat quadratum à ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini. Et denique, quo pacto, ſi tantùm ad Surdeſolidum adſcendat, ipſa ad Quadrato-cubum attolli poſſit, fieriquc ut nullus terminorum deſit.

Quocirca ut difficultates omnes, quæ quidem hìc occurrunt, per eandem regulam reſolvi queant, deſidero ut hæc omnia fiant, & hâc ratione reducantur ſemper ad Æquationem hujus formæ

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \infty 0,$$

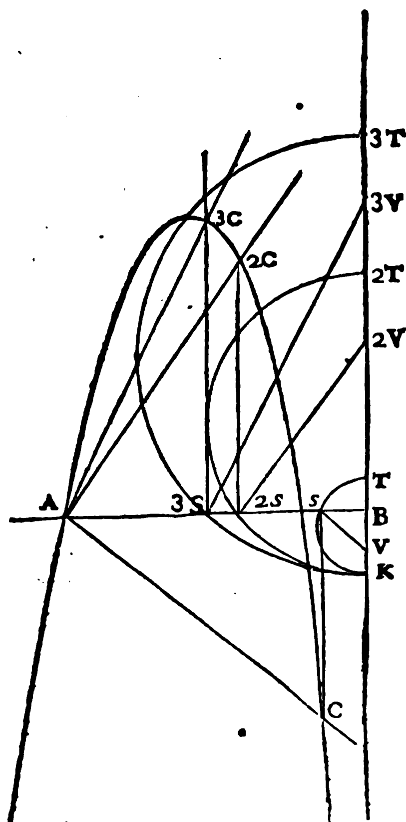
in qua quantitas vocata q, major ſit quadrato à ſemiſſe ejus, quæ nominatur p.



Post hæc ductâ lineâ rectâ B K, utrinque indefinitâ, erectâque ad eandem ex puncto B perpendiculari A B, cujus longitudo sit $\frac{1}{2}p$; describenda est in plano aliquo separato Parabola, ut C D F, cujus latus rectum principale sit $\sqrt{\frac{r}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$. quod brevitatis causâ vocabo n. Tum ponendo planum, in quo Parabola existit, supra planum in quo sunt lineæ A B & B K, ita ut axis ejus D E omnino congruat cum linea recta B K; sum-

ſumptoque ſegmento hujus axis, quod inter puncta E & D intercipitur, æquali $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, adplicanda eſt longa regula ad punctum E, ita ut, poſtquam ad punctum A plani inferioris quoque eſt adplicata, ſemper maneat adjuncta hiſce duobus punctis, interea dum Parabola ſecundùm lineam B K, ad quam ejus axis eſt adplicatus, vel elevatur vel deprimitur. quâ quidem ratione Parabolæ atque regulæ interſectio, quæ fit in puncto C, lineam curvam A C N deſignabit, illam quippe quâ ad propoſiti Problematis conſtructionem indigebimus. Etenim eâ ſic deſcriptâ, ſi fiat B L æqualis D E, hoc eſt, $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, ita ut punctum L cadat in lineam B K, versùs partem, quam reſpicit Parabolæ vertex, Tum verò in eadem linea à puncto L versùs B ſumatur L H æqualis $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, Et ex puncto H, ſic invento, ad partem curvæ A C N ducatur ad angulos rectos ipſi B K, linea H I, æqualis $\frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$, quam abbreviandi causâ nominabo $\frac{m}{nn}$, Ac, poſtquam conjuncta ſunt puncta L & I, circulo L P I, cujus diameter I L, inſcribatur linea L P, æqualis $\sqrt{\frac{s+p\sqrt{v}}{nn}}$, Tandemque ex centro I per punctum P, ſic inventum, circulus deſcribatur P C N: ſecabit hic circulus vel tanget lineam curvam A C N, in tot punctis, quot Æquatio admittet radices. Ita ut perpendiculares, quæ ex hiſce punctis ad lineam B K. deducentur, Æquationis hujus futuræ ſint radices, & nullam hæc regula patiatur exceptionem neque defectum. Etenim ſi quantitas ſ adeò magna eſſet reſpectu aliarum, p, q, r, t, & v, ut linea L P major inveniretur diametro circuli I L, ſic ut eidem inſcribi non poſſet, nulla itidem foret radix in Æquatione propoſita, quæ

non esset imaginaria; nec etiam ulla foret radix, si circulus IP adeò parvus esset, ut curvam ACN in nullo prorsus puncto secaret. Hanc autem curvam in 6 diversis punctis secare potest, ita ut hic sex diversæ radices in Æquatione haberi queant. Atque cùm illam in paucioribus secat, hoc indicio est, quasdam ex hisce radicibus inter se æquales esse, aut ipsarum aliquas esse tantùm imaginarias.



Quòd si verò ratio hæc describendi lineam ACN per

per motum Parabolæ vobis videatur incommoda, facile est plures alios modos in eundem finem excogitare. Vt, manentibus eisdem quantitatibus pro AB & BL, nec non eâdem pro BK, quæ pro latere recto principali Parabolæ supponebatur; describendus est tantùm semicirculus KST, centro ejus ad libitum in linea BK assumpto, ita tamen ut lineam AB alicubi secet, ut in puncto S. Nam postquam à puncto T, ubi terminatur, versùs K assumpta fuerit linea TV, æqualis BL, jungaturque SV, atque à puncto A junctæ SV parallela ducatur AC, quæ rectæ SC, ductæ per punctum S, ipsi BK parallelæ, occurrat in puncto C: Erit punctum C, ubi hæ duæ parallelæ sibi mutuò occurrunt, unum ex punctis per quod quæsita curva transire debet. Eodem modo inveniri possunt tot alia puncta, quot quis voluerit.

Quorum omnium demonstratio satis facilis est.

Si enim regula AE unà cum Parabola FD adplicetur ad punctum C, (eodem modo, quo constat eas ad punctum C in curva ACN mutuâ intersectione designandum esse adplicandas) & quidem CG vocetur y: erit GD $\frac{yy}{n}$, cum latus rectum, quod est n, sit ad CG sicut CG ad GD. Auferendo autem DE, quæ est $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$ à GD, relinquetur $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$, pro GE. Deinde quia AB est ad BE, ut CG ad GE: hinc cum AB sit $\frac{1}{2}p$, BE erit $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

Eâdem ratione si punctum curvæ C supponatur inventum esse per intersectionem linearum rectarum, SC, parallelæ ipsi BK, & AC, parallelæ ipsi SV; SB, quæ æquatur ipsi CG, est y: & cum BK æquetur lateri recto Parabolæ, quod nominavi n, BT erit $\frac{yy}{n}$. est enim ut KB ad BS, ita BS ad BT. Cumque TV eadem sit

quæ BL, hoc eſt, $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, BV erit $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Sicut autem SB eſt ad BV, ſic AB eſt ad BE, quæ ideo eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$. ut ante. Vnde apparet, unam eandemque lineam eſſe, quæ utroque hoc modo deſcribitur.

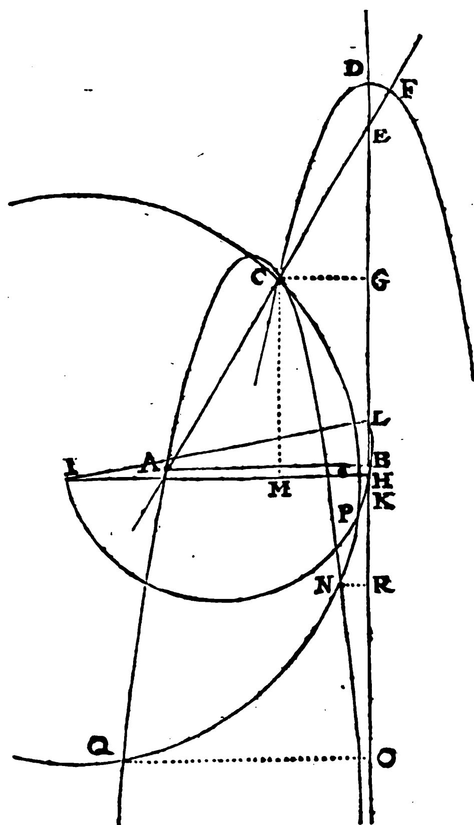
Porrò, quoniam BL & DE ſibi invicem æquales ſunt, æquales quoque inter ſe erunt DL & BE; ita ut, addendo LH, quæ eſt $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, ad DL, quæ eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, habeatur tota DH, nempe $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}}$, è qua auferendo GD, quæ eſt $\frac{yy}{n}$, relinquetur GH, videlicet $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{t}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$. Id quod ordine ſcribo, hoc pacto, GH ∞ $\frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}$,

Et fit quadratum ex GH,

$$\frac{y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v}{nnyy}.$$

Quocunque autem alio loco hujus curvæ imaginari libeat punctum C, utputa versùs N, vel versùs Q, ſemper tamen invenietur, quadratum lineæ rectæ, quæ inter punctum H, & punctum ubi perpendicularis deducta ex puncto C cadit ſuper BH, intercipitur, iiſdem hiſce terminis iiſdemque ſignis + & — exprimi poſſe.

Poſtea



Postea cum IH sit $\frac{m}{nn}$, & LH $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, IL erit $\sqrt{\frac{mm}{n^4}+\frac{tt}{2n\sqrt{v}}}$ (propter angulum rectum IHL); & cum LP sit $\sqrt{\frac{s}{nn}+\frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, IP vel IC erit $\sqrt{\frac{mm}{n^4}+\frac{tt}{4nnv}-\frac{s}{nn}-\frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, (propter angulum rectum IPL). Dein ductâ CM perpendiculari ad IH, erit IM differentia, quæ est inter IH & HM vel CG, hoc est

est, inter $\frac{m}{nn}$ & y; ita ut quadratum ejus semper sit $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$, quod à quadrato ex IC ablatum relinquit $\frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$, pro quadrato ex CM, quod est æquale quadrato ex GH, jam invento. Aut etiam faciendo ut hæc summa quemadmodum altera divisa sit per $nnyy$, obtinebitur

$$\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v},yy - syy + \frac{tt}{4v}yy}{nnyy}.$$ Cæterùm

restituendo $\frac{t}{\sqrt{v}}y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$ pro nny^4, & $ry^3 + 2\sqrt{v},y^3 + \frac{pt}{2\sqrt{v}}y^3$ pro $2my^3$, & multiplicando utramque summam per $nnyy$: exsurget

$$y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy - ty + v,$$

æquale

$$\left.\begin{matrix} -\frac{t}{\sqrt{v}} \\ -q \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +r \\ +2\sqrt{v} \\ +\frac{pt}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ -s \\ +\frac{tt}{4v} \end{matrix}\right\} yy.$$

Hoc est, habebitur

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \infty 0.$$

Vnde apparet, lineas CG, NR, QO, & similes esse hujus Æquationis radices. Quod erat demonstrandum.

Inventio quatuor mediarum proportionalium.

Hinc si invenire velimus 4^{or} medias proportionales inter lineas a & b; positâ x pro prima, prodibit Æquatio $x^5 \ast\ast\ast\ast - a^4b \infty 0$, vel $x^6 \ast\ast\ast\ast - a^4bx \ast \infty 0$. Factâque $y - a \infty x$, invenietur

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \left.\begin{matrix} -6a^5 \\ -a^4b \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} +a^6 \\ +a^5b \end{matrix} \infty 0$$

Vnde pro linea AB sumendum est $3a$, & $\sqrt{\frac{6a^3+aab}{\sqrt{aa+ab}} + 6aa}$ pro BK, vel latere recto Parabolæ,

læ, quod supra nominavi n, & $\frac{2a}{3n}\sqrt{aa+ab}$ pro DE, vel BL. Porrò descriptâ lineâ curvâ ACN secundùm mensuram harum trium linearum, facienda est LH $\infty \frac{6a^3+aab}{2n\sqrt{aa+ab}}$, & IH $\infty \frac{10a^3}{nn}+\frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab}+\frac{18a^4+3a^3b}{2nn\sqrt{aa+ab}}$, & LP $\infty \sqrt{\frac{15a^4+6a^3\sqrt{aa+ab}}{nn}}$. Etenim circulus, qui centrum suum habet in puncto I, transiturus per punctum sic inventum P, secabit curvam in duobus punctis C & N, à quibus si ad rectam BK demittantur perpendiculares NR & CG, & minor NR à majore CG auferatur; erit reliqua x, prima ex quatuor mediis proportionalibus quæsitis.

Eodem modo facile est datum angulum in quinque æquales partes dividere, & Circulo figuram inscribere 11 aut 13 æqualium laterum, atque infinita alia hujus regulæ exempla reperire.

Verùm notandum est in plurimis horum exemplorum, quòd Circulus hic ita obliquè hanc Parabolam secundi generis secare possit, ut intersectionis punctum cognitu sit difficile, atque adeò hæc constructio ad Praxin non sit idonea. Cui quidem rei facilè remedium afferri posset, componendo alias regulas ad imitationem hujus.

Sed institutum meum non est prolixum librum conscribere, sed potiùs multa paucis comprehendere: quod fortè judicabunt me fecisse, qui considerаturi sunt, quòd, reductis ad eandem constructionem Problematîs omnibus ejusdem generis, modum simul, quo ad infinitas alias diversas reduci, atque ita omnia infinitis modis resolvi possint, ostenderim. Præterea etiam, quòd constructis iis omnibus, quæ Plana sunt, intersectione Circuli & lineæ rectæ, Et iis omnibus, quæ Solida sunt,

intersectione Circuli & Parabolæ, Ac tandem iis omnibus, quæ uno gradu magis sunt composita, intersectione similiter Circuli & lineæ, uno gradu magis quàm Parabola compositæ, eandem tantùm viam in construendis reliquis omnibus, quæ magis magisque in infinitum sunt composita, sequi oporteat. Etenim cognitis, in materia Mathematicarum progressionum, duobus aut tribus prioribus terminis, reliquos invenire non est difficile. Adeò ut sperem à posteris mihi gratias habitum iri, non solùm pro iis, quæ hìc explicui; sed etiam pro iis, quæ consultò omisi, quò ipsis voluptatem illa inveniendi relinquerem.

FINIS.



FLO-

FLORIMONDI DE BEAUNE
IN
GEOMETRIAM
RENATI DES CARTES
NOTÆ BREVES.



Lgebra ſpecioſa, hoc eſt, quæ exercetur per ſpecies rerum, quæ literis Alphabeti, aliiſve ſimilibus deſignantur, eſt Scientia, inveſtigandis inveniendiſque Theorematîs & Problematîs inſerviens, ac res homogeneas, quarum rationes vel proportiones conſiderantur, concernens. Dicimus autem rationem inter ſe habere duas res, cùm homogeneæ ſeu ejuſdem naturæ exiſtentes, aut æquales ſunt, aut inæquales, & minor per ſui ipſius continuam additionem, tandem major evadit, majoremque ſuperans. Adeò ut hæc Scientia non ſolùm Algebram numeroſam atque Veterum Analyſin Geometricam comprehendat; ſed etiam omne id, quod relationem quandam habet aut proportionem, ut refert D. des Cartes, in ſua de Methodo diſſertatione.

Optimum verò eſt, ad ſtabilienda hujus Scientiæ præcepta & ad cognitionem ejus aſſequendam, ut generaliter rationes haſce in lineis conſideremus: cum ſimpliciſſimæ ſint, & hoc ſibi vendicent, quòd rationes omnes, quæ inter quaſcunque alias res conſiderari poſſunt, exprimant. Id quod numeri non efficiunt, qui relationes, quæ inter incommenſurabiles quantitates reperiuntur, exprimere nequeunt. Accedit, quòd iis ad omnes alias res, rationem vel proportionem quandam inter ſe habentes, uti poſſimus. Etenim licèt linea nullam cum ſuperficie, aut cum alicujus motus velocitate rationem habeat (atque ita de aliis alterius naturæ rebus;) poſſumus tamen rationem, quæ inter duas ſuperficies, aut inter duas differentes velocitates, & id genus alia, quæ inter ſe relationem aliquam habere ſtatuimus,

mus, reperitur, exprimere per duas lineas. Id tantùm cavendum est, ne permutata ratione utamur.

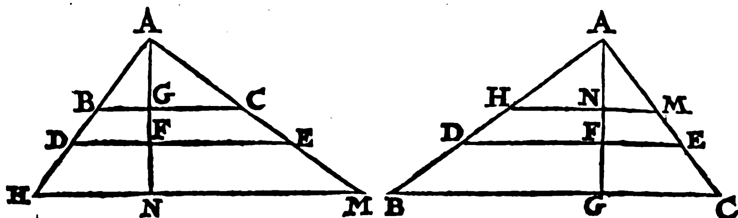
Operationes omnes, quæ in hac Scientia occurrunt, ad quinque reducuntur, quæ eædem ſunt, quæ Arithmeticæ vulgaris: nimirum, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, atque Radicum Extractio; hoc præterea commodi habentes, quòd illæ (ſicut notavimus) circa incommenſurabiles quantitates, non minùs quàm circa alias, verſentur. Vt, cùm proponuntur duæ lineæ incommenſurabiles, ſive longitudine, ſive longitudine & potentiâ, poſſunt ipſæ ſimul addi, una ab altera auferri, per ſe invicem multiplicari, una per alteram dividi, & ex utraque radix extrahi, perinde ac ſi longitudine eſſent commenſurabiles.

Neque verò docebimus, quo pacto hæ operationes per literas Alphabeticas, vel alias linearum aliarúmve rerum ſpecies, quas deſignant, ſint faciendæ: cum hoc ab aliis jam ſit pertractatum. Tum etiam quoniam hæc Geometria, quâ ratione Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, atque Radicum Extractio, tam in numeris, quàm in lineis inſtituendæ ſint, breviter exponit. Verùm obſervari volumus, quòd per haſce ſpecies, quas nominamus b, b^2, b^3, b^4, bd, b^2d, b^3d; primam videlicet b, numerum aut lineam ſimplicem; ſecundam b^2, quadratum ipſius b, ſeu b quadratum; tertiam b^3 ſeu b cubum; quartam b^4 ſeu b quadrato-quadratum, &c. non ullæ aliæ res, quàm lineæ omnino ſimplices concipiantur; niſi quæſtio fuerit de veris Quadratis, Cubis, Planis, & Solidis, aut, per haſce ſpecies alias res ſignificemus, ſimilem inter ſe relationem, quam lineæ ipſis deſignatæ, habentes. Attamen conſentaneum eſt, nomina uſitata retinere, quandoquidem lineæ, ſpeciebus hiſce deſignatæ, eandem inter ſe rationem, quam veræ ſuperficies, & vera ſolida, quæ per ipſas denotantur, ſervant. Et hoc quidem ad imitationem Arithmeticæ communis, ubi alios numeros appellamus Quadratos, alios Cubos, alios Planos, alios Solidos &c. quippe qui talem inter ſe relationem obſervant, quatenus ſunt numeri ſimplices, qualem inter ſe obtinent Quadrati, Cubi, &c. quos repræſentant.

Oportet itaque oſtendere, ſpatia & corpora, ſpeciebus hiſce deſignata, eandem inter ſe rationem habere, quam lineæ ſimplices, quas per ipſas concipimus. Exempli gratiâ, b^2 eandem ratio-

rationem habere ad bd, & ad d^2, quatenus ſpatia ſignificant, quàm quatenus lineas referunt. Sic etiam relationem ipſius b^3 ad $b^2 d$ & ad d^3, aliasque ſimiles, eandem inter hæc Solida exiſtere, quam ea, quæ eſt inter lineas, per has ſpecies deſignatas. Quod ipſum facile erit, ſi pro arbitrio lineam aliquam accipiamus, quam appellemus unitatem, & ad eam reliquas omnes referamus. Illa vocetur a, ſic ut hæ tres lineæ a, b, & b^2 proportionales exiſtant, juxta id quod de multiplicatione in hac Geometria dictum eſt. Idem de lineis a, d, & d^2 eſt intelligendum. Sic etiam linea a eſt ad lineam b, ſicut linea d eſt ad lineam bd; aut, ut linea a eſt ad lineam d, ita linea b eſt ad eandem lineam bd. Quod cum ita ſit, linea b erit ad lineam b^2, ſicut linea d ad lineam bd; cum eadem utrobique ſit ratio, nimirum eadem: quæ lineæ a ad lineam b. Vnde permutando erit, ut linea b ad lineam d, ita linea b^2 ad lineam bd. Eodem modo linea b erit ad lineam bd, ut linea d ad lineam d^2: cum utraque ratio eadem ſit, quæ lineæ a ad lineam d. quemadmodum eſt oſtenſum. Vnde permutando erit, ut linea b ad lineam d, ita linea bd ad lineam d^2. Patet itaque, b eſſe ad d, ſicut b^2 ad bd; itemque b eſſe ad d, ſicut bd ad d^2, & conſequenter, rationem lineæ b^2 ad lineam d^2 eſſe duplicatam lineæ b ad lineam d; lineamque bd eſſe mediam proportionalem inter lineas b^2 & d^2. Id quod unuſquiſque novit ab Euclide eſſe oſtenſum, nimirum: rationem, quam habet b^2 ad d^2, quatenus deſignant ſuperficies ſeu quadrata, duplicatam eſſe rationis, quam habet latus b ad latus d: itemque bd rectangulum eſſe medium proportionale inter hæc ipſa quadrata. ac per conſequens, hæc ſpatia eandem inter ſe relationem habere, quam lineæ iiſdem ſpeciebus deſignatæ. Idem oſtendi poteſt de Cubis vel Solidis, ad imitationem præcedentis demonſtrationis. Vnde haud parvum emolumentum colligere licet, cum complures rationes, quas Euclides aliique Geometræ, inter duas ſuperficies, atque inter duo corpora, reperiri, demonſtrarunt, nos pro lineis, aliiſve rebus, iiſdem ſpeciebus deſignatis, uſurpare poſſimus, prout eandem quam dicta ſpatia ſeu corpora inter ſe relationem habent.

Exhibeamus aliquod exemplum: Detur triangulum rectangulum ADE, cujus angulus DAE ſit rectus. Manifeſtum eſt ex elementis, quòd laterum quadrata ſimul ſumpta quadrato baſis



ſint æqualia: hoc eſt, ſi ponamus A D ∞ b, A E ∞ c, & D E ∞ d, quòd $b^2 + c^2$ æquetur d^2, quatenus deſignant vera quadrata. Quod quoque verum eſt, quatenus deſignant lineas, modò eandem inter ſe relationem obtineant, quam hæc ipſa quadrata; ut demonſtratum eſt à nobis, atque etiamnum in hoc exemplo palàm facere conabimur.

Aſſumatur pro lubitu linea aliqua major vel minor (perinde enim eſt) quàm D E, quæ quidem ſit unitas, & ad quam reliquæ omnes referantur: ipſa autem eſto B C, parallela exiſtens ipſi D E, ducaturque perpendicularis A F, ipſam, ſi opùs eſt, producendo. Deinde fiat, ut B C ad D E, ita D E ad H M, fietque H M ∞ d^2.

Iam verò, ſicut hæ lineæ B C, D E, H M ſunt continuè proportionales, ita quoque lineæ B C, A E, N M, nec non lineæ B C, D A, H N. Compoſita enim eſt ratio B C ad A E, ex ratione B C ad A C, & ex ratione A C ad A E. Eſt autem ratio A E ad N M compoſita ex iiſdem rationibus, nimirum ex ratione A E ad F E, quæ eadem eſt rationi B C ad A C (propter ſimilitudinem triangulorum rectangulorum A E F & B C A,) & ex ratione F E ad N M, hoc eſt, A E ad A M, quæ eadem eſt rationi A C ad A E (per conſtructionem.) Id quod eodem modo patet de B C, A D, H N. Erit igitur N M ∞ c^2, & H N ∞ b^2, quæ quidem ſimul ſumptæ æquantur ipſi H M, hoc eſt, d^2. Quod erat demonſtrandum.

Cernitur præterea illa in hac Methodo facilitas, quòd etiam lineam aliquam hoc modo $\frac{b}{d}$, aliiſve ſimilibus, exprimere poſſimus; aut quòd eo item modo fractionem aliquam Arithmeticæ communis, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c. denotare valeamus; hoc ſanè compendio, quòd literis fractio exprimi poſſit, cujus numerator ad denomi-

nominatorem non habeat rationem commensurabilem; sed quæ similis sit lineæ ad lineam, quarum una vicem gerat numeratoris, & altera vicem denominatoris ejusdem fractionis. Id quod non exiguæ est utilitatis, quemadmodum postea videbitur.

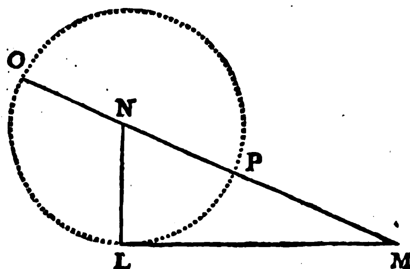
Iam autem explicandum est, cur æquè-multæ dimensiones singulis Æquationis terminis sint tribuendæ. Quod sanè per se liquet, quando sub hisce terminis superficies aut corpora intelliguntur: cum nulla ratio inter duas quantitates heterogeneas consistat, spatiaque illa aut corpora eodem semper linearum atque dimensionum numero designentur.

Verùm expedit ut idem faciamus, quando per hosce terminos non nisi lineæ designantur, ut Methodus eò universalior atque etiam commodior reddatur: Quandoquidem id præstare tenemur, cùm linea, quæ pro unitate sumenda est, indeterminata existit, seu, cùm requiritur, ut liberum sit assumere pro unitate lineam qualem volumus. Id quod facilè concipi potest, quoniam sumendo lineam aliquam, ut a, pro unitate, lineæ, verbi gratiâ, b^2 & d^2, denominationes hasce accipiunt, prout referuntur ad lineam a. At verò statuendo aliam quandam lineam pro unitate quàm a, licèt b & d eædem maneant, nihilominus tamen b^2 & d^2 à præcedentibus erunt diversæ. Ac proinde, si comparare velimus lineam b cum linea d^2: quoniam d^2 diversa est, prout ad diversas lineas refertur, quas pro unitate accipere possumus, ipsâ lineâ b eâdem semper manente; patet lineam b ad lineam d^2 non semper eandem rationem servare: sed contra, diversas ad illam sortiri relationes, pro diversis lineis, quæ pro unitate assumuntur. Et sic de aliis. Ast quæcunque tandem linea pro unitate sumatur, linea tamen indeterminata, & quæ per b^2 concipitur, eandem semper habet rationem ad d^2, quam quadratum lineæ b ad quadratum lineæ d. Atque ita de aliis omnibus, ut supra est ostensum. Et quidem generalius est atque etiam commodius, relinquere ita unitatem indeterminatam & ad cujusque arbitrium, ut deinde pro ipsa talis linea assumi possit, qualis videbitur, quàm eandem ab initio operationis determinare, sumendo pro ipsa certam aliquam lineam. Præterquam quod id plurimùm conducat ad confusionem evitandam; ad dirigendum calculum; atque ad præcavenda vitia, quæ ibidem committi possent. Verùm cùm unitas determinata existit, tum quidem non ampliùs singulis

Æqua-

Æquationis terminis æquè multas literas tribuere tenemur: cum unitas illas ubique supplere possit, ubi numero pauciores habentur, & ipsa has species multiplicans aut dividens easdem non mutet. Si verò ibidem non sit expressa, poterit tum quidem subintelligi. Qua de re plura exempla in hac Geometria reperiuntur.

AD PAGINAS 6 & 7, DE RADICUM EXTRACTIONE.



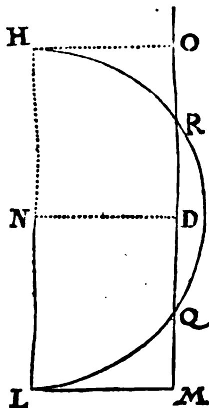
QUandoquidem linea L M primæ figuræ tangit circulum L O P, rectangulum O M P æquatur quadrato ex L M. Sunt autem bina rectangula M O P & O M P æqualia quadrato ex O M. Æquale igitur erit rectangulum M O P, unà cum quadrato ex L M, quadrato ex O M; hoc est, erit $z^2 \infty a z + b^2$, ac per consequens $z \infty \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2}$: cum O N æquetur $\frac{1}{2} a$, & quadratum ex N M tantundem valeat atque duo quadrata ex N L & L M, hoc est, $\frac{1}{4} a^2$ & b^2. Id quod primò erat demonstrandum.

Deinde rectangulum O P M & quadratum ex P M æqualia simul sunt rectangulo O M P. Est autem rectangulum O M P æquale quadrato ex L M. Quadratum itaque ex P M æquale est quadrato ex L M, minus rectangulo O P M: hoc est, erit $y^2 \infty - a y + b b$, ac proinde $y \infty - \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2}$. quia, cùm N M æquatur $\sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2}$, ut supra, ac ex ipsa aufertur N P seu $\frac{1}{2} a$, relinquitur M P seu y.

IN SECUNDAM FIGURAM DE RADICUM EXTRACTIONE. PAG. 7.

REducemus hanc figuram ad sequentem, in qua N D & H O sunt parallelæ & æquales ipsi L M. Quibus positis, quoniam L M tan-

LM tangit circulum HRQL in puncto L, erit quadratum ex LM æquale rectangulo RMQ. Deinde, quia MD æqualis est DO, & QD ipsi DR, erit & MQ æqualis RO. Vnde additâ communi QR, fiet quoque MR æqualis QO. Ac proinde si à rectangulo OMR auferatur rectangulum RMQ, hoc est, quadratum ex LM, erit reliquum æquale quadrato ex QO seu MR. Hinc cum RM sit $\infty\, z$, HL seu MO $\infty\, a$, & LM $\infty\, b$: erit $z^2 \infty\, az - bb$,



Similiter si à rectangulo OMQ auferatur rectangulum RMQ, hoc est, quadratum ex LM, erit reliquum æquale quadrato ex RO seu MQ. Ac proinde si QM sumatur pro z, habebitur $z^2 \infty\, az - bb$.

Jam autem cum linea RQ divisa sit bifariam in D, ac ipsi in directum adjecta QM, erit rectangulum RMQ, hoc est, quadratum ex LM, unà cum quadrato ex DQ seu RD, æquale quadrato ex DM, hoc est, ex semisse ipsius a; ac proinde quadratum ex DQ seu DR æquale quadrato ex DM, minus quadrato ex LM, hoc est, æquale $\frac{1}{4}aa - bb$. Vnde si addamus $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, hoc est, DQ seu DR ad DM vel $\frac{1}{2}a$, habebimus MR pro z; si verò illam ex eadem DM auferamus, obtinebimus quoque QM pro z. E quibus patet, primo casu fieri MR, hoc est, $z \infty\, \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, secundo autem MQ, hoc est, $z \infty\, \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Ita ut hæc æquatio $z^2 \infty\, az - bb$ duas habeat radices, nimirum, MR & MQ, quæ, sic ut jam diximus, exprimuntur. Id quod secundò erat demonstrandum.

Possunt quoque hæc omnia, quæ de radicibus dicta sunt, per Algebram demonstrari. Si enim in primo exemplo, sicut fecimus, ponatur $z \infty\, \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$: auferendo utrinque $\frac{1}{2}a$, habebitur $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \infty\, z - \frac{1}{2}a$. Ac proinde, si sumantur horum quadrata, erit & $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 \infty\, \frac{1}{4}a^2 + b^2$. Et ablato

utrinque $\frac{1}{4}a^2$, atque transferendo $-az$ in alteram æquationis partem: $z^2 \infty az + b^2$.

In secundo exemplo, cùm y æquatur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, ac proinde $y + \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia. hoc est, $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}a^2 + b^2$, & per consequens $y^2 \infty - ay + bb$.

In tertio exemplo, cum primo loco habeatur $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, ideoque $z - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc est, $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}aa - bb$, unde & $z^2 \infty az - bb$.

In ultimo exemplo, cum secundo loco habeatur $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac idcirco $\frac{1}{2}a - z \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc est, $\frac{1}{4}aa - az + z^2 \infty \frac{1}{4}aa - bb$, & propterea $z^2 \infty az - bb$. Quæ quidem demonstrare oportebat.

IN COMPOSITIONEM LOCORUM PLANORUM ET SOLIDORUM. PAG. 26, & sequent.

QUicquid in primo libro restat, nec non in secundo usque ad Locorum Planorum & Solidorum compositionem reperitur, intellectu satis facile est; quare ad paginam 26 & sequentes progrediemur. Vbi primò notandum, quòd, habentes in æquatione duas quantitates indeterminatas, quarum una licèt pro arbitrio sumatur, altera tamen per eandem æquationem inveniri possit, ita ipsam ordinare oporteat: ut, si una, puta x, ad libitum sumatur, altera, quæ est y, denominationi terminorum ejus inserviat, sic, ut y^2 unam constituat æquationis partem, & altera ejus pars ordiatur à termino, in quo y sola sine x reperitur, quem sequatur y cum x, & postea x sine y, & tandem terminus, in quo neque x neque y reperiatur. Atque impossibile quidem est alios casus invenire, quando quantitates indeterminatæ y & x duas tantùm dimensiones habent: quanquam sæpissimè contingat ex his terminis aliquos reperiri nihilo æquales.

Deinde observandum quoque est, si termini illi plures literas vel dimensiones contineant, modò quantitates indeterminatæ y & x duas dimensiones non excedant, facile esse, dividendo totam æqua-

æquationem per literas ipsi yy adhærentes, efficere, ut yy sola unam partem æquationis constituat & reliquæ alteram partem, ad instar fractionis, pro denominatore habentem literas, quæ antea cum yy jungebantur. Vbi nemo existimare debet, fractionem pluribus dimensionibus constare, quàm numero relinquuntur literæ in numeratore, postquam ex ipso numerus literarum denominatoris est subductus, quemadmodum in exemplo, eâdem hujus Geometriæ paginâ proposito, apparet.

Quod verò de dimensionibus jam diximus, eodem sensu intelligendum est, quo antea advertimus, utile esse, ut singulis æquationis terminis æquè multæ tribuantur literæ. Nam sicut b^2 significare potest lineam aliquam, sic etiam $\frac{b}{d}$, & $\frac{b}{d^2}$; quæ tamen sic usurpari non debent, nisi cùm linea quædam pro unitate est determinata; ob rationem supra allatam, ubi utilitatem atque commoditatem ostendimus, quæ sequitur, cùm singulis æquationis terminis æquè multæ literæ vel dimensiones tribuuntur, etiamsi illis nil nisi lineæ aliævè res similes designentur.

Porrò notandum est, quòd in hac Geometria generaliter pro uno eodémve loco vel termino habeantur illi omnes, qui eandem quantitatis, quam invenire volumus, & radicem æquationis appellamus, denominationem sortiuntur. Nimirum, quòd omnes illi pro uno termino habeantur, in quibus reperitur y^2; & pro alio, in quibus reperitur y; & rursus pro alio omnes, in quibus y non reperitur. Atque ita ulteriùs, si radix plures dimensiones habuerit. Est autem hoc (ut diximus) generale; speciatim verò hæc methodus requirit, ut ex termino, in quo y reperitur, duos casus faciamus; in quorum uno y reperiatur sine x; & in altero, ubi cum x sit conjuncta: cum y & x duæ indeterminatæ quantitates sint & utravis æquationis radix esse possit. Neque difficile est ad unum terminum reducere omnes illos, qui eodem modo ab æquationis radice denominantur. Etenim reliquis literis cognitis existentibus, facile est, tales assumere, quæ supponantur æquales iis omnibus, quæ eandem habent radicis denominationem; vel etiam ei, quod designatur per fractionem, quam termini efficere ponantur. Atque hinc fit, quòd loco terminorum, ubi y reperitur sine x, solummodo ponatur $2\,my$, quippe quod supponitur æquale omnibus simul terminis ejusdem denominationis. Loco autem eorum

omnium, ubi y & x simul reperiuntur, (siquidem hæc Geometriæ Methodus postulat, ut x retineatur, ac nihilominùs terminus quilibet plures quàm duas dimensiones habere non debeat,) ponitur tantùm $\frac{2n}{z}xy$, ut sic designentur fractiones omnes, quæ similem habent radicis denominationem. Quòd verò loco my & $\frac{n}{z}xy$ sumatur $2my$ & $\frac{2n}{z}xy$, id tantùm in eum finem fit, ut faciliùs ad æquationis radicem perveniatur: ad quàm obtinendam requiritur, ut literarum m & n semisses accipiantur. Sicut superiùs vidimus pag. 6 & 7, ubi de radicum extractione, quando æquatio duas solùm dimensiones habet, sumus loquuti.

Postquam igitur termini, in quibus y absque x, atque etiam in quibus y & x simul reperiuntur, hoc modo ad simpliciores reducti sunt, extrahitur radix ex Æquatione eaque exprimitur juxta id, quod pag. 6 & 7 fuit dictum. Quemadmodum videre licet in exemplo pag. 27, ubi radix est

$$y \propto m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 + \frac{2mn}{z}x + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}.$$

Deinde sumenda est m^2 pro omnibus terminis in vinculo, in quibus x non reperitur, cujus quantitas m eadem est in æquatione proposita cum ea, quæ est extra vinculum; sed aliàs potest esse diversa, quo casu loco m extra vinculum præstat quodammodo aliam literam assumere. Post quæ præter terminos, in quibus x absque y reperitur, nihil reducendum restat. Possunt autem hi duobus modis se habere: prout nimirum habebitur vel x^2, vel x simpliciter. Vnde fit, ut etiam, loco terminorum omnium, in quibus x simpliciter reperitur, scribendum sit ox. Quo loco notandum quoque venit, literam o quantitatem aliquam hìc designare, non autem cyphram: quandoquidem æqualis est ac loco illorum omnium scribitur, quæ cum x junguntur; aliàs enim D. des Cartes eâ ordinariè ad cyphram seu nihil denotandum utitur: ita ut quodammodo hìc, ad confusionem evitandam, præstare videatur, pro o aliam quandam literam substituere. Sed hæc monuisse sufficiat. Denique reducendæ sunt etiam literæ, quæ cum x^2 junguntur, quæque nil præter fractionem designare possunt: cum x^2 duas habeat dimensiones, hoc videlicet modo: $\frac{p}{m}x^2$. Vbi considerare oportet, quòd litera m fractionis $\frac{p}{m}$ eadem

quanti-

quantitas existat, quæ in m^2 in vinculo. Quâ quidem methodo nulla habebitur æquatio, cujus radix ad duas tantùm dimensiones ascendit, quæ, prout ex illa educta est, non reducatur ad hanc formulam: $y \infty m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$. Ita ut hæc ipsa quibuslibet Locis Planis & Solidis construendis inservire queat: cum omnes locos sive terminos, qui in eorum æquationibus reperiri possunt, comprehendat; adeoque non nisi signorum + & — variationem, atque loca & terminos, qui in propositis æquationibus deprehendi nequeunt, considerare oporteat. Quæ quidem omnia à D. des Cartes sunt animadversa. Nos verò ea duntaxat, quæ difficultatem aliquam afferre possent, illustrare cõnabimur.

OBSERVATIO PRIMA.

POstquam æquatio ad supradictam formulam est reducta, & illa, sive æquè multos, sive pauciores terminos habens, etiam fractionibus numericis est affecta: ut, exempli gratiâ, si loco $\frac{n}{z}x$ habeatur $\frac{3}{4}x$, potest operatio institui per hasce fractiones, supponendo, numeratorem 3 esse æqualem numeratori n, & denominatorem 4 æqualem denominatori z. Idem intellige de aliis fractionibus numericis, quæ æquales sunt, & ad literas superioris formulæ referuntur. Vnde cùm habetur fractio denotata hoc pacto $x\sqrt{\frac{3}{4}}$ loco $\frac{n}{z}x$; erit litera n æqualis $\sqrt{3}$, & z æqualis $\sqrt{4}$, atque ita de aliis. Est autem bene observandum, quod diximus: nimirum, si in æquatione reperiatur m^2, denominatorem m fractionis $\frac{p}{m}x^2$ tum esse æqualem ipsi m quantitatis m^2. id quod facile est, etiamsi alia fractio haberetur, modò supponamus, m esse ad p, sicut denominator hujus fractionis ad suum numeratorem: quandoquidem hoc modo fractiones fiunt æquales. Quòd si autem id per numeros fieri non possit, operandum erit per literas, quod sæpe est commodissimum. Porrò observandum est, quòd ex terminis, qui inveniendis, centro, lateri recto, & transverso inserviunt, non aliæ literæ usurpandæ sint, quàm quæ in æquatione reperiuntur; & quòd reliquæ literæ eorundem

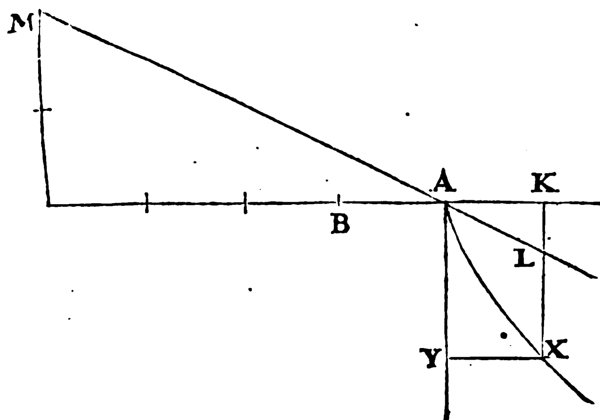
terminorum non magis sint considerandæ, quàm si non haberentur. Cujus ratio est, quòd D. des Cartes, ut universaliter hæc tractaret, terminos hosce ejusmodi constitutionis effecerit; in qua loca omnia forent repleta. Adeoque literæ locorum, quæ in proposita æquatione non reperiuntur, non annumerandæ sunt terminis, qui centris, lateribus rectis, & transversis exprimendis inserviunt.

OBSERVATIO SECUNDA.

PAg. 27 càsus, cùm in æquatione non habetur m, difficultatem afferre pòsset, quare ad illum intelligendum cogitandum est, quòd, quando in æquatione non habetur m, ducenda itidem non sit linea IK in figura ejusdem paginæ. Ac proinde, ut inveniatur LI, postquam habetur $\frac{n}{z}x$, non referenda est illa ad IK, sed ad AB, eodem modo, quo D. des Cartes ipsam comparat ipsi IK. Quandoquidem facere oportet, ut AB sit ad BL, sicut z ad n, hoc est, ut AB existente x, BL sit $\frac{n}{z}x$, atque ut punctum L cadat ex parte puncti C, si habeatur $-\frac{n}{z}x$; at ex altera parte versùs R, si reperiatur $+\frac{n}{z}x$. Quo facto, ducenda est linea AL, per puncta A & L, quæ eadem erit quæ LI, hoc est, eodem munere fungetur, quo LI in exemplo D[ni] des Cartes. Et quidem cognita erit linea AL, cum lineæ AB, BL, angulusque ABL cognoscantur. Atque ita pro AL accipere possumus $\frac{a}{z}x$; eritque a nota.

Sed rem fortassis planiùs per exemplum aliquod explicabimus. Sit, in exposita figura, recta linea AY, curva autem AX, cujus vertex punctum A, cujusque hæc sit proprietas: ut, assumpto in ea quolibet puncto, ut X, à quo ad rectam AY normaliter ducatur XY, sumptâque utcunque rectâ AB, hæc ipsa unà cum linea AY sit ad lineam AY, sicut linea AY ad lineam XY.

Esto AB $\infty\, b$, AY $\infty\, y$, & AK æqualis ac parallela ipsi XY $\infty\, x$. Hinc cum $\overline{b+y}$ sit ad y, sicut y ad x, erit $yy \infty xy + xb$, & $y \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + xb}$. Vnde ex iis, quæ habentur pag. 29, constat, lineam hanc esse Hyperbolam, eò quòd habetur $+\frac{1}{4}x^2$. Ad quam construendam, cum AK sit x, linea KL erit $\frac{1}{2}x$, quan-

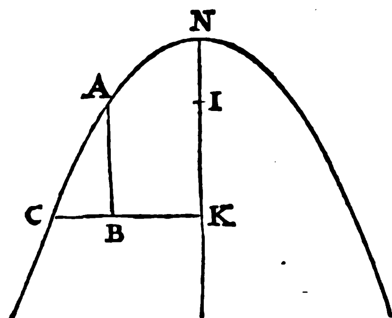


quandoquidem hæc fractio æqualis est ac ipsi $\frac{x}{z}x$ respondet. Porrò, quoniam rectus est angulus AKL, erit quadratum ex AL æquale quadratis ex AK & KL simul sumptis. Hinc cum quadratum ex AK sit x^2, & quadratum ex KL $\frac{1}{4}x^2$, AL erit $\sqrt{\frac{5}{4}x^2}$ seu $x\sqrt{\frac{5}{4}}$; id quod æquale supponimus ipsi $\frac{a}{z}x$, at $\frac{1}{4}x^2$ ipsi $\frac{p}{m}x^2$: ita ut $\sqrt{5}$ sit a, & $\sqrt{4}$ sit z, & 1 sit p, & 4 sit m. Quibus positis, terminus $\frac{aom}{2pz}$, qui inveniendo centro inservit, erit $\sqrt{\frac{80}{16}bb}$, cum am, hoc est, $4\sqrt{5}$, valeat $\sqrt{80}$; & $2pz$, hoc est, $2\sqrt{4p}$, valeat $\sqrt{16}$; & o sit æqualis ipsi b; & $b\sqrt{\frac{80}{16}}$ valeat $\sqrt{\frac{80}{16}bb}$, hoc est, $\sqrt{5bb}$. Quod quidem centrum sumendum est à puncto A versùs M, quandoquidem Hyperbola est, & habetur $+bx$, hoc est, $+ox$, juxta pag. 30. Latus rectum hìc est $\frac{oz}{a}$, hoc est, $b\sqrt{\frac{4}{5}}$ seu $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$. Vnde latus transversum fit $\frac{aom}{pz}$: quoniam oportet, ut pz^2 sit ad a^2m, sicut $\frac{oz}{a}$ ad latus transversum, quod idcirco, (ut diximus,) erit $\frac{aom}{pz}$. id quod facit $b\sqrt{\frac{80}{4}}$, hoc est, $\sqrt{20bb}$. Ac proinde

proinde cum distantia puncti A à centro sit $\sqrt{5bb}$, quæ semissis est lateris transversi (quoniam, cùm duorum quadratorum unum alterius est quadruplum, latus tantùm lateris fit duplum); manifestum est, punctum A verticem fore diametri AL. Ideoque si fiat MA $\infty \sqrt{20bb}$, erit ipsa latus transversum, & latus rectum erit, (ut diximus,) $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$. Quorum demonstratio facilis est. Nam per prop. 21. lib. 1mi Conicorum Apollonii, ut latus transversum MA $\infty \sqrt{20bb}$ est ad latus rectum $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$, ita est rectangulum MLA ad quadratum ex LX. Est autem AL $\infty \sqrt{\frac{5}{4}x^2}$. Hinc si multiplicetur $\sqrt{20bb} + \sqrt{\frac{5}{4}x^2}$ per $\sqrt{\frac{5}{4}x^2}$, habebitur rectangulum MLA, quod proinde erit $\sqrt{\frac{100}{4}bbx^2} + \sqrt{\frac{25}{16}x^4}$. Multiplicando verò id ipsum per latus rectum $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$, exsurgit $\sqrt{\frac{400}{20}b^4x^2} + \sqrt{\frac{100}{80}bbx^4}$, quod divisum per latus transversum $\sqrt{20bb}$, exhibet $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{100}{1600}x^4}$, hoc est, $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{1}{16}x^4}$, seu $bx + \frac{1}{4}x^2$, pro quadrato ex LX, unde ipsa LX fit $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$. Jam si ad lineam LX addatur linea LK $\infty \frac{1}{2}x$, obtinebitur linea XK, hoc est, $y \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$, ac per consequens $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2} \infty y - \frac{1}{2}x$. Vnde ductâ utrâque æqualitatis parte in se, fiet $bx + \frac{1}{4}x^2 \infty yy - xy + \frac{1}{4}x^2$, seu $yy \infty bx + xy$. Hinc ut $b + y$ se habet ad y, ita y se habebit ad x. Quod erat demonstrandum.

Proponatur adhuc aliud exemplum, referens eum casum in quo non reperiatur $\frac{n}{z}x$ in æquatione. Habeamus itaque æquationem hanc $yy \infty - 2dy + bx$, cujus radix est $y \infty - d + \sqrt{d^2 + bx}$, quam construere oporteat. Supponatur in figura sequente AB ∞x, & angulus ABC ad libitum, BC autem, indefinitè continuata versùs B, ∞y; fiatque BK ∞d, quæ hìc idem præstat quod m in superiori formula, quoniam habetur $-d$. Ductâ autem NK indefinitè parallelâ ipsi AB, sumatur KI æqualis AB, prout ostensum fuit pag. 27 & 28. Quo facto, relinquetur tantùm $\sqrt{d^2 + bx}$, & pagina sequens docet lineam quæsitam esse Parabolam, quoniam non habetur x^2. Præterea puncto N existente vertice, linea IN esse debet $\frac{am^2}{oz}$, hoc est, $\frac{d^2}{b}$, in hoc exemplo. Terminus denique, qui explicat latus rectum, erit $\frac{oz}{a}$,

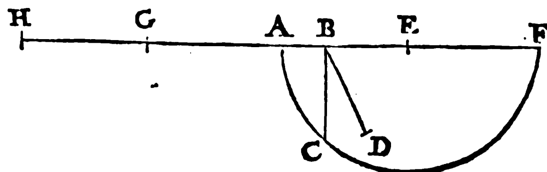
idem



idem hìc existens quod b, & fit K C ordinatim adplicata ad diametrum. Quorum demonstratio nec difficilis. Nam, secundùm 11 prop. 1mi Libri Conicorum Apollonii; rectangulum comprehensum sub latere recto b & linea N K $\infty \frac{d^2}{b} + x$, utpote, $dd + bx$, est æquale quadrato lineæ K C. Est verò linea K C æqualis ipsis B C ∞y, & B K ∞d, simul sumptis. Erit itaque linea K C $\infty y + d$, & quadratum ejus $\infty yy + 2dy + dd$. Ac proinde $yy + {}^{2}dy + dd \infty dd + bx$, & per consequens $yy \infty -{}^{2}dy + bx$. Quod demonstrare oportebat.

OBSERVATIO TERTIA.

PAginâ 29, circa medium, dictum est, lineam quæsitam esse Circulum, cùm $aam \infty pz^2$, & cùm angulus est rectus. Verùm hoc intelligendum etiam est, cùm angulus est rectus, nec omnino habetur aam, nec pz^2: aut cùm in æquatione literæ unius termini æquales sunt literis termini alterius. Ad pleniorem autem horum intellectum sequentia construamus exempla.



Habeatur æquatio $yy \infty bx - x^2$, cujus radix est $y \infty \sqrt{bx - x^2}$, & supponatur in apposita figura linea H A ∞b, linea A B ∞x, &

linea B C vel B D ∞y. Manifestum autem est, lineam construendam esse Ellipsin aut Circulum, quoniam habetur $-x^2$. Non reperitur autem m, aut $\frac{n}{z}x$. Et sufficit pro x sumere A B, atque centrum ab A versùs B, cùm habeatur $+ox$, hoc est, in hoc exemplo, $+bx$. Ita ut pro illo sumendum sit $\frac{aom}{2pz}$, hoc est, b divisum per 2, seu $\frac{1}{2}b$, cum non habeatur a, neque m, neque p, neque z. Latus autem rectum sit $\frac{oz}{a}$, hoc est, b; transversum verò $\frac{aom}{pz}$, hoc est, b; & tum considerare tantùm oportet, utrum angulus A B C an verò A B D sit rectus. Nam cum hìc non habeatur aam, nec pz^2, existente angulo (puta A B C) recto, linea quæsita erit Circulus; at verò obliquo existente (ut A B D) erit linea quæsita Ellipsis. Quapropter si utroque casu faciamus A E $\infty \frac{1}{2}b$, erit punctum E centrum, & A F ∞b latus transversum; latus autem rectum ∞b, atque B C vel B D ∞y ordinatim adplicata ad diametrum A F. Quorum demonstratio facilis est. Etenim quoniam utroque casu juxta 21mam propnem 1mi libri Conicorum Apollonii latus transversum b est ad latus rectum b, sicut rectangulum F B A ad quadratum ex B C vel B D: erit rectangulum F B A æquale quadrato ex B C vel B D. Hinc cum F B sit $\infty b - x$, & A B ∞x, erit dictum rectangulum, hoc est, $bx - x^2$, æquale quadrato ex B C vel B D, hoc est, erit $yy \infty bx - x^2$. Quod erat demonstrandum.

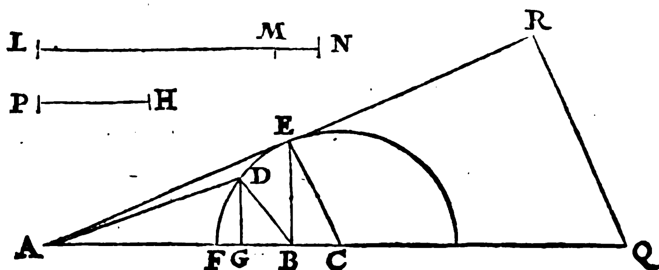
Quòd si æquatio haberetur $yy \infty bb + x^2$, quæsita linea esset Hyperbole: & si vel B C, vel B D sumatur pro y, hoc est, sive angulus sit rectus, sive obliquus; erit constructio præcedenti omnino similis; nisi quòd centrum & latus transversum sit sumendum à puncto A versùs alteram partem, nempe versùs H. Atque ita faciendo A G $\infty \frac{1}{2}b$, fiet punctum G centrum, eritque tam latus transversum, quàm rectum ∞b. Demonstratio præcedenti erit similis, observatis tantùm signis + & —.

OBSERVATIO QUARTA.

ANimadvertendum præterea est, si in æquatione non habeatur fractio ipsi x^2 adhærens, & nihilominus tamen adsit m^2, hoc est, habeatur, verbi gratiâ, $\sqrt{m^2 + ox - x^2}$ loco $\frac{p}{m}x^2$: quòd

quòd tum quidem fractio, (ut supra notavimus) si alia quàm $\frac{p}{m}$ fuerit, transmutanda sit in fractionem ubi habeatur $\frac{p}{m}$. supponendo scilicet m esse ad p, sicut denominator alterius fractionis ad ejusdem numeratorem: quoniam in hac Methodo requiritur, ut m ipsius m^2 sit denominator fractionis ipsi x^2 adhærentis. Vbi quidem, in casu, quo haberi ponimus m^2, non autem fractionem, quæ ipsi x^2 adhæreat, supponere oportet $p \propto m$, ita ut habeamus $\frac{p}{m} x^2$ non aliùs valoris quàm x^2. Quod cognoscendis centris, lateribusque rectis atque transversis inservire poterit.

Ad pleniorem verò intellectum, detur in sequente figurâ linea AB, & puncta in ea A & B; oporteatque invenire punctum,



ut D, à quo si ducantur lineæ AD, DB, ut ipsæ datam inter se obtineant rationem, hoc est, ut AD sit ad DB, sicut linea PH ad lineam MN; quarum quidem PH sit major quàm MN.

Demittatur à puncto D super AB perpendicularis DG, & supponatur AB $\propto b$, AG $\propto x$, GD $\propto y$, MN $\propto f$. Quoniam igitur rectus est angulus AGD, erit quadratum ex AD æquale quadratis ex AG, GD, simul sumptis, hoc est, $\propto x^2 + yy$. Eodem modo, cum GB sit $b - x$, erit quadratum ex DB æquale quadratis ex BG, GD, hoc est, $\propto yy + bb - 2bx + x^2$. Iam verò, cum AD sit ad DB, sicut PH ad MN, erit quoque quadratum ex AD ad quadratum ex DB, sicut quadratum ex PH ad quadratum ex MN. Porrò fiat, ut PH ad MN, sic LN ad PH,

 erit-

eritque L N ad M N, ut quadratum à P H ad quadratum ab M N. Hinc si L N vocetur c; erit c ad f, sicut quadratum à P H ad quadratum ab M N, hoc est, ut quadratum ex A D $\infty\ x^2 + yy$ ad quadratum ex D B $\infty\ yy + bb - 2bx + x^2$. Ac proinde productum extremorum erit æquale producto mediorum, hoc est, $fx^2 + fyy \infty\ cyy + cbb - 2cbx + cx^2$, & per consequens, $cyy - fyy \infty - cbb + 2cbx - cx^2 + fx^2$, ac denuo $yy \infty \frac{-cb^2 + 2cbx - cx^2 + fx^2}{c-f}$, & tandem $y \infty \sqrt{\frac{-cb^2 + 2cbx - cx^2 + fx^2}{c-f}}$.

Ad abbreviandum autem hunc terminum $\frac{-cx^2 + fx^2}{c-f}$; licèt consideremus, quòd $f - c$ & $c - f$ exprimant semper unam eandemque differentiam, quippe quæ est inter c & f, etiamsi c major sit quàm f (dum in operatione supponimus $h \infty\ c - f$); semper tamen habebimus $\frac{-cx^2 + fx^2}{c-f} \infty \frac{-hx^2}{h}$, hoc est x^2 simpliciter; adeò ut relinquatur $y \infty \sqrt{\frac{-cb^2 + 2cbx}{c-f} - x^2}$. Id quod nos docet, locum esse Planum, eumque Circulum existere: cum habeatur $-x^2$, angulusque A G D sit rectus, & $aam \infty\ pz^2$; neque enim hìc habetur a, neque z; atque m ipsi p æqualis supponitur; cum nulla ipsi x^2 fractio adhæreat. Quibus ita constitutis Circulum hoc modo inveniemus.

Terminus, qui centrum nobis exhibere debet, est $\frac{aom}{2pz}$, ex quo nobis præter $\frac{o}{2}$ nihil inservit: cum m ipsi p sit æqualis; hoc est, pro eo tantùm habebimus $\frac{cb}{c-f}$. Ac idcirco, postquam linea L M æquatur $c - f$, si fiat ut linea L M $\infty\ c - f$ ad lineam L N $\infty\ c$, ita linea A B $\infty\ b$ ad lineam A C, erit linea A C $\infty \frac{cb}{c-f}$, & punctum C centrum Circuli. Sumendum autem id erit ab A versùs B, quoniam habetur $+\frac{2cbx}{c-f}$, respondens ipsi ox. Præterea, quoniam in Circulo latus rectum & transversum sibi invicem sunt æqualia, alterutro tantùm erit opùs. Formula autem lateris recti hìc est $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2} - \frac{4mpz^2}{a^2}}$. Vnde quidem illud, quod nobis in hoc exemplo inservit, non aliud erit quàm $\sqrt{oo - 4m^2}$, hoc est,

quòd,

quòd, auferendo quadratum $\frac{4cb^2}{c-f}$ à quadrato ex $\frac{2cb}{c-f}$, relinquatur quadratum lateris recti. Est autem paulò ante inventa linea

A C ∞ $\frac{cb}{c-f}$; ideoque ejus dupla A Q ∞ $\frac{2cb}{c-f}$. Hinc invenire adhuc oportet $\frac{4cb^2}{c-f}$, quod repræsentatur per $4\,m^2$. Invenitur autem; ponendo esse, ut $c-f$ ad c, ita bb ad $\frac{cb^2}{c-f}$. at ut $c-f$ est ad c, sic A B ∞ b est ad A C. Quapropter erit ut b ad lineam A C, sic bb ad $\frac{cb^2}{c-f}$. Quoniam autem ratio duorum quadratorum ad invicem duplicata est rationis, quam inter se habent ipsorum latera: hinc, si ponamus lineam A E mediam proportionalem inter b & lineam A C; erit b ad lineam A E, sicut b ad $\sqrt{\frac{cb^2}{c-f}}$. & per consequens linea A E ∞ $\sqrt{\frac{cb^2}{c-f}}$. Vnde si A R fiat dupla ipsius A E, erit ea æqualis $\sqrt{\frac{4cb^2}{c-f}}$. Adeoque si constituamus triangulum A R Q, cujus latus A Q sit æquale $\frac{2cb}{c-f}$ (ut dictum est), cujusque angulus A R Q sit rectus; erit latus R Q ∞ $\sqrt{o^2-4m^2}$: quandoquidem quadratum ejus æquatur quadrato lineæ $\frac{2cb}{c-f}$, minus quadrato $\frac{4cb^2}{c-f}$. Atque ita R Q sit & latus rectum & diameter Circuli. Et si ex centro C ducatur linea C E parallela ipsi

RQ, erit ipsa æqualis radio Circuli, utpote æqualis semissi lineæ RQ.

Et hæc quidem quantum ad constructionem juxta hanc Methodum, quæ, postquam jam est inventa, brevior reddi potest. Nam cum angulus AEC sit rectus, & AE media proportionalis inter AC & AB, similia erunt triangula AEC, ABE, & EBC; ac proinde AC ad CE, ut CE ad CB. Vt autem AB est ad AC, ita est LM ad LN. Quare per conversionem rationis erit AC ad BC, ut LN ad NM. At verò ut ratio AC ad CB duplicata est rationis AC ad CE (propterea quòd CE media est proportionalis inter AC & CB), ita etiam, cum linea PH media sit proportionalis inter LN & NM (per constructionem): erit ratio LN ad NM, hoc est, AC ad CB, duplicata rationis LN ad PH. Quapropter erit ut LN ad PH, seu PH ad MN, ita AC ad CE; quæ quidem Circuli radius est. Demonstratio hujus constructionis ad imitationem præcedentium inveniri potest, quam hìc omittimus: cum illa ab Eutocio initio commentariorum ejus in Apollonii Conica sit ostensa.

OBSERVATIO QUINTA.

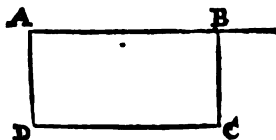
PAg. 21 hujus Geometriæ dictum est: quòd, postquam hæc æquatio non ascendit ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum, aut etiam ultra quadratum unius ex illis, linea curva semper fit primi & simplicissimi generis, sub quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensæ. Quod ita intelligendum est, duas quantitates indeterminatas x & y, cùm separatim in Æquationis terminis reperiuntur, non ultra sua quadrata ascendere debere; sed in terminis, ubi simul reperiuntur, singulas non nisi unam dimensionem habere debere, ita ut simul tantùm rectangulum aliquod duásve dimensiones efficiant.

Similiter, si in Æquatione reperiretur terminus aliquis, in quo haberetur y^3, vel x^3; aut y^4, vel x^4; aut denique xy^2, vel x^2y, vel x^2yy: linea curva esset secundi generis. Et sic de cæteris. In quibus omnibus solùm indeterminatarum quantitatum ratio habenda est, non autem quantitatum cognitarum, quibuscum junguntur.

Quòd

Quòd si quantitates indeterminatæ singulæ separatim ad duas dimensiones non ascendant, neque etiam simul, hoc est, si nullus terminorum ad yy, aut ad xy assurgat; linea itidem erit primi generis, & quidem recta, non curva: adeoque locus talem æquationem præbens Planus erit, & ad lineam rectam.

Et quidem, cùm locus est ad rectam lineam, Geometria hæc non minùs ipsum componere docet, quàm cùm locus est ad curvam lineam, quæ sit primi generis, & cùm in æquatione habetur yy: sicut ubique in æquatione hujus Geometriæ pro Pappi quæstione, ex qua superior formula deducta fuit, cernere licet. Quòd si verò habeatur x^2 in æquatione, non autem yy, immutanda tantùm erunt nomina quantitatum indeterminatarum, ita ut appelletur y, quæ dicta fuit x, & x, quæ dicta fuit y: in hunc modum. Esto in sequenti figura A B $\propto x$, & B C $\propto y$, atque æquatio inventa $x^2 \propto by$, quam ad dictam formulam reducere oportet.



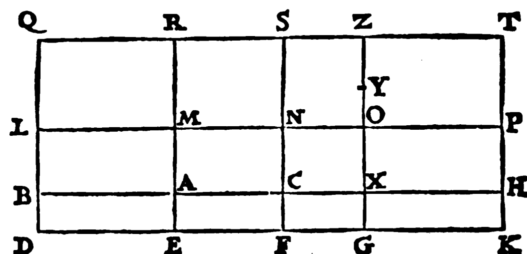
Ducta igitur A D parallelâ ipsi B C, & D C parallelâ ipsi A B, mutatisque nominibus quantitatum indeterminatarum, nimirum appellando A D, cui æqualis est B C, x, & D C, quæ æqualis est A B, y; quæsita æquatio erit $yy \propto bx$. cujus radix est $y \propto \sqrt{bx}$. Atque ita reducta erit ad formulam, quæ nos docet punctum C fore in Parabola.

At verò si in æquatione non habeatur x^2, nec yy, sed xy; qui quidem casus, quoniam nec in æquatione quæstionis Pappi reperitur, neque ad formulam ex ea deductam refertur; difficultatem aliquam afferre posset, quam propterea enodabimus.

Æquatio autem hæc ad summum plures quàm quatuor terminos non comprehendit: unum nimirum, ubi x reperitur sine y; alterum, ubi y reperitur sine x; tertium, ubi reperitur xy; ac quartum denique, ubi neque x neque y reperitur. Adeò ut varietas omnis reducatur ad 17 formulas æquationum ac constructionum, quæ sequenti pag. 129 exhibentur. Quarum quidem ope videre licet, quonam pacto locus semper ad Hyperbolam existat, lineæque indeterminatæ sint Asymptoti, aut ipsis parallelæ.

Detur enim positione linea B H, punctum autem in ea datum sit A: deinde assumptâ lineâ A X pro x, ductâque lineâ X Y, quam pro y sumemus, facientem cum A X talem angulum, qua-

lem



lem libuerit, eâque indefinitè productâ: ducantur lineæ D K, L P, Q T parallelæ ipsi B H; ita ut D K cadat infra B H; L P autem supra B H, inter puncta X & Y; Q T verò ultra punctum Y. Eodem modo ducantur lineæ Q D, R A E, S F, T K parallelæ ipsi X Y seu Z G; ita ut linea Q D transeat per lineam X A, productam versùs A; & S F per eandem inter puncta A & X; nec non linea T K per eandem A X, productam versùs X. Quibus ita constitutis, si per 4^tam Prop^nem 2^di libri Conicorum Apollonii describatur Hyperbola, quæ transeat per punctum Y, cujusque Asymptoti sint lineæ, quas refert quælibet constructio; manifestum est, per 12 Prop^nem eiusdem libri rectangula omnia, quæ ad easdem lineas similiter sumuntur, sibi invicem esse æqualia. Ideoque demonstrandum solùm restat, Asymptotos, atque rectangulum uniuscujusque æquationis, ritè esse constructa.

Esto igitur secundùm ultimam æquationem Hyperbola constructa, transiens per punctum Y, cujusque Asymptoti sint D Q, & D G; & rectangulum, contentum sub lineis D G, G Y, sit æquale rectangulo dato $df + bc$. Hinc si juxta constructionem fecerimus lineas A X ∞ x, X Y ∞ y, A B ∞ c, B D vel X G ∞ b: manifestum est, B X vel D G fore $x + c$; G Y autem $y + b$; atque multiplicando unam per alteram proditurum $bc + bx + cy + xy$, pro rectangulo linearum D G, G Y. quod aliunde quoque æquatur $df + bc$. Ac proinde, si utrinque commune auferatur rectangulum bc, relinquetur $xy + cy + bx$ ∞ df. quæ est æquatio proposita. Eodem modo reliquarum omnium æquationum & constructionum demonstratio ostendetur.

Æqua-

Æquatio 1ma.
$xy \propto df$.
Constructio.
Rectangulum $AXY \propto df$.
Asymptoti XA, AR.

Æquatio 2.
$xy + cy \propto bx$.
Constr.
$AB \propto c$, $BQ \propto b$.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. $QZY \propto bc$.

Æquat. 3.
$xy + bx \propto cy$.
Constr.
$AH \propto c$, $HK \propto b$.
Asympt. EK, KT.
Rectang. $KGY \propto bc$.

Æquat. 4.
$xy - cy \propto bx$.
Constr.
$AC \propto c$, $CN \propto b$.
Asympt. SN, NO.
Rectang. $NOY \propto bc$.

Æquat. 5.
$xy + cy \propto df$.
Constr.
$AB \propto c$.
Asympt. QB, BX.
Rectang. $BXY \propto df$.

Æquat. 6.
$xy + bx \propto df$.
Constr.
$AE \propto b$.
Asympt. RE, EG.
Rectang. $EGY \propto df$.

Æquat. 7.
$xy - cy \propto df$.
Constr.
$AC \propto c$.
Asympt. SC, CX.
Rectang. $CXY \propto df$.

Æquat. 8.
$xy - bx \propto df$.
Constr.
$AM \propto b$.
Asympt. RM, MO.
Rectang. $MOY \propto df$.

Æquat. 9.
$xy + df \propto cy$.
Constr.
$AH \propto c$.
Asympt. AH, HT.
Rectang. $HXY \propto df$.

Æquat. 10.
$xy + df \propto bx$.
Constr.
$AR \propto b$.
Asympt. AR, RZ.
Rectang. $RZY \propto df$.

Æquat. 11.
$xy + cy - bx - df \propto 0$.
Constr. quando df excedit bc.
$AB \propto c$, $BL \propto b$.
Asympt. QL, LO.
Rectang. $LOY \propto df - bc$.
Constr. cùm bc excedit df.
$AB \propto c$, $BQ \propto b$.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. $QZY \propto bc - df$.

Æquat. 12.
$xy + bx - cy - df \propto 0$.
Constr. quando rectang. df majus est rectangulo bc.
$AC \propto c$, $CF \propto b$.
Asympt. SF, FG.
Rectang. $FGY \propto df - bc$.
Constr. quando bc rectang. excedit rectang. df.
$AH \propto c$, $HK \propto b$.
Asympt. EK, KT.
Rectang. $KGY \propto bc - df$.

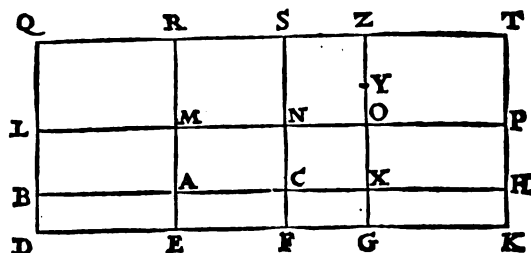
Æquat. 13.
$xy - cy - bx - df \propto 0$.
Constr.
$AC \propto c$, $CN \propto b$.
Asympt. SN, NO.
Rectang. $NOY \propto df + bc$.

Æquat. 14.
$xy + cy - bx + df \propto 0$.
Constr.
$AB \propto c$, $BQ \propto b$.
Asympt. BQ, QZ.
Rectang. $QZY \propto df + bc$.

Æquat. 15.
$xy + bx - cy + df \propto 0$.
Constr.
$AH \propto c$, $HK \propto b$.
Asympt. EK, KT.
Rectang. $KGY \propto df + bc$.

Æquat. 16.
$xy - cy - bx + df \propto 0$.
Constr. quando df superat bc.
$AH \propto c$, $HP \propto b$.
Asympt. MP, PT.
Rectang. $POY \propto df - bc$.
Constr. cum bc superat df.
$AH \propto c$, $HT \propto b$.
Asympt. HT, TQ.
Rectang. $TZY \propto bc - df$.

Æquat. 17ma & ultima.
$xy + cy + bx - df \propto 0$.
Constr.
$AB \propto c$, $BD \propto b$.
Asympt. QD, DG.
Rectang. $DGY \propto df + bc$.



Præterea evidens eſt, in 11ma, 12ma, & 16ta æquatione exiſtente rectangulo df æquali bc, ſi hoc ipſum in locum df ſubſtituatur, undecimam quidem tunc fore diviſibilem per $x+c$, duodecimam per $y+b$, & decimam ſextam per $c-x$; Vtramque autem 11^{mam} & 16^{tam} poſſe reduci ad $y \infty b$; aſt 12^{mam} ad $x \infty c$. Adeò ut tunc tantùm locum ad lineam rectam exhibeant, quando habetur $y \infty b$, & X Y ipſi b ſit æqualis, atque per punctum Y recta linea ducitur ipſi A X parallela, ut habeatur quæſita; Aut quando habetur $x \infty c$, & X A ipſi c ſit æqualis, erit parallela A R linea recta quæſita.

Cæterùm potuimus quidem æquationum harum varietatem ad minorem numerum reducere, transmutando nempe unam indeterminatarum quantitatum in alteram (ſicut in eum finem illas, quæ mutationem hanc recipere poſſunt, ordine diſpoſuimus); tum etiam conſtructiones illarum, in quibus quatuor termini non reperiuntur, comprehendere ſub iis, quæ omnes habent completos: ſed quoniam multò prolixiori indiguiſſemus ſermone, & res ipſa minùs fuiſſet dilucida, ratione oſtensâ uti maluimus.

AD PAGINAM 40 ET SEQUENTES, DE MODO INVENIENDI CONTINGENTES LINEARUM CURVARUM.

NOtandum hìc eſt, modum inveniendi tangentes linearum curvarum, hoc loco expoſitum, conſiſtere in invenienda æquatione, in quâ linea y vocata ſumi poteſt pro duabus quantitatibus diverſis, cùm linea quæ vocatur v ad tangentem non refertur,

fertur, at verò cùm ad ipsam refertur, quòd tunc duæ illæ quantitates diversæ intelligantur æquales seu in unam cöalescere. Quod fit comparando æquationem inventam cum æquatione $yy - 2ey + ee \propto 0$ aliáve ex hac compositâ. Ejus rei proponamus sequens exemplum.

Esto linea recta AN, curva autem AM, cujus vertex punctum A, cujusque hæc sit proprietas: ut, assumpto in ea quolibet puncto, ut M, à quo ad rectam AN ducatur perpendicularis ML, recta BC, ad arbitrium sumpta, unà cum AL, sit ad AL, sicut linea AL ad LM. Oportet rectam lineam invenire PM, tangentem hanc curvam AM in puncto M. Supponatur linea NM perpendicularis ad tangentem PM in puncto M, & BC $\propto b$, AL $\propto y$, & LM $\propto x$. Hinc cum $b + y$ sit ad y, ut y ad x, fiet æquatio talis: $bx + yx \propto yy$, ac proinde $x \propto \frac{y^2}{b+y}$. Iam verò, pro eo, quòd in hoc exemplo imaginamur curvam AM tangi à circulo cujus radius MN, satiùs est imaginari, quòd ipsa tangatur à recta linea MP: quandoquidem hoc modo superfluam multiplicationem evitamus. Quocirca statuendo AP $\propto v$, & PK $\propto s$ esse parallelam ipsi LM, atque ab AK, quæ parallela est ipsi PM, secari in K: erit ut v ad s, sic $y - v$ ad LM seu $\frac{ys - vs}{v}$. Quæ quidem cum supra inventa sit $\propto \frac{y^2}{b+y}$, habebitur $\frac{yy}{b+y} \propto \frac{ys - vs}{v}$, vel $yy \propto \frac{\overline{bs - vs}}{v - s}$ in $y - \frac{bvs}{v - s}$, comparandum cum $yy \propto 2ey - e^2$. Vnde primò invenimus $\frac{bs - vs}{v - s} \propto 2e$, vel $s \propto \frac{2ev}{b - v + 2e}$. Deinde $\frac{bvs}{v - s} \propto e^2$, vel $s \propto \frac{e^2 v}{bv + e^2}$, ac per consequens $\frac{2ev}{b - v + 2e} \propto \frac{e^2 v}{bv + e^2}$. Hoc est, AP $\propto v \propto \frac{be}{2b + e}$ seu $\frac{by}{2b + y}$, & PL $\propto y - v \propto \frac{by + y^2}{2b + y}$. Cæterùm quoniam LM media

 est

est proportionalis inter P L & L N, erit L N $\infty \frac{2by^3+y^4}{b^3+3b^2y+3by^2+y^3}$. Quod erat faciendum. Vel etiam sic, imaginando curvam A M tangi à circulo, cujus radius est M N. Omnino ut in hujus Geometriæ Methodo supponitur factum.

Igitur quoniam habemus $\frac{y^2}{y+b} \infty x$, ac proinde $x^2 \infty \frac{y^4}{y^2+2by+b^2}$, supponamus, quemadmodum hæc Geometria requirit, A N $\infty\, v$, & M N $\infty\, s$, & erit quadratum ex L M, hoc est, x^2, $\infty\, ss-vv+2vy-yy$, ac idcirco $\frac{y^4}{y^2+2by+b^2} \infty\, ss-vv+2vy-yy$. Vnde æquatione ope multiplicationis ordinatâ, divisâque totâ summâ per 2, exurget æquatio talis:

$$\begin{array}{lllll} y^4+by^3 & +\frac{1}{2}vvyy & +bvvy & +\frac{1}{2}bbvv \infty 0. \\ \quad -v & +\frac{1}{2}bb & -bbv & -\frac{1}{2}bbss \\ & -2bv & -bss & \\ & -\frac{1}{2}ss & & \end{array}$$

Iam verò multiplicando $yy-2ey+ee \infty 0$ per $yy+fy+gg$, ut alteri reddatur similis, proveniet hæc æquatio:

$$\begin{array}{llll} y^4+fy^3 & +ggyy & -2eggy & +eegg \infty 0. \\ \quad -2e & -2ef & +eef & \\ & +ee & & \end{array}$$

Quæ si comparetur cum præcedente, quantitates secundi termini præbebunt $f \infty\, b+2e-v$; ultimi $gg \infty \frac{b^2v^2-b^2s^2}{2e^2}$; & tertii $\frac{b^2v^2-b^2s^2}{2e^2}-2be-3ee+2ev \infty \frac{1}{2}vv+\frac{1}{2}bb-2bv-\frac{1}{2}ss$. Ac proinde si multiplicemus totum per $2ee$, producetur $+bbvv-bbss-4be^3-6e^4+4ve^3 \infty\, vvee+bbee-4bvee-ssee$, sive $bbvv-4be^3-6e^4+4ve^3-vvee-bbee+4bvee \infty\, bbss-eess$, & per consequens

$$\frac{\begin{array}{llll} -6e^4 & +4ve^3 & -vvee & +bbvv \infty\, ss. \\ & -4b & +4bv & \\ & & -bb & \end{array}}{bb-ee}$$

Quartus terminus dabit

$$\frac{-b^2v^2+b^2s^2}{e}+bee-vee+2e^3 \infty +bvv-bbv-bss.$$

Vnde multiplicando totum per e, fiet

$$-bbvv+bbss+be^3-ve^3+2e^4 \infty +bvve-bbve-bess,$$

ac per

ac per consequens

$$\frac{\begin{array}{llll} -2e^4 & +ve^3 & +bvve & +bbvv \\ & -b & -bbv & \end{array}}{bb+be} \infty ss.$$

Quocirca habebimus

$$\frac{\begin{array}{llll} 6e^4 & +4ve^3 & -vvee & +bbvv \\ & -4b & +4bv & \\ & & -bb & \end{array}}{bb-ee} \infty \frac{\begin{array}{llll} -2e^4 & +ve^3 & +bvve & +bbvv. \\ & -b & -bbv & \end{array}}{bb+be}$$

Hinc multiplicando per crucem, ut in fractionibus, & auferendo utrinque producta æqualia, habebitur

$$\begin{array}{lllllll} 2e^6 & +7be^5 & +8bbe^4 & +4b^3e^3 & -4b^3vee & -b^4ve & \infty\ 0. \\ & -v & -4bv & -6bb & +b^4 & & \end{array}$$

Quam æquationem si dividamus per $ee+be$, orietur

$$\begin{array}{llllll} 2e^4 & +5be^3 & +3bbee & -3bbve & -b^3v & \infty\ 0: \\ & -v & -3bv & +b^3 & & \end{array}$$

ac per consequens

$$2e^4 + 5be^3 + 3bbee + b^3e \infty b^3v + 3bbev + 3beev + e^3v.$$

ac demum $\frac{2e^4 + 5be^3 + 3b^2e^2 + b^3e}{b^3 + 3b^2e + 3bee + e^3} \infty v$.

Vbi si in locum e substituatur y, atque ex hac summa deinde auferatur linea AL $\infty\ y$, relinquetur LN $\infty \frac{2by^3 + y^4}{b^3 + 3bby + 3byy + y^3}$, ut supra. Vbi notandum, lineam hanc curvam non aliam esse quàm Hyperbolam, supra à nobis constructam.

AD PAGINAM 75 & 76.

DEmonstranda hìc est operatio, quam hæc Geometria nos docet, cùm radicem incognitam alicujus æquationis multiplicare volumus per certam aliquam quantitatem aut numerum cognitum. Proponatur æquatio $x^3 - cx^2 + ddx - b^3 \infty\ 0$, cujus radicem incognitam x per lineam b multiplicare oporteat. Supponatur $y \infty\ xb$, & fiet $\frac{y}{b} \infty\ x$, ideoque $\frac{y^2}{b^2} \infty\ x^2$, nec non $\frac{y^3}{b^3} \infty\ x^3$. Proinde si substituamus in æquatione præcedente $\frac{y}{b}$ loco x, & $\frac{y^2}{b^2}$ loco x^2, itemque $\frac{y^3}{b^3}$ loco x^3, erit sequens æquatio $\frac{y^3}{b^3} -$

 $\frac{cy^2}{b^2}$

$\frac{cy^2}{b^2} + \frac{d^2y}{b} - b^3 \infty 0$, æqualis præcedenti. Vnde multiplicando totum per b^3, producetur $y^3 - cbyy + ddbby - b^3b^3 \infty 0$. Evidens autem eſt, idem productum inveniri, ſi in æquatione propoſita ponamus y, & quadratum ejus yy, cubumque y^3, loco x, x^2, x^3: atque deinde ſecundum terminum multiplicemus per b, tertium per b^2, & quartum per b^3. omnino ut hæc Geometria docet. Vbi, poſtquam ſubſtituimus $\frac{y}{b}$, $\frac{y^2}{b^2}$, & $\frac{y^3}{b^3}$ loco x, x^2, & x^3, ad multiplicandum totum per b^3, ſufficit auferre denominatorem, qui ab b denominatur, atque tantùm reliquum ſecundi termini multiplicare per b, reliquum tertii per bb, & reliquum quarti per b^3: quandoquidem à terminis, ſecundo & tertio, auferendo denominatores bb & b, ipſi eatenus ſunt multiplicati. Adeò ut ſufficiat multiplicare reliquum ſecundi termini per b, & reliquum tertii per bb, at ipſum quartum per b^3, cum hic denominatorem ab b denominatum, per quem ſic auferendo fuiſſet multiplicatus, non admittat. non aliter quàm hæc Geometria docet. Quæ demonſtratio & methodus in altioribus quoque æquationibus locum obtinent, in quibus radix x plures dimenſiones, quàm in æquatione propoſita, admittit.

Notandum autem eſt, cùm termini æquationis hujus ſic productæ non ſinguli æquè multas literas ſeu dimenſiones habent, lineam, quam pro unitate ad libitum ſumpſimus, & cujus ratione ſuppoſuimus $\frac{y}{b} \infty x$, toties in terminis, qui pauciores dimenſiones ſeu literas habent, ſubintelligendam eſſe, quoties fuerit opùs. Adeò ut ejuſdem lineæ beneficio termini abbreviari poſſint, ſic ut ſinguli non niſi tres literas ſeu dimenſiones admittant, ac præterea ut illius ope, poſtquam radix una y fuerit cognita, mediante æquatione $\frac{y}{b} \infty x$, cognoſcatur quoque radix altera x.

Ad hæc ſupponere quoque poſſumus $yy \infty xb$, ita ut habeamus $\frac{y^2}{b} \infty x$, & $\frac{y^4}{b^2} \infty x^2$, nec non $\frac{y^6}{b^3} \infty x^3$; quibus, ut ſupra, ſubrogatis, habebimus $\frac{y^6}{b^3} - \frac{cy^4}{b^2} + \frac{d^2y^2}{b} - b^3 \infty 0$. Ac proinde multiplicando totum per b^3, fiet $y^6 - cby^4 + ddbbyy - b^3b^3 \infty 0$. Vnde perſpicuum fit, quòd ſubſtituendo, juxta præſcriptum hujus Geometriæ, yy pro x, quadratum ejus y^4 pro x^2,

& ipſius

& ipsius cubum y^6 pro x^3, atque multiplicando secundum terminum per b, tertium per bb, & quartum per b^3, eandem consecuturi simus æquationem. ut ex demonstratione superiori facile est colligere; & omnes quidem termini æquè multas habebunt literas seu dimensiones. Et tantum de operatione per literas.

Quod autem spectat ad operationem, quæ fit, cùm radix incognita per numerum aliquem est multiplicanda; ipsa eidem demonstrationi innititur.

Esto eadem, quæ supra, æquatio: $x^3 - cxx + ddx - b^3 \infty 0$; & oporteat radicem incognitam x multiplicare per 3. Supponatur $y \infty 3x$, eritque $\frac{y}{3} \infty x$, & $\frac{y^2}{9} \infty x^2$, nec non $\frac{y^3}{27} \infty x^3$. Quibus, ut supra, substitutis, fiet $\frac{y^3}{27} - \frac{cy^2}{9} + \frac{d^2y}{3} - b^3 \infty 0$. Ac proinde multiplicato toto per 27, exsurget $y^3 - 3cyy + 9ddy - 27b^3 \infty 0$. Quæ æquatio etiam invenitur, si in æquatione proposita substituamus y, quadratum ejus yy, & ipsius cubum y^3, loco x, quadrati x^2, & x^3 cubi; atque deinde secundum terminum per 3 multiplicemus, tertium per 9, & quartum per 27, ex præscripto hujus Geometriæ. Quâ quidem operatione termini omnes, ob rationes supra allatas, æquè multas dimensiones acquirent.

Idem intelligendum est de exemplo in hac Geometria proposito, $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27}\sqrt{3} \infty 0$. Etenim supposito $y \infty x\sqrt{3}$, erit $\frac{y}{\sqrt{3}} \infty x$, & $\frac{y^2}{3} \infty x^2$, nec non $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} \infty x^3$. Vnde si in æquatione proposita substituamus $\frac{y}{\sqrt{3}}$, quadratum ejus $\frac{y^2}{3}$, & ipsius cubum $\frac{y^3}{3\sqrt{3}}$, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3; invenietur $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} - \frac{yy\sqrt{3}}{3} + \frac{26y}{27\sqrt{3}} - \frac{8}{27\sqrt{3}} \infty 0$. Atque adeò si totum multiplicemus per $3\sqrt{3}$, habebitur $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} \infty 0$. Eadem nempe æquatio, quæ obtinetur operando juxta hujus Geometriæ methodum, quemadmodum supra fuit ostensum.

Non secus fiet demonstratio, si de radice incognita per quantitatem aliquam cognitam dividenda agatur. Proponatur namque æquatio $x^3 - cxx + ddx - b^3 \infty 0$, sitque x dividenda per b. Sup-

Supponatur $y \propto \frac{x}{b}$, eritque $yb \propto x$, & $y^2 b^2 \propto x^2$, nec non $y^3 b^3 \propto x^3$. Quæ si in æquatione proposita substituantur, fiet $y^3 b^3 - c b^2 y^2 + d^2 b y - b^3 \propto 0$. Ac proinde si totum dividatur per b^3, orietur $y^3 - \frac{cy^2}{b} + \frac{d^2}{b^2} y - \frac{b^3}{b^3} \propto 0$.

Manifestum autem est, idem nos obtenturos, si in æquatione proposita subrogemus y, quadratum ejus yy, & ipsius cubum y^3, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3, atque sic deinde secundum terminum dividamus per b, tertium per bb, & quartum per b^3: quoniam in superiori operatione, ubi bb in secundo termino, & b in tertio reperitur, perspicuum est, quòd, ad dividendum omnes terminos per b^3, auferendo toties b, quoties in ipsis reperitur, opùs tantùm sit dividere reliquum secundi termini per b, reliquum tertii per bb, ipsum autem quartum terminum per b^3, quippe qui quantitatem b non comprehendit. Omnino ut hæc Geometria requirit.

Quia verò æquationis hujus sic productæ termini singuli non æquè multas habent literas seu dimensiones; igitur ut æquales numero reddantur, oportebit in illis, qui pauciores dimensiones habent quàm requiritur, toties literam aliquam subintelligere, quoties erit opùs, quæ lineam pro unitate ad libitum sumptam designet, & cujus ratione supposuimus $y \propto \frac{x}{b}$. vel potiùs beneficio hujus lineæ, quam pro unitate assumpsimus, & linearum cognitarum, efficere, ut singuli æquationis termini tres literas seu dimensiones habeant. Id quod facile est. Etenim cognitâ, v.g. lineâ $\frac{c}{b}$, pro unitate acceptâ, possumus ad eandem denotandam loco $\frac{c}{b}$ sumere p. atque ita de cæteris. Adeò ut, cognita radice y, ejusdem unitatis ope cognoscatur quoque x, per æquationem hanc $y \propto \frac{x}{b}$, vel $y\,b \propto x$.

Nec aliter in numeris veritatem hujus Geometriæ Methodi ostendemus. Proponatur enim eadem æquatio, quæ supra, $x^3 - c x^2 + d.d x - b^3 \propto 0$, & oporteat radicem incognitam x dividere per 3. Suppositâ igitur $y \propto \frac{x}{3}$, fiet $3y \propto x$, & $9yy \propto x^2$, nec non $27\,y^3 \propto x^3$. Quæ si substituantur in æquatione proposita, habebitur $27y^3 - 9cyy + 3ddy - b^3 \propto 0$. Ac proinde dividendo totum

totum per 27, orietur $y^3 - \frac{1}{3} cyy + \frac{1}{9} ddy - \frac{1}{27} b^3 \infty 0$. Quæ æquatio quoque invenietur, si procedamus juxta hujus Geometriæ Methodum: subrogando nimirum y in æquatione proposita, quadratum ejus yy, & ipsius cubum y^3, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3: & dividendo deinde secundum terminum per 3, tertium per hujus quadratum 9, & quartum per ipsius cubum 27. Eadem demonstratio locum obtinet, si in æquatione radix incognita plures dimensiones habuerit.

AD PAGINAM 79, & sequentes.

PRoponatur $x^4 * + px^2 + qx - r \infty 0$, & supponatur juxta præscriptum hujus Geometriæ $x^2 + yx + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} p - \frac{q}{2y} \infty 0$, eritque $x^2 + \frac{1}{2} yy + \frac{1}{2} p \infty \frac{q}{2y} - yx$, ac proinde quadratum unius partis æquale quadrato partis alterius, hoc est, $x^4 + yyxx + \frac{1}{4} y^4 + px^2 + \frac{1}{2} pyy + \frac{1}{4} pp \infty \frac{q^2}{4y^2} - qx + yyx^2$, & consequenter $x^4 + \frac{1}{4} y^4 + px^2 + \frac{1}{2} pyy + \frac{1}{4} pp + qx - \frac{q}{4y^2} \infty 0$. Ex qua æquatione si tollatur prima $x^4 * + pxx + qx - r \infty 0$, relinquetur $\frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{2} py^2 + \frac{1}{4} pp + r - \frac{q^2}{4y^2} \infty 0$. Unde multiplicando totum per $4yy$, exsurget $y^6 + 2py^4 \begin{matrix} + p^2 \\ + 4r \end{matrix} yy - qq \infty 0$. Quod erat demonstrandum.

Eâdem ratione demonstratio fiet secundùm omnes variationes signorum $+$ & $-$, atque observationes in hac Geometria expositas. In cujus rei exemplum duorum adhuc sequentium casuum demonstrationem subjiciemus.

Sit æquatio proposita $x^4 * - px^2 + qx - r \infty 0$. Si ergo juxta hanc Geometriam supposuerimus $x^2 + yx + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} p - \frac{q}{2y} \infty 0$, habebimus $x^2 + \frac{1}{2} yy - \frac{1}{2} p \infty \frac{q}{2y} - yx$. Unde & quadratum unius partis æquale erit quadrato alterius partis, hoc est, $x^4 + yyx^2 + \frac{1}{4} y^4 - px^2 - \frac{1}{2} pyy + \frac{1}{4} pp \infty \frac{q^2}{4y^2} - qx + yyxx$. Et per consequens $x^4 + \frac{1}{4} y^4 - pxx - \frac{1}{2} pyy + \frac{1}{4} pp + qx - \frac{q}{4y^2} \infty 0$. E qua si auferatur prima $x^4 * - pxx + qx - r \infty 0$,

relinquetur $\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + r - \frac{q^2}{4y^2} \infty 0$. Quare si totum multiplicemus per $4yy$, inveniemus $y^6 - 2py^4 \begin{matrix}+p^2\\+4r\end{matrix} yy - qq \infty 0$. Quod demonstrare oportebat.

Iam verò si ponamus $x^4 * + px^2 - qx + r \infty 0$, supponendo secundùm hanc Geometriam $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$; erit $x^2 + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p \infty \frac{q}{2y} + yx$. Vnde quadratum prioris partis æquale erit quadrato posterioris, hoc est, $x^4 + yyx^2 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp \infty yyx^2 + qx + \frac{qq}{4yy}$. Ac per consequens, $x^4 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - qx - \frac{qq}{4y^2} \infty 0$. E qua si tollatur prima $x^4 * + px^2 - qx + r \infty 0$, remanebit $\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - r - \frac{qq}{4yy} \infty 0$. Atque ideo si totum multiplicetur per $4yy$, invenietur $y^6 + 2py^4 \begin{matrix}+p^2\\-4r\end{matrix} yy - qq \infty 0$. Quod erat demonstrandum.

Non secus demonstrabuntur omnes reliqui casus secundùm utramlibet harum suppositionum: nimirum, $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \infty 0$, aut $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \infty 0$, observando tantùm signa + & —, quemadmodum hæc Geometria docet. Cujus operationis ope in genere æquationes omnes, in quibus radix incognita 4^{or} habet dimensiones, ad formam, in hac Geometria propositam, reduci possunt: nimirum, $+y^6 . 2py^4 \begin{matrix}+p^2\\.4r\end{matrix} yy - qq \infty 0$. signa + & — quæ præcipit, observando, sicut demonstravimus. Quo fit, ut, si divisionis beneficio æquationem propositam ad eam formam reducere possimus, ita ut post divisionem radix ejus y plures quàm duas dimensiones non admittat, ipsa per Geometriam communem, juxta præscripta paginæ 6 & 7 hujus Geometriæ inveniri possit. Quâ inventâ, mediantibus æquationibus $x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \infty 0$, & $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy . \frac{1}{2}p . \frac{q}{2y} \infty 0$, (observando signa + & —, ponenda locis, ubi sunt omissa) invenietur quoque radix x, cujus loco in altera æquatione pro radice supposueramus y. At verò si æquatio supra

ſupra inventa, denominata à radice y, ſic dividi nequeat, tunc conſiderare illam poterimus, velut tres duntaxat dimenſiones habentem, ſupponendo ſcilicet $z \propto yy$, ipſamque ſubſtituendo in æquatione; adeò ut habeamus $z^3 - {}^2 p z^2 \begin{smallmatrix}+pp\\ .4r\end{smallmatrix} z - qq \propto 0$. Quæ, obſervatis iiſdem ſignis + & —, quæ in altera æquatione reperiuntur, & ſublato ſecundo termino, per id, quod pag. 73 dictum eſt, reducetur ad formam aliquam illarum trium, quæ habentur paginâ 93, ad inveniendam deinde radicem ejus z per Geometriam Solidorum, juxta pag. 85, & ſequentes. Quæ certè eadem futura eſt quæ yy, quâ cognitâ innoteſcet & y. Cujus ope atque duarum ſuperiorum æquationum tandem invenietur x.

Verùm enimverò obſervandum eſt, in omnibus præcedentibus operationibus utendum eſſe eâdem lineâ, quæ pro unitate eſt accepta, ſi illam determinamus, & uſurpamus ad æquationem propoſitam reducendam ad ſuperioris formam, nempe: $x^4 * px^2 . qx . r \propto 0$. obſervando ſigna + & —.

Verum equidem eſt, quòd, poſtquam æquationem hanc ad præcedentis formam reduximus, quæ à radice y ſit denominata, nimirum ad æquationem $y^6 . 2py^4 \begin{smallmatrix}+p^2\\ .4r\end{smallmatrix} yy - qq \propto 0$, quæque dividi ſeu reduci non poſſit, ita ut radix ejus y plures quàm duas dimenſiones habeat, non teneamur ulteriùs progredi: (ſiquidem illo caſu Problema non Planum, ſed Solidum exiſtit, juxta pag. 80) atque tunc contenti eſſe poſſimus æquatione primâ $x^4 * px^2 . qx . r \propto 0$ (cum per illam invenire poſſimus radicem x mediante Geometriâ Solidorum, ſecundùm paginam 85 & ſequentes): Attamen nihilominus operatione præcedente, quam explicavimus, uti poſſumus, ſaltem ut oſtendatur veritas ejus, quod habetur pag. 93 & 94, ubi dicitur, quòd Problemata omnia, quorum difficultates ad æquationem, quæ ultra quadrato-quadratum non aſcendit, reducuntur, ſemper ad formam aliquam earum, quæ paginâ 93 proponuntur, reduci queant.

AD PAGINAM 93.

QVandoquidem ex eo, quod in hac Geometria oſtenſum atque ſupra adnotatum eſt, liquet, æquationes omnes, quarum difficultates ultra Quadrato-quadratum aut Cubum non aſcen-

ascenduñt, reduci posse ad aliquam formam earum, quæ hâc paginâ proponuntur: exhibenda tantùm restat demonstratio radicum, quæ ex ipsis, secundùm Cardani regulas, quas super hac re in medium affert Capite secundo libri ejus, quem de Arte Magna seu Regulis Algebraïcis inscripsit, educuntur. Cum hoc ipsum difficultatem fortè non exiguam parere posset iis, qui in eundem locum aliquando inciderent, quippe qui à Speciosæ Algebræ, & mutuæ inter Arithmeticam & Geometriam relationis atque convenientiæ ignaris, non facilè percipiatur. Quocirca ut veritas extractionis harum radicum expendatur, demonstrabimus primùm sequens

LEMMA.



SEctâ utcunque lineâ A C in B, ostendendum est: Cubum lineæ A B, unà cum cubo lineæ B C, & triplo producto linearum A C, B C, A B, simul æquari cubo lineæ A C.

Sit A B ∞ a, B C ∞ b, eritque A C ∞ $a+b$. Productum linearum A C, B C, A B, erit $baa+bba$, cujus triplum $3\,baa + 3\,bba$. Huic si addantur cubi linearum A B, B C, fiet $a^3 + 3\,baa + 3\,bba + b^3$. Et manifestum est, summam hanc æqualem esse cubo lineæ A C.

Demonstrato itaque hoc Lemmate, habebitur primo loco

$z \infty \sqrt{C.\, +\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.\, -\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$.

Hinc in figura adjecta supponendo binomium

$\sqrt{C.\, +\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$ æquale lineæ A C, & residuum

$\sqrt{C.\, -\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$ æquale lineæ B C, erit eorum differentia $\sqrt{C.\, +\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$,

$-\sqrt{C.\, -\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}}$ æqualis lineæ A B. Iam verò statuendo A B ∞ z, erit differentia Cuborum ex his radicibus (nimirum differentia inter cubum $+\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}$, & cubum $-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{27}p^3}$, (auferendo hunc ab illo) æqualis q. Quæ propterea æqualis erit differentiæ inter cubum lineæ

neæ B C. Atqui cubus lineæ A B, & triplum productum linearum A C, B C, A B simul, æquantur eidem differentiæ q, (siquidem cum cubo lineæ B C componunt cubum lineæ A C). Erit itaque z^3, cubus videlicet lineæ A B, unà cum triplo producto linearum A C, B C, A B, æqualis q.

Vt autem habeatur hoc productum, multiplicandum est binomium $\sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, quod æquatur lineæ A C, per residuum $\sqrt{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, quod æquale est lineæ B C. Hinc cum $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$ in se multiplicatum faciat $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$, ac $+\frac{1}{2}q$ in $-\frac{1}{2}q$ faciat $-\frac{1}{4}qq$; quæ producta simul addita faciunt $\frac{1}{27}p^3$ (siquidem $+\frac{1}{4}qq$ & $-\frac{1}{4}qq$ addendo evanescunt): & porrò producta, quæ fiunt ex $+\frac{1}{2}q$ & $-\frac{1}{2}q$ in $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, se mutuò destruant: Erit totum productum $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$ seu $\frac{1}{3}p$, radix scilicet cubica ex $\frac{1}{27}p^3$. quandoquidem quæstio erat de multiplicandis radicibus cubicis. Vnde triplum productum erit p, quod si multiplicetur per A B, hoc est, per z, fiet pz, æquale triplo producto linearum A C, B C, A B. Et per consequens $z^3 + pz \propto q$, vel $z^3 \propto -pz + q$. Quod erat demonstrandum.

Sit jam secundo loco

$z \propto \sqrt{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C. + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

& supponatur prima radix cubica (quæ binomium est) in figura præcedente æqualis lineæ A B; secunda autem (quæ residuum est) æqualis lineæ B C; eritque summa cuborum utriusque lineæ æqualis q. Porrò supponendo lineam A C $\propto z$, auferendoque ex ejusdem cubo z^3, triplum productum linearum A B, B C, & z, relinquentur cubi linearum A B & B C, qui quidem simul sumpti ipsi q sunt æquales. Est autem productum ex A B, B C, hoc est, quod fit ex binomio in residuum, $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$, seu $\frac{1}{3}p$. Nam cum multiplicando $+\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ per $-\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}$ (unâ radice existente signo $+$ adfectâ, alterâ verò signo $-$) producatur utriusvis quadratum affectum signo $-$, nimirum $-\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$, & utramque radicem per $+\frac{1}{2}q$ multiplicando, producta evanescant; restat tantum $+\frac{1}{2}q$ in se multiplicandum. Quare cum productum illud sit $+\frac{1}{4}qq$, & alterum productum inventum sit $-\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3$; erit totum productum $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$ seu

seu $\frac{1}{3}p$, sicut diximus, ac proinde ejus triplum p. Quod si rursus multiplicetur per z, producetur pz, æquale triplo producto linearum A B, B C, A C: & per consequens $z^3 - pz \infty q$, hoc est, $z^3 \infty * + pz + q$. Quod erat demonstrandum.

Adduxi autem demonstrationem extractionis harum radicum, quòd contemplatio earum atque inventio pulcherrimæ mihi sint visæ. Verùm quantùm ad praxin, cùm Geometricè æquationum hoc loco propositarum radices sunt extrahendæ; ejus sanè methodus, quæ generalis atque facilis est, quàm optimè in hac Geometria demonstrata cernitur. Si verò Arithmeticè illas extrahere lubuerit, multò id faciliùs fiet juxta methodum à Vieta in tractatu de Numerosa Potestatum Resolutione traditam, quàm per hasce regulas Cardani.

FINIS.



FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN
IN
GEOMETRIAM
RENATI DES CARTES
COMMENTARII.



ARGVMENTVM PRIMI LIBRI.

PRimo libro Autor viam quodammodo aperit ad suam Methodum, quâ in resolvendis & construendis Geometriæ Problematîs utitur, quamque tribus hisce libris est complexus. Quæ est, ut certarum notarum sive characterum beneficio, quibus tum data tum quæsita lineæ designantur, difficultates omnes, quæ in iisdem Problematîs enodandæ veniunt, ad ejusmodi terminos reducantur, ut deinde ad illorum constructionem non nisi rectarum quarundam linearum longitudinem quærere sit opùs. Ad quas inveniendas, docet, operationes omnes, quæ circa lineas hasce, ut cognitæ fiant, sunt instituendæ, ad 4 vel 5 diversas, quemadmodum in Arithmetica, revocari posse: quæ sunt, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, & Radicum Extractio. Quæ quâ ratione Geometricè fiant, deinceps explicat. Vbi porrò observandum venit, quòd, postquam hi Arithmetices termini in Geometriam sunt introducti, ad operationes hasce in lineis æquè instituendas atque in numeris, consentaneum sit rectam lineam, quæ unitatis vicem gerat, assumere, & ad eandem reliquas referre. Id quod communiter liberum est, cum quamlibet lineam pro ea accipere liceat.

Quibus explicatis, ostendit, quo pacto notis atque literis in Geometria sit utendum ad prædictas lineas breviter designandas, earumque operationes facilè indicandas: ut hâc ratione diversæ earum relationes conspicuæ sint, atque difficultas omnis, verborum involucris exuta, quàm simplicissimè ob oculos poni possit. Et quia hæc Methodus in resolvendis Geometriæ Problematîs requirit, ut difficultates omnes, quæ in illis evolvendæ occurrunt, ad unum genus Problematum reducantur, nempe, ut quæratur tantummodo valor quarundam linearum rectarum, quæ alicujus æquationis sint radices: idcirco docet, quo pacto Problema aliquod propositum perducatur ad æquationem, supponendo illud ipsum ut jam factum. Ac deinde, cum Aequatio certum sit medium quo Problema solvitur, refert totidem æquationes inveniendas esse, quot in eo supposita fuerint incognitæ lineæ. Cum

autem hæc Methodus nullis Problematum finibus coërceatur, ipsaque non tantùm ad Problemata, in quibus de inveniendis quibusdam rectis lineis, aut etiam planis, solidísve quæstio est (quæ quidem facilè ad tales terminos reduci queunt, ut non nisi recta quædam linea invenienda sint) adplicari poßit; sed etiam ad Problemata, in quibus certi anguli dantur, vel angulorum inter sese comparatio facienda est; atque ad Problemata in quibus quædam puncta aut lineæ data sunt, & alia puncta inveniri debent, se extendat (siquidem in his à quæsitis punctis ad data, aut datarum rectarum terminos, aut etiam in datis angulis ad positione datas rectæ lineæ duci possunt, quæ quæsitorum punctorum loca determinant; in illis autem quæ dictorum angulorum vices gerant, sicut post exemplis planum fiet): facilè constat, illam non modò Veterum Analysin atque Recentiorum Algebram comprehendere; sed etiam ad id omne, ubi de quantitatum æqualitate vel proportione inquiritur, adhiberi posse, atque adeò tam generalem esse, ut nullum non suæ artis per universam Mathesin specimen edat.

Iam verò postquam Problema aliquod ad æquationem est perductum, ipsaque æquatio ad simplicißimos terminos reducta, si quidem id ipsum per Geometriam communem construi potest, hoc est, ut ad constructionem ejus non nisi rectis lineis atque circulis utamur, prout in superficie aliqua plana describuntur, docet, qualis tunc debeat esse æquatio, & quâ ratione radix ejus tam inveniri quàm exprimi poßit. Atque ita breviter, quidquid ad planorum Problematum constructionem spectat, absolvit.

Vt autem tum præceptionum harum usui locus sit, tum verò ejusdem Methodi facilitas in resolvendo ac construendo nobili aliquo Problemate eluceat, inquirendam sibi tandem proponit rationem componendi loci ad tres, quatuor, vel plures lineas: ad quam, velut scientiæ culmen, Veteres ut pervenirent, summâ curâ elaborarunt.

Et hoc quidem primi Libri Argumentum afferre visum fuit. Cæterùm loca difficiliora, quæ in eo illustranda esse duximus, ferè sunt sequentia.

COM-

COMMENTARII
IN
LIBRVM PRIMVM.



T *radicum extractio, quæ pro Divisionis quadam specie haberi potest.*] Quandoquidem eadem fermè proportio utrique operationi convenit. Est enim in Divisione, ut quotiens ad unitatem, sic dividendus ad divisorem. In extractione verò radicis quadratæ, ut radix, ceu quotiens, ad unitatem; ita datus numerus, ceu dividendus, ad radicem, ceu divisorem. Adeò ut radicis extractio divisionis species sit censenda, in qua divisor quotienti est æqualis; vel etiam, in qua radix inter datum numerum & unitatem est media proportionalis. A

Vel etiam si una sit, quæ vocetur unitas.] Per unitatem intellige lineam quandam determinatam, quæ ad quamvis reliquarum linearum talem relationem habeat, qualem unitas ad certum aliquem numerum. B

Vt eò commodiùs ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu assumere licet.] Sit enim, exempli gratiâ, datum aliquod rectangulum transmutandum in quadratum: si pro unitate sumatur latus unum, quod libuerit, & inter ipsum & reliquum inveniatur media proportionalis; erit ea latus quadrati, dato æqualis. Atque hâc ratione latus alterum vicem gerit alicujus numeri, è quo radix quadrata est extrahenda. Adeò ut manifestum sit, Problema propositum, nec non mediæ proportionalis inter duas datas lineas inventionem, nihil aliud esse, quàm si unâ lineâ assumptâ pro unitate, ex reliquâ lineâ tanquam numero extrahatur radix quadrata. C

Vt ad ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad alterutram, ut est altera ad unitatem, quod idem est atque multiplicatio.] In multiplicatione enim est: ut productum ad multiplicandum, D

ita multiplicans ad unitatem. Vel permutando, ut productum ad multiplicantem, sic multiplicandus ad unitatem.

E *Vel ut per ipsas inveniatur quarta, quæ sit ad unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Divisione.*] Est namque in Divisione, ut supra annotavimus, ut quotiens ad unitatem, sic dividendus ad divisorem. Ac proinde permutando, ut quotiens ad dividendum, sic unitas ad divisorem.

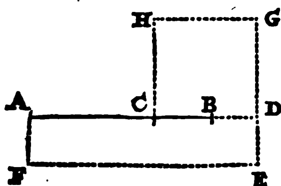
F *Vt si radix cubica sit extrahenda ex aabb — b, cogitandum est, quantitatem aabb semel divisam esse per unitatem, atque alteram quantitatem b bis per eandem esse multiplicatam.*] Puta unitatem, quæ hìc subintelligitur, esse c. Vnde si quantitas $aabb$, quæ unâ abundat dimensione, semel dividatur per c, fiet $\frac{aabb}{c}$; at verò altera quantitas b, quæ duabus deficit dimensionibus, ut æquales numero habeantur, bis multiplicetur per c, hoc est, per cc, fiet bcc: adeò ut tota quantitas sit $\frac{aabb}{c} - bcc$.

G *Resoluturus igitur aliquod Problema, considerabit illud primâ fronte ut jam factum, nominaq; imponet lineis omnibus, quæ ad constructionem ipsius necessariæ videbuntur, tam iis quæ incognitæ sunt, quàm quæ cognitæ. Deinde, nullo inter lineas hasce cognitas & incognitas facto discrimine, evolvenda est Problematis difficultas; eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ lineæ à se invicem dependent, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur: æquales enim sunt termini modi unius, terminis modi alterius. Iam verò tot hujusmodi Æquationes invenire oportebit, quot suppositæ fuerunt incognitæ lineæ.*] Quæ verba ut rectè percipiantur, unum atque alterum Problema proponamus.

PRO-

PROBLEMA 1mum.

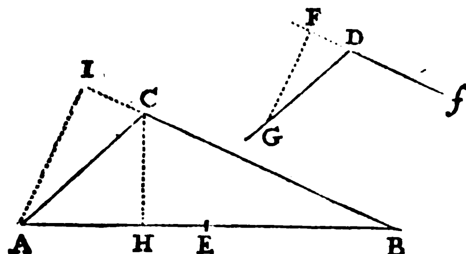
DAtam rectam lineam A B, utcunque sectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum sub A D, D B comprehensum, æquetur quadrato rectæ C D.



Considero rem velut jam factam, hoc est, suppono rectangulum A D E F æquari quadrato C D G H, quod faciendum proponitur. Deinde, cum omnis quæstio Geometrica eò reduci possit, ut non nisi longitudo alicujus vel aliquarum rectarum ex aliis rectis sit quærenda, & nemo non videat, ad ejus constructionem tantummodo quærendam esse lineam B D, omnemque difficultatem in ea invenienda esse sitam; nomina impono lineis tam datis A C, C B, quàm quæsitæ B D. Proinde, pro linea A C pono quantitatem cognitam a; pro C B, b; at pro B D quantitatem incognitam x, fietque A D $a+b+x$, C D autem $b+x$. Quibus peractis, ut ad Æquationem perveniatur, & habeam rectangulum A D E F, duco A D, hoc est, $a+b+x$ in D E seu D B, hoc est, x, quod proinde erit $ax+bx+xx$. Similiter ut inveniatur quadratum C D G H, multiplico C D, hoc est, $b+x$ in se, fietque $bb+2bx+xx$. Ita ut habeatur æquatio $ax+bx+xx \propto bb+2bx+xx$. Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx, sic ut ex una parte remaneat ax, & ex altera $bb+bx$; tum translato bx ad alteram partem sub contrario signo, erit æquatio $ax-bx \propto bb$. Cujus utrâque parte divisâ per $a-b$, provenit $x \propto \frac{bb}{a-b}$. E quibus patet, lineam quæsitam B D inveniri per divisionem quadrati lineæ C B per excessum, quo linea A C superat ipsam C B, vel etiam per hunc excessum, tanquam primam, & lineam C B, tanquam secundam, inveniendo tertiam proportionalem B D.

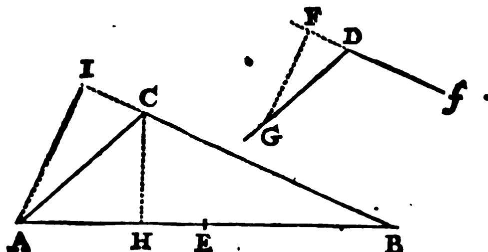
PROBLEMA 2dum.

DAtâ rectâ lineâ terminatâ AB, ex terminis ejus A & B duas rectas lineas inflectere AC, CB, continentes angulum ACB, æqualem dato D, ut quæ ab ipsis fiunt quadrata, habeant ad triangulum ACB rationem datam, ut 4 d ad a.



Factum sit quod quæritur, & ex puncto C demittatur super rectam AB perpendicularis CH. Quoniam igitur data sunt puncta A & B; & quidem ad trium punctorum situm determinandum nihil simpliciùs haberi potest, quàm si noscantur tres lineæ AH, HC, & HB: facilè constat, quæstionem propositam eò reduci, ut inveniendæ tantùm sint duæ lineæ AH, HC, seu BH, HC; atque adeò duas supponendas esse lineas incognitas. Quia verò, sectâ lineâ AB bifariam in E, datum est punctum E, atque ideo ipsa AE vel EB, quam voco a, atque operatio aliquantò brevior evadit, si loco dictarum AH, HC, seu BH, HC, quæramus duas lineas HE, HC: Idcirco pro HE pono quantitatem incognitam x, & pro HC quantitatem incognitam y. Unde pro AH invenitur $a - x$, & pro HB $a + x$. Jam inter lineas notas & ignotas nullo facto discrimine, directè percurrenda est Problematis difficultas, & videndum, quomodo una ex aliis sit deducenda, donec tandem ad Æquationem deveniatur. Primò igitur quadratum ex AC erit $aa - 2ax + xx + yy$: quo-

quoniam componitur ex duobus quadratis linearum A H & H C. Eodem modo quadratum lineæ C B erit $aa + 2ax + xx + yy$: quia æquale est binis quadratis ex B H & H C. Atque adeò summa quadratorum ex A C, C B erit $2aa + 2xx + 2yy$. Quæ cum eam rationem habeat ad triangulum A B C, quod est ay, (utpote æquale semissi ejus, quod producitur ex basi A B & perpendiculo C H,) quam habet $4d$ ad a: erit productum ex $2aa + 2xx + 2yy$ in a æquale ei, quod provenit ex ay in $4d$, hoc est, habebitur Æquatio inter $2a^3 + 2axx + 2ayy$ & $4ady$. Sed quandoquidem duæ suppositæ sunt incognitæ lineæ x & y, alia adhuc superest Æquatio invenienda. Quam ut inveniamus, considerandus insuper est angulus D, cui æqualis supponitur angulus A C B; qui si obtusus fuerit, produco lineam B C, donec ex puncto A in ipsam cadat perpendicularis A I, omnino ut factum est circa angulum D. Tum, quoniam datus est angulus D, dantur quoque rectæ D F & F G. Ac proinde si pro D F ponatur b, & pro F G c, gerent ipsæ vicem dati anguli D, fientque triangula A C I & G D F similia. Eâdem ratione similia erunt triangula H C B & A B I. Unde erit ut C B ad A B, sic C H ad A I, & B H ad B I. Quare si pro quadrato ex C B $\propto aa + 2ax + xx + yy$ brevitatis causâ scribatur ee, h. e., pro C B $\propto \sqrt{aa + 2ax + xx + yy}$ ponatur e; fiatque ut e ad $2a$, sic C H seu y ad A I: erit A I $\propto \frac{2ay}{e}$. Similiter ut e ad $2a$, sic B H, seu $a + x$, ad B I: erit B I $\propto \frac{2aa + 2ax}{e}$. Tum subductâ B C seu e ex B I seu $\frac{2aa + 2ax}{e}$, relinquitur C I $\frac{2aa + 2ax - ee}{e}$. Jam cum C I sit ad A I, hoc est, $\frac{2aa + 2ax - ee}{e}$ ad $\frac{2ay}{e}$, seu $2aa + 2ax - ee$ ad $2ay$, sicut D F ad F G, hoc est, b ad c: erit $2aac + 2acx - cee$, productum sub extremis, æquale $2aby$, ei, quod fit sub mediis. Quæ altera est Æquatio. Atque ad hæc facienda manuduxerunt nos præcepta jam tradita, ita ut nullæ partes Problematis sint omissæ. Et quicunque omnia penitiùs inspexerit, se suo marte propositæ quæstionis solutionem ex illis huc usque perducere potuisse judicabit. Difficultas enim tota jam à figuris ad numeros seu terminos Analyticos est traducta, ita ut, quæ supersunt, cuilibet obvia esse possint, etiamsi de lineis, punctis, angulisque ampliùs non

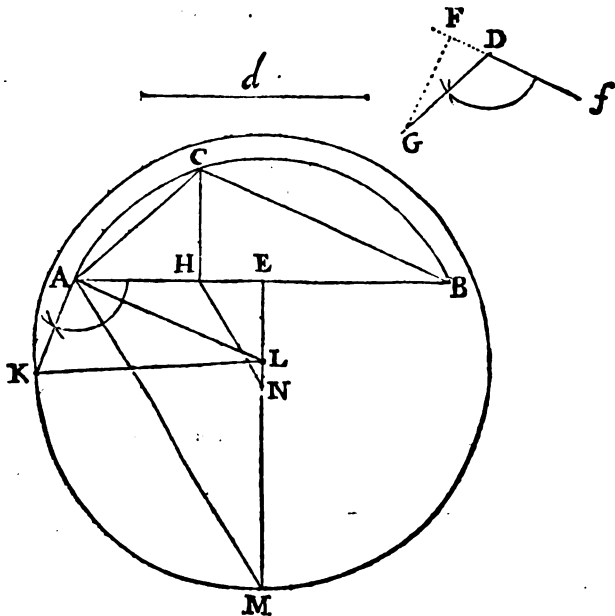


non cogitet. Inventis ergo tot Æquationibus, quot suppositæ fuerunt incognitæ lineæ; quoniam in utraque binæ reperiuntur quantitates incognitæ; hinc talis reductio fieri debet, ut ex una parte tantùm habeatur xx, ut sequitur. Quocirca cum primùm $2a^3 + 2axx + 2ayy$ æquetur $4ady$, dividatur utraque pars pêr $2a$, & fit æquatio inter $aa + xx + yy$ & $2dy$; & aa, yy in alteram partem translatis, inter xx & $2dy - yy - aa$. Deinde cum $2aac + 2acx - cee$ æquetur $2aby$, restituto valore quantitatis assumptæ ee, ipsoque ducto in $-c$, prodibit æquatio $aac - cxx - cyy \infty 2aby$. In qua si fiat porrò terminorum transpositio, ut cxx unam teneat Æquationis partem sub signo $+$ & reliqui partem alteram, atque utraque pars per c dividatur, proveniet Æquatio $xx \infty aa - yy - \frac{2a}{c}by$, seu $xx \infty aa - yy - 2fy$, (scribendo nempe $2f$ pro $\frac{2ab}{c}$: quandoquidem liberum est quolibet nomine datas quantitates insignire).

Reductâ ergo utrâque Æquatione inventâ ad eandem quantitatem xx, adæquandæ sunt reliquæ quantitates inter se, ut inveniatur inde quantitas incognita y. Quare cum $2dy - yy - aa$ æquetur $aa - yy - 2fy$, additis utrinque yy & aa, erit $2dy \infty 2aa - 2fy$, seu, $dy \infty aa - fy$: & translato $2fy$ ad alteram partem, factâque utrobique divisione per $d + f$, fiet $y \infty \frac{aa}{d+f}$. Inventâ autem quantitate y, non est difficile alteram quantitatem incognitam x invenire. Si enim in præcedenti æquatione $xx \infty 2dy - yy - aa$,

pro

pro y substituatur summa jam inventa $\frac{a^2}{d+f}$, & pro yy ejusdem summæ quadratum, nempe $\frac{a^4}{d^2+2df+f^2}$, invenietur $xx \propto \frac{a^2d^2-a^2f^2-a^4}{d^2+2df+f^2}$ & $x \propto \sqrt{\frac{a^2d^2-a^2f^2-a^4}{d^2+2df+f^2}}$. Ubi liquet, dd non debere esse minorem quàm $ff+aa$, cum aliàs Problema futurum esset impossibile. Cujus quidem constructio talis est.



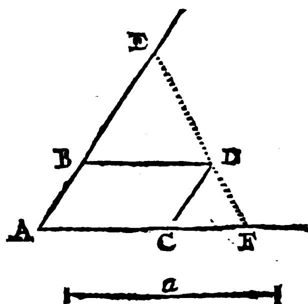
Facto angulo KAB æquali dato D, erigatur ex A ipsi KA perpendicularis AL, occurrens perpendiculari EL in L, centroque L intervallo rectæ d circulus describatur, secans KA, EL in K & M. Deinde assumptâ EN æquali KA, jungatur MA, & ex N agatur huic parallela NH, quæ ipsi AB occurrat in H. Postea descripto ex L intervallo LA circuli segmento ACB, ducatur ex H ipsi AB perpendicularis HC, occurrens cir-

cumferentiæ in C, ac jungantur A C, C B. Factumque erit, quod requirebatur.

GG *Vel si totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæstione desiderantur, omittatur, argumentum est, illam non penitus esse determinatam. Tunc enim ad arbitrium assumi possunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non respondet aliqua Æquatio.*] Quò cuivis hæc obvia sint, placuit ea per unum aut alterum Problema facile illustrare.

I PROBLEMA.

DAtis positione duabus rectis lineis concurrentibus A B, A C, punctum invenire intra ipsas D, à quo si ducantur duæ rectæ D C, D B ipsis A B, A C parallelæ, ut summa ipsarum D C, D B sit datæ rectæ a æqualis.



Ponatur factum quod quæritur, hoc est, suppositis rectis D C, D B ipsis A B, A C parallelis, statuantur & D C, D B simul sumptæ ipsi datæ a esse æquales. Hinc cum ad determinandum punctum D quærenda sit longitudo utriusque rectæ A C, C D seu utriusque A B, B D, pono pro una A C vel B D quantitatem incognitam x, & pro altera C D vel A B quantitatem incognitam y. Quibus ita positis, ut habeatur Æquatio, addendæ erunt tantùm duæ rectæ B D, D C, hoc est, x & y: eritque summa $x + y$ æqualis a, hoc est, erit $y \propto a - x$. Quoniam autem ad alteram Æquationem pro x inveniendam nullâ superest materia, cum conditiones in quæstione præstandæ jam omnes sint impletæ: argumentum est, illam non penitus esse determinatam. Quocirca cum in ipsâ una desit conditio, ut prorsus determinata existat, poterimus ad arbitrium pro quantitate incognita x, cui nulla respondet Æquatio, assumere lineam aliquam cognitam ipsâ a minorem, atque tot inde invenire puncta D, quot ipsi x diver-

diversos tribuerimus valores. Ubi notandum, quòd, postquam assumptæ fuerint rectæ A E, A F ipsi datæ *a* æquales, ac jungatur E F, puncta hæc omnia in rectam cadant lineam E F, adeoque punctum quotlibet in ea pro libitu sumptum quæsito satisfacere: cum, propter similia triangula A E F, & C D F, rectæ C D, C F (puncto D ubicunque in E F assumpto) haud aliter atque A E, A F semper sint æquales, ac proinde B D, D C simul eædem quæ A C, C F simul, hoc est, eadem quæ A F vel *a*.

Haud dissimilis erit quæstio, si punctum D inveniendum sit, ita ut ipsarum D C, D B differentia sit datæ rectæ *a* æqualis.

II PROBLEMA.

IN circulo A B C F erectâ super diametrum B F perpendiculari G D, circumferentiam hinc inde secante in C & A, & à B ad eam ductis B C, B D, quarum hæc circumferentiam secet in E, dantur B E ∞ *a*, & B C ∞ *b*: oporteatque invenire E D ∞ *x*.

Quoniam ad quæstionem hanc solvendam, supponendo eam, ut jam factam, necessariæ videntur lineæ B G ac diameter B F: hinc pro B G pono *y*, & pro B F pono *z*: eritque G F ∞ *z*—*y*. Deinde ut perveniatur ad Æquationem, considero lineam G D ipsi B F esse perpendicularem, hoc est, triangulum B G C esse rectangulum. Unde fit, ut, si quadratum ex B G ∞ *yy* auferam è quadrato ex B C ∞ *bb*, reliquum *bb*—*yy* sit æquale quadrato ex

ex G C. Quod idem & alio modo inveniri potest, considerando perpendicularem G D secare hinc inde circumferentiam in C & A. Quia enim hinc per 35 Tertii Elementorum rectangulum sub B G, G F est æquale rectangulo sub A G, G C, hoc est, quadrato ex G C: fit ut si multiplicavero G F $\infty z - y$ per B G ∞y productum $zy - yy$ sit denuo quadrato ex G C æquale. Habetur ergo Æquatio inter $bb - yy$ & $zy - yy$, hoc est, addendo utrobique yy, inter bb & zy. Porrò cum in hac quæstione tres suppositæ sint incognitæ lineæ x, y, & z, superest ut duas adhuc alias Æquationes inveniamus. Hinc, ductâ F E, quoniam, considerando lineam B D secare circumferentiam in E, similia sunt triangula B G D & B E F, erit ut B G ad B D, hoc est, y ad $a + x$; ita B E ad B F, hoc est, a ad z. Ac proinde, cum productum sub extremis sit æquale producto sub mediis, erit $zy \infty aa + ax$. Quæ altera est Æquatio. In qua si in locum zy subrogetur ejus valor ante inventus bb, habebitur $bb \infty aa + ax$, hoc est, transferendo aa in alteram partem, atque deinde utrobique dividendo per a, erit $x \infty \frac{bb - aa}{a}$. Quæ quantitas est lineæ E D, quam investigare intendebamus. Cæterùm, quia inventâ hâc lineâ E D ∞x, utraque reliquarum incognitarum B G & B F, per y & z designatarum, quæ ad eam inveniendam necessariæ videbantur, ad arbitrium sumi potest, cum in Problemate nulla ampliùs materia supersit, quâ perveniatur ad Æquationes, quibus utraque ipsarum determinari queat, atque idcirco difficultas omnis Problematis jam sit evoluta: indicio est, rectam E D eandem semper inveniri, etiamsi ad illam quærendam pro utraque linearum B G, B F diversa magnitudo accipiatur, hoc est, alius atque alius circulus adhibeatur: quandoquidem Problema, si de linearum B G, B F longitudine ex datis B E, B C investigandâ quæritur, haud determinatum existit, sed tantùm ipsius E D.

Qui plura in loci hujus illustrationem exempla desideret, videat quæ ad literam G secundi libri à nobis sunt allata.

GGG *Postea verò si plures adhuc supersint, ordine quoque utendum erit unaquâque Æquationum reliquarum, sive illam considerando separatim, sive ipsam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis.*] Sic, quoniam, reducto

ducto Problemate aliquo, in quo ad ipsum construendum tres supponendæ sunt incognitæ lineæ x, y, & z, ad duas Æquationes $xx \propto +2cx+bb$, & $yy \propto aa+2zx-xx$, pro incognita linea z,

$$xx \propto \begin{matrix} +2c & x & +bb \\ +2z & & -cc \\ & & -yy \\ & & -2cz \end{matrix}$$

cui nulla respondet Æquatio, ad arbitrium sumi potest linea cognita d: potero in locum duarum præcedentium Æquationum scribere $xx \propto +2cx+bb$, & $yy \propto aa+2dx-xx$. Hinc cum

$$xx \propto \begin{matrix} +2c & x & +bb \\ +2d & & -cc \\ & & -yy \\ & & -2cd \end{matrix}$$

duæ supersint lineæ inveniendæ x & y, ordine quoque utenda erit unaquâque Æquationum reliquarum

$$xx \propto \begin{matrix} +2c & x & +bb \\ +2d & & -cc \\ & & -yy \\ & & -2cd \end{matrix}, \&$$

$yy \propto aa+2dx-xx$, sive eas considerando separatim, sive unam cum altera comparando, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis. Quocirca considerando separatim Æquationem $yy \propto aa+2dx-xx$, cum, quantitatibus $+aa$ & $-xx$ ad alteram partem sub contrario signo translatis, fiat $2dx \propto yy+xx-aa$: hinc si in altera Æquatione

$$xx \propto \begin{matrix} +2c & x & +bb \\ +2d & & -cc \\ & & -yy \\ & & -2cd \end{matrix}$$

pro $2dx$ substituatur $yy+xx-aa$, habebo Æquationem $xx \propto +2cx, +yy+xx-aa, +bb-cc-yy-2cd$. Hoc est, demptis æqualibus, ordinatâque æqualitate, habebitur $2cx \propto aa+cc-bb+2cd$. Et fit, divisâ utrâque æqualitatis parte per $2c$, $x \propto \frac{aa+cc-bb+2cd}{2c}$. Ostendens quâ ratione linea incognita x ex cognitis a, b, c, & ex ad arbitrium sumendâ d sit invenienda. Inventâ autem lineâ x, ut habeatur y, oportet tantùm in Æquatione superiori $yy \propto aa+2dx-xx$ in locum x subrogare valorem inventum $\frac{aa+cc-bb+2cd}{2c}$, & in locum xx hujus valorem, & fit $yy \propto \frac{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4+4ccdd}{4cc}$. Unde, ex-

de, extractâ radice, invenitur

$y \infty \sqrt{\dfrac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4 + 4ccdd}{4cc}}$. Exhibens quo pacto linea incognita y ex cognitis a, b, c, & ex ad arbitrium sumenda d, obtineri possit.

Cæterùm quoniam in Problemate, ad præcedentes Æquationes reducto, propter lineam d, quæ hìc modò major modò minor ad arbitrium sumi potest, lineæ quoque x & y inde majores ac minores evadunt, atque ob id Problema non determinatum existit, sed infinitas recipit solutiones: lubet & alterum Problema, quod omnino determinatum est, atque in cujus solutione, ad unumquemque ex quæsitis numeris investigandum, unam Æquationem cum aliâ comparavimus, in medium afferre.

PROBLEMA.

INvenire duos numeros, quorum summa multiplicata per summam suorum quadratorum faciat 715; & differentia per differentiam eorundem quadratorum faciat 99.

Supposito Problemate tanquam jam facto, pono pro majori numero quæsito $x + y$, & pro minori $x - y$: eritque summa quæsitorum numerorum $\infty\ 2x$, & eorundem differentia $\infty\ 2y$.

Jam quia $x + y$ & $x - y$ in se ducti faciunt $xx + 2xy + yy$ & $xx - 2xy + yy$, quorum summa est $2xx + 2yy$ & differentia $4xy$: restat ut $2xx + 2yy$ multiplicata per $2x$, & $4xy$ per $2y$, producta $4x^3 + 4xyy$ & $8xyy$ sint datis numeris 715 & 99 æqualia.

Quocirca inventis duabus Æquationibus $4x^3 + 4xyy \infty 715$ & $8xyy \infty 99$, ut ex iis obtineatur uterque numerus incognitus x & y, comparo unam Æquationem cum altera: multiplicando primùm utramque partem prioris per 2, & fit $8x^3 + 8xyy \infty 1430$, ac deinde ex ea subtrahendo posteriorem $8xyy \infty 99$, & relinquitur $8x^3 \infty 1331$. In quâ, si utrobique extrahatur radix Cubica, habebitur $2x \infty 11$, & fit $x \infty 5\frac{1}{2}$.

Postea ad inveniendum y dividatur Æquatio posterior $8xyy \infty 99$ per jam inventam $2x \infty 11$, & orietur Æquatio $4yy \infty 9$.

In

In qua si utrinque extrahatur radix quadrata, habebitur $2y \propto 3$, & fit $y \propto 1\frac{1}{2}$.

Cæterùm invento utroque numero incognito x & y, quoniam pro majori quæsitorum posueramus $x + y$ & pro minori $x - y$: erit major $\propto 7$, & minor $\propto 4$. Et solutum erit Problema.

Atque ita reducendo illas, efficere oportet, ut tantùm una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cujus quadratum, sive cubus, sive quadrato-quadratum, sive surdesolidum, sive quadrato-cubus &c. æqualis sit ei, quod provenit ex additione vel subtractione duarum pluriúmve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita sit, reliquæ autem compositæ ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, sive cubum, sive quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto designo H

$z \propto b$, *aut*

$zz \propto - az + bb$, *aut*

$z^3 \propto + azz + bbz - c^3$, *aut*

$z^4 \propto + az^3 + bbzz - c^3z + d^4$, *&c.*]

Hoc est, z, quam pro quantitate incognita sumo, est æqualis quantitati cognitæ b. Aut quadratum lineæ z est æquale ei, quod provenit subtrahendo az ex bb: quarum quidem bb cognita est; sed az composita ex z media proportionali inter unitatem & quadratum zz, ut supra explicavimus, & ex quantitate cognita a. Aut cubus lineæ z æqualis est ei, quod provenit ex additione & subtractione trium quantitatum azz, bbz, & c^3; quarum quidem c^3 cognita est; at bbz composita ex z, prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & cubum z^3, & ex quantitate cognita bb; ac denique azz, composita ex zz, secunda dictarum mediarum, & ex quantitate cognita a. Atque sic de cæteris.

Ubi notandum est, per quantitates cognitas, intelligendas esse eas, quæ in quæstione vel datæ sunt, vel per certas operationes datarum quantitatum, jam traditas & notas, sic præparatæ sunt, ut pro cognitis sive datis sint habendæ, atque quæsitis sive incognitis æquiparandæ.

Sic cùm ponitur $z \propto b$, indicatur lineam incognitam, quæ per

per z designatur, æqualem esse alicui ex cognitis, quæ designatur per b. Quod quidem rarò contingit, cum incognitæ lineæ plerunque aliqua operatione seu præparatione cognitarum linearum indigeant, antequam cognitis evadant æquales.

Ut, si fuerit $z = \frac{cd}{e}$. Assumptâ pro unitate alterutrâ quantitatum c, d, quæ in se invicem ductæ numeratorem constituunt, dividenda est reliqua per denominatorem, sive quantitatem e (quemadmodum superius est ostensum); eritque quotiens divisionis æqualis quantitati incognitæ z.

Eodem modo si habeatur $z = \frac{cc + cd}{e - f}$, erit ut $e - f$ ad $c + d$, ita c ad z; sive ut $e - f$ ad c, ita $c + d$ ad z.

Et si sit $z = \frac{cc - dd}{e + f}$, erit $e + f$ ad $c + d$, sicut $c - d$ ad z; vel $e + f$ ad $c - d$, sicut $c + d$ ad z.

Nec non si habeatur $z = \frac{cd + ef}{g}$, & fiat, ut c ad e, sic f ad quartam, quæ vocetur h: poterit pro ef scribi ch, atque adeò loco $\frac{cd + ef}{g}$ substitui $\frac{cd + ch}{g}$. Ubi deinde si fiat ut g ad c, sic $d + h$ ad quartam: sive permutando (quod eodem recidit) ut g ad $d + h$, sic c ad quartam, quam vocare lubet b: erit $z = b$. Id quod & aliis modis præstari potest.

Non secus si sit $z = \frac{cdef}{ade - agh}$, & statuatur esse ut a ad c, sic e ad quartam, quæ sit i; erit $ai = ce$, ita ut pro $\frac{cdef}{ade - agh}$ scribi possit $\frac{adif}{ade - agh}$ seu $\frac{dif}{de - gh}$. Rursus si ponamus esse ut d ad g, sic h ad quartam, quæ sit k: erit $dk = gh$, ita ut in locum $\frac{dif}{de - gh}$ subrogari possit $\frac{dif}{de - dk}$ seu $\frac{if}{e - k}$. Ubi denuo si fiat, ut $e - k$ ad i, ita f ad quartam, quam vocabo b; fiet ut supra $z = b$. Quod idem variis modis fieri potest.

Denique sit $z = \frac{acdd - aacc}{d^3 + acd}$. Supponendo esse ut a ad d, ita d ad quartam, quæ nominetur e: erit $ae = dd$: poteritque pro $\frac{acdd - aacc}{d^3 + acd}$ substitui $\frac{aace - aacc}{aed + acd}$ seu $\frac{ace - acc}{ed + cd}$. Rursus statuendo esse ut $e + c$ ad $e - c$, sic c ad quartam quæ appelletur f, fiet

fiet $\frac{ce - cc}{e + c} \infty f$: licebitque pro $\frac{ace - acc}{ed + cd}$ reponere $\frac{af}{d}$. Ubi demum si fiat ut *d* ad *f*, ita *a* ad quartam, quæ vocetur *b*, fiet rursus, ut supra, $z \infty b$. Quod similiter pluribus modis expedire licet. Atque ita de cæteris.

E quibus constat, quantitatem incognitam *z*, post hujusmodi operationes atque cognitarum linearum requisitas præparationes, eò reduci posse, ut sub una semper specie efferatur, & alteri cognitæ dicatur æqualis.

Notandum autem, huc quoque referendas esse æquationes in quibus quantitatis incognitæ quadratum, aut cubus, aut quadrato-quadratum, &c. æquatur quantitati alicui cognitæ, absque additione vel subductione aliarum quantitatum, quæ componuntur ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, aut cubum, aut quadrato-quadratum &c. multiplicatis per alias cognitas. Ubi incognita quantitas, extrahendo tantùm aliquam radicem, inveniri potest. Ut cùm zz æquatur aq. Suppositâ lineâ *a* pro unitate, erit radix quadrata extracta ex linea *q*, ut superiùs est ostensum, (nimirum inveniendo inter lineas *a* & *q* mediam proportionalem,) æqualis quæsitæ lineæ *z*, quæ hoc modo denotatur: $z \infty \sqrt{aq}$. Ubi apparet, quæstionem per hanc extractionem, dum planum aq transmutatur in quadratum bb, cujus latus est *b*, eò esse reductam, ut incognita quantitas alteri cognitæ dicatur æqualis.

Eodem modo si z^3 æquetur aaq, & quæratur *z*. Assumptâ rursus *a* pro unitate, erit extracta ex *q* radix cubica, hoc est, inventarum inter *a* primam & *q* quartam duarum mediarum proportionalium (ut tertio libro ostenditur) prior, radici quæsitæ *z* æqualis. Designabitur autem hoc pacto: $z \infty \sqrt{C.\, aaq}$. Ubi similiter constat, quòd, dum hâc operatione solidum aliquod, utpote aaq, resolvitur in cubum b^3, & utrobique deinde extrahitur radix cubica, *z* rursus fiat ipsi *b* æqualis.

Nec aliter evenit cùm $z^4 \infty aaqq$. Etenim dum extrahitur utrinque radix quadrato-quadrata seu bi-quadrata, hoc est, postquam radix semel extracta, dat $zz \infty aq$, eadem adhuc semel repetita radicis extractio, dabit $z \infty \sqrt{aq}$, sive, supponendo aq in quadratum bb esse conversum, $z \infty b$. Atque ita ulteriùs in infinitum.

X Porrò

Porrò advertendum est, si quantitates cognitæ, ex quibus radix aliqua extrahi debet, sub alia specie, quàm hic expositum fuit, oblatæ fuerint (ut si ex $aa + bb$, aut ex $\frac{aadd - aaff - a^4}{dd + 2df + ff}$ &c. extrahenda sit radix quadrata): quòd tunc facile sit, non solùm per ea, quæ jam tradita sunt, sed & aliis modis quantitates datas in alias transmutare: ita ut non aliter ex illis radices extrahendæ sint, ac si ex quantitate aq extrahendæ forent. Quod & de radice cubica, quadrato-quadrata, aliisque in infinitum, est intelligendum.

I *Atque ideo sufficiet vos monere, si quis in reducendis hisce æquationibus non omiserit uti divisionibus omnibus, quæ fieri possunt, &c.*] Ubi notandum, inter quatuor operationum species, Additionem & Subtractionem non reddere terminos alicujus quæstionis difficiliores, quippe quos tantùm signis + vel — conjungunt aut disjungunt; quæ quidem signa diversa genera non constituunt. Multiplicationem verò quod attinet, ea est, quâ termini involvuntur vel intricantur, & dimensiones augentur; quæ contra Divisione extricantur & minuuntur. Idem de radicum extractione intellige, quæ, ut supra dictum fuit, divisionis tantùm species est habenda. Adeò ut ad inveniendos terminos simplicissimos ad quos quæstio aliqua reduci queat, maximopere observandum sit, ut in reducendis Æquationibus, omnes divisiones atque extractiones, quæ fieri possunt, tentemus. Cujus rei exemplum non inelegans suggerere potest demonstratio proprietatis Parabolæ tertio libro adducta.

K *Erit tota OM æqualis z, linea quæsita. Quæ quidem sic exprimitur: $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.*] Sciendum hìc est, æquationem propositam $zz \propto az + bb$, juxta ea, quæ habentur lib. III. pag. 69, aliam adhuc habere radicem, minorem quàm nihil, quæ à D. des Cartes falsa appellatur, quæque hìc per lineam PM designatur, atque hoc modo exprimitur $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Quemadmodum facilè demonstrari potest. Si enim, positâ $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, auferatur utrinque $\frac{1}{2}a$, & inde utraque pars $z - \frac{1}{2}a$, & $-\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ in se ducatur quadratè, fiet $zz - az + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa + bb$. Ubi si demum utrinque dematur $\frac{1}{4}aa$, & $-az$ in alteram partem transferatur, fiet $zz \propto az + bb$.

Erit-

Eritque reliqua PM æqualis y, radici quæsita: Ita ut fiat L
$y \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.] Verùm æquatio $yy \infty - ay + bb$ admittit adhuc aliam radicem, minorem quàm nihil, quæ per lineam OM designata ita exprimitur, $y \infty - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Cujus demonstratio ad exemplar præcedentis fieri potest.

Nec aliter fit, si proponatur $x^4 \infty - axx + bb$, PM M
enim esset xx, & haberetur $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.] Quoniam enim $x^4 \infty - axx + bb$, transferendo $-axx$ in alteram æquationis partem, erit $x^4 + axx \infty bb$. & additâ utrique parti $+\frac{1}{4}aa$, proveniet $x^4 + axx + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa + bb$. Iam verò extractâ utrobique radice, invenietur $xx + \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. ac proinde transponendo $+\frac{1}{2}a$, ut xx unam constituat æquationis partem, erit $xx \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Unde extractâ rursus utrinque radice, fiet $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

Eodem modo si habeatur $z^4 \infty az^2 + bb$, erit
$z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Nam cum $z^4 \infty az^2 + bb$, erit per transpositionem $z^4 - az^2 \infty bb$. Addatur jam utrinque $\frac{1}{4}aa$, fietque $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa + bb$. Unde, extractâ utrobique radice, prodibit $z^2 - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. hoc est, $z^2 \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & per consequens

$$z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}.$$

Similiter si sit $z^4 \infty az^2 - bb$, erit $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$, nec non $z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$. Cum enim z^4 æquetur $az^2 - bb$, & per transpositionem $z^4 - az^2 \infty - bb$; addatur utrinque $\frac{1}{4}aa$, fietque $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa - bb$. Quare extractâ utrobique radice, emerget $z^2 - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, hoc est, $z^2 \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac per consequens
$z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{2}aa - bb}}$. Porrò, quoniam radix ex $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa$ est quoque $\frac{1}{2}a - z^2$, hinc & $\frac{1}{2}a - z^2 \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, hoc est, $z^2 \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac per consequens

$$z \infty \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}.$$

Cæterùm ut Geometricè inveniantur harum æquationum radices, sciendum est, quòd, dum omnes termini non æquè multas habent dimensiones, toties illìc, ubi numero pauciores habentur, subintelligenda sit unitas, quoties requiritur; ut in æquatione $x^4 \infty - axx + bb$. Quia in termino axx tres duntaxat dimensiones reperiuntur, & in termino bb tantùm duæ, cogitandum est, terminum axx, ut dimensiones fiant æquales, semel per unitatem esse multiplicatum, terminum autem bb bis. Adeò ut, si pro unitate accipiamus c, æquatio sit $x^4 \infty - caxx + ccbb$. Verùm expedit unitatem illam tantisper dissimulare, & æquationem hanc $xx \infty - ax + bb$ usurpare, donec radicem ejus Geometricè, ut traditum est, invenerimus, nimirum lineam PM, quæ exprimitur hoc pacto: $x \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Ita ut deinde tantùm opùs sit ex $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ extrahere radicem quadratam seu inter inventam lineam PM & unitatem c invenire mediam proportionalem, ut Geometricè obtineatur radix $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Atque ita in aliis.

Unde liquidò constat, ad inveniendas harum æquationum radices, nihil aliud requiri, quàm quod circa priores tres Æquationum formulas, & radicis quadratæ extractionem Auctor præcepit. Adeò ut hinc simul manifestum sit, quo pacto, postquam sic linea aliqua pro unitate assumpta vel concepta fuerit, (quemadmodum hujus Geometriæ methodus requirit) Problemata omnia Geometriæ communis, hoc est, quæ rectarum linearum & circulorum beneficio construi possunt, per ea tantùm, quæ ab Authore per 4 figuras 1mi libri exposita sunt, expediri queant, quemadmodum pag. 7 monuit.

N *Quod si circulus, centrum suum habens in puncto N, transiénsque per punctum L, non secet nec tangat lineam rectam MQR, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde asserere liceat, constructionem Problematis propositi esse impossibilem.*] Quod itidem ex Æquatione cognosci potest. Nam cum Æquatio sit certum medium, quo Problema aliquod resolvitur, sanè, si resolvendo incidimus in æquationem impossibilem, argumentum est, Problema quoque esse impossibile. Arguitur autem impossibilitas illa ex contradictione, quam involvit,

vit, cùm nempe in ea statuitur minor quantitas æquari alicui majori, vel cùm jubemur ad eam resolvendam aliquid præstare, quod fieri nullo modo potest, ut, quantitatem aliquam majorem à minore subducere. Quemadmodum in æquatione $zz \propto az - bb$. quoniam ad inveniendam radicem z, bb ex $\frac{1}{4}aa$ subtrahi debet; oportet ut bb non sit majus quàm $\frac{1}{4}aa$, sive ut b non sit majus quàm $\frac{1}{2}a$. Aliàs enim radix ejus sic explicari non posset, & æquatio impossibilis foret. Quod & ex ejusdem constitutione licet agnoscere, si in ea duæ sint radices veræ. Si enim ponamus $z \propto c$, seu $z - c \propto 0$, itemque $z \propto d$, seu $z - d \propto 0$, atque deinde multiplicemus $z - c \propto 0$ per $z - d \propto 0$, exsurget æquatio $z^2 \begin{smallmatrix}-c\\-d\end{smallmatrix} z + cd \propto 0$, seu $zz \propto \begin{smallmatrix}+c\\+d\end{smallmatrix} z - cd$. In qua si $+c+d$ interpretemur per $+a$, & $-cd$ per $-bb$, habebimus æquationem propositam $zz \propto az - bb$. Adeò ut constet æquationem hanc duas veras radices admittere, seu quæ majores sunt quàm 0, quarum quidem summa est a, & productum ex earum multiplicatione bb.

Sed ut duas semper veras radices recipiat, requiritur, ut bb non sit majus quàm $\frac{1}{4}aa$, seu, b non majus quàm $\frac{1}{2}a$: quoniam maximum productum quod fit ex partibus ipsius a, est, cùm a in duas partes æquales dividitur. Ubi notandum, quòd ubi $bb \propto \frac{1}{4}aa$, $\frac{1}{2}a$ esse z, quæ quæritur, atque æquationem eo casu unam tantùm sortiri radicem, aut duas quidem, sed æquales. At verò bb existente majore quàm $\frac{1}{4}aa$, æquationem esse impossibilem, nec ullam admittere radicem. Id quod similiter de æquatione $zz \propto -az - bb$ est intelligendum, quæ de duabus falsis radicibus est explicabilis. Ut patet ex ejus constitutione. Etenim ponendo $z \propto -c$ seu $z + c \propto 0$, nec non $z \propto -d$ seu $z + d \propto 0$, & multiplicando $z + c \propto 0$ per $z + d \propto 0$: proveniet Æquatio

$$zz \begin{smallmatrix}+c\\+d\end{smallmatrix} z + cd \propto 0, \text{ seu } zz \propto \begin{smallmatrix}-c\\-d\end{smallmatrix} z - cd.$$

In qua si interpretemur $-c-d$ per $-a$, & $-cd$ per $-bb$, emerget æquatio proposita $zz \propto -az - bb$. Cujus porrò radices Geometricè inveniuntur perinde atque Æquationis præcedentis. quæ denique sic exprimuntur $z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Cæterùm quod ad duas reliquas æquationes attinet, primam vide-

videlicet $zz \propto az + bb$, & secundam $yy \propto -ay + bb$, eæ nulli determinationi sunt obnoxiæ, & semper per duas radices explicari possunt, unam veram & alteram falsam. Ut si ponatur $z \propto c$, seu $z - c \propto 0$, & $z \propto -d$, seu $z + d \propto 0$, & multiplicetur $z - c \propto 0$ per $z + d \propto 0$; fiet $z^2 \begin{smallmatrix}-c\\+d\end{smallmatrix} z - cd \propto 0$, seu $z^2 \propto \begin{smallmatrix}+c\\-d\end{smallmatrix} z + cd$. In qua æquatione si statuamus c majorem esse quàm d, ita ut excessus sit penes c cum signo $+$, atque $+c-d$ interpretemur per $+a$, & $+cd$ per $+bb$, habebimus eandem æquationem, quam priùs, nimirum $z^2 \propto az + bb$. Adeò ut perspicuum sit ipsam de duabus inæqualibus radicibus esse explicabilem, majore vera & minore falsa. At verò si ponamus c minorem quàm d, ita ut excessus sit penes d cum signo $-$, atque $+c-d$ interpretemur per $-a$, & $+cd$ per $+bb$; prodibit æquatio secundæ formæ: nimirum, $z^2 \propto -az + bb$, quippe quæ à duabus inæqualibus radicibus explicatur, quarum minor est vera, major autem falsa. Denique si d constituatur ipsi c æqualis, destruent se invicem $+c$ & $-d$, & evanescet secundus terminus az, & erit Æquatio $z^2 \propto * + bb$, cujus duæ radices, vera $+b$ & falsa $-b$, sunt æquales.

E quibus omnibus apparet, ad æquationes allatas Geometricè resolvendas, earumque radices juxta regulas hìc traditas commodè explicandas, requiri, ut ultimus terminus designetur per bb, aut ad eam formam, sicut superiùs est ostensum, reducatur.

A R-

ARGVMENTVM SECVNDI LIBRI.

SEcundus liber agit de lineis curvis, earumque naturam explicat, docendo, quænam illæ sint, quas in Geometriam recipere oportet, quæque Geometricæ appellandæ sunt, itemque quo pacto possint cognosci. Modus autem eas cognoscendi in eo consistit, quòd describi possint per motum aliquem continuum, vel per plures ejusmodi motus, quorum posteriores regantur à prioribus. Verùm enimverò licèt allato modo descriptæ curvæ omnes in Geometriam sint recipiendæ, atque pro Geometricis agnoscendæ; tamen ad comprehendendas omnes, quæ sunt in natura, & ipsas ordine distinguendas in certa genera, prout gradatim magis magisque in infinitum sunt composita, aptiùs quidquam afferri nequit, quàm ut in genere dicatur: illas omnes Geometricas esse appellandas, quarum omnia puncta ad omnia lineæ rectæ puncta certam habent relationem, quæ exprimi potest per aliquam æquationem, se indifferenter ad omnia utriusque lineæ puncta extendentem. Et quidem, quòd, cùm æquatio illa ultra rectangulum sub duabus quantitatibus indeterminatis, (quæ ad dictam relationem explicandam requiruntur) aut ultra quadratum unius ex ipsis non ascendit, linea curva tunc primi & simplicissimi sit generis (in quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis sunt comprehensa.) At verò cùm ipsa ad tres quatuórve dimensiones adscendit, quòd illa tunc sit secundi generis. Cùm verò ad 5 aut 6 dimensiones adscendit, quòd illa tunc sit tertii generis. Atque ita porrò in infinitum.

Vbi porrò facilè est intelligere, quænam sint, quæ ex Geometria sint rejiciendæ, & inter Mechanicas ponendæ: Quandoquidem curvæ illæ omnes, quæ inter prædictas non comprehenduntur, ab hac Geometria rejiciuntur. Cujusmodi sunt illæ omnes, quæ per motus continuos describi nequeunt, & ubi posteriores à prioribus non dependent, sed per duos motus describi concipiuntur, qui sunt à se invicem distincti, nullamque relationem habentes, quæ possit exactè mensurari, sive quarum omnia puncta ad omnia lineæ rectæ puncta relationem non habent, quæ per aliquam æquationem omnibus communem exprimi possit.

Postquam autem ostendimus, quo pacto lineæ curvæ ab Auctore distinguantur, tam in illas, quas in Geometriam censet introducendas, quàm in illas

in illas, quas pari jure ab ea censet arcendas: ac denique quâ ratione illa in certa genera sint distinguenda; operæ pretium videtur ut deinceps ea, quæ Antiqui circa ipsas contemplati fuêre, expendamus. Quæ quidem ex iis, quæ afferuntur à Pappo ad propositionem 4^tam^ libri tertii, ut & ad prop^nem^ 30 libri quarti Collectionum Mathematicarum, haud difficulter colligi possunt. Vbi, postquam explicavit, Problematum Geometricorum tria ab Antiquis genera fuisse constituta, quorum alia dicuntur Plana, alia Solida, alia denique Linearia; nimirum prout quædam ex ipsis solvi possunt, describendo tantùm rectas lineas & circulorum circumferentias; & alia, quæ construi nequeunt, quin ad minimum adhibeatur aliqua Conica sectio; & reliqua denique quin in constructionem assumatur alia demum curva linea: Tandem de duarum mediarum inventione loquitur, quas inquit Geometricæ rationi innixos invenire non potuisse. Quorum quidam, asserentes, Problema solidum esse, resolutionem per Conicas sectiones, sive solidos locos, fecerunt; alii autem per alias curvas, sive locos lineares; ac alii denique constructionem ejus instrumentis tantùm perfecerunt. Nullum autem eorum fuisse, qui resolutionem per locos planos, sive rectas lineas & circulares, absolverit.

Vbi apparet, quòd tantummodo constructiones illas Geometricas appellaverint, quæ per rectas lineas & circulorum circumferentias perficiebantur; quodque constructiones in genere non aliter respexerint, quàm quatenus ipsarum perfectio à manuum dexteritate & instrumentorum perfectione proficisceretur. Vnde cum ad planorum Problematum constructiones non nisi rectas lineas & circulorum circumferentias adhibendas esse viderent, quæ omnium facillimè atque expeditissimè regulæ & circini beneficio (utpote per instrumenta omnino simplicia) in plano describuntur, & sectiones Conicas reliquasque curvas lineas, varium & difficilem ortum habentes, in plano designare difficile existimarent, ideoque descriptionem earum minus certam statuerent; factum inde quoque, ut solam Planorum constructionem, Geometricam pronuntiarent: adeoque non nisi rectas lineas & circulares, reliquas verò non item, pro Geometricis agnoscerent. Quod quare ita distinxerint, non video. Quandoquidem rectas lineas & Circulos perinde atque Parabolas, Hyperbolas, & Ellipses ex Cono secari posse ab Apollonio scio ostensum. Qui porrò postquam plurimas proprietates tribus hisce sectionibus pariter atque Circulo convenire ostendit, & quidem propter mirificas Conicorum Theorematum demonstrationes, cum non solùm illâ tempestate, verùm etiam sequentibus sæculis, magnus Geometra sit appellatus, non apparet quam ob causam prædictæ lineæ non æquè ac rectæ & circulares pro Geome-

Geometricis fuerint habita. Adeò ut non solùm Veteribus illis, sed etiam Vieta ejusque asseclis assentiri nequeam, dum Geometriæ defectum hic suspicantes, neque Hyperbolas, neque Parabolas κατ' ἐπιστημονικὸν λόγον in Geometricis describi asseverant, ac proinde Menæchmi inventionem duarum mediarum per Parabola & Hyperbola, sive etiam per binarum Parabolarum intersectionem, veluti non Geometricam respuunt. Quam sanè (meo judicio) non minùs Geometricam censere oportet, quàm illam, quæ ab Euclide affertur in Problema 1^{mum} Libri 1^{mi} Elementorum: siquidem punctum, in quo hæ sectiones sibi mutuò occurrunt, non minùs scientificè invenitur, quàm illud, in quo bini circuli se invicem intersecant, ad describendum triangulum æquilaterum.

Cæterùm si afferatur, ideo hasce lineas Geometricas non fuisse dictas, eò quòd instrumentis describi viderent; Annon ob eandem rationem linea recta & circularis non Geometricæ fuissent dicendæ, cum ad illas in plano describendas regulâ atque circino sit opùs? Adeò ut si τεχνικὴν καὶ ἐπιστημονικὴν χειρουργίαν Vieta vocaverit constructionem illam quatenus ipsa regulæ & circini beneficio perficitur; Annon pari jure artificiosam atque scientificam appellare licebit constructionem illam, quæ non nisi instrumentis perfici potest, quæ majorem industriam atque artificium in sui compositionem requirunt, cujusque demonstratio simul ex penitiori Geometriæ penu est depromenda? Quocirca cum recta & circularis non Geometricæ non dicantur, neque etiam constructiones per ipsas factæ; ratum igitur esto, quòd neque Sectiones Conicæ, quæ cum circulari unum genus curvarum linearum, illudque primum (ut supra dictum fuit) apud Auctorem nostrum constituunt; neque etiam omnes superiorum generum curvæ, constructionesque quæ per ipsas fiunt, alia quàm Geometricæ sint habendæ, prout demonstratio illas tales esse comprobabit. Hæc autem de curvis lineis dicta sufficiant. Restat ut porrò ea, quæ hoc libro ab Autore pertractantur, paucis exponamus.

Explicatâ linearum curvarum naturâ resumit quæstionem Pappi ab Antiquis quæsitam, quam primo libro explicuit, atque resolvere incepit; talem deinde ipsam declarans, ut postquam in aliis atque aliis lineis proposita est, illa quoque alias atque alias curvas lineas, solutionem præbentes, quæque diversi generis sint, prout debita ratio numeri linearum habeatur, admittat. Adeò ut nulla curva linea sit sub calculum cadens, quæque in Geometriam juxta ejus definitionem recipi possit (quod sanè observatione dignum,) quæ non etiam simul pro certo aliquo linearum numero utilis existat.

Vbi præterea notandum est, quòd eam sic resolvere doceat, ut simul

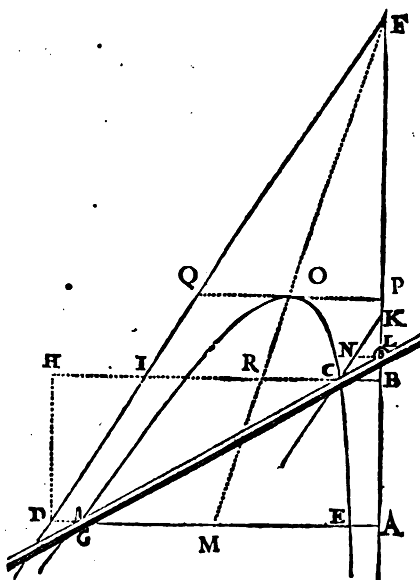
omne illud, quod ad locorum planorum atque solidorum compositionem spectat, exponat; sicque paucis complectatur, non solùm quæstionis propositæ solutionem in tribus quatuórve lineis, sed etiam solidorum locorum compositionem, tantopere à Veteribus quæsitam. Nullos enim ex istis locis omisit, præter omnium simplicissimos, quos facilitatis causâ neglexit.

Post hæc autem, quæstione in 5 lineis propositâ, docet quænam prima & simplicissima sit linearum omnium, quæ ibidem inservire possint. Atque ita tandem illi finem imponit. Quibus peractis declarat, quòd, ad inveniendas omnes proprietates curvarum linearum, sufficiat scire relationem, quam illarum puncta habent ad puncta lineæ rectæ, sicut etiam quo pacto inveniri possint lineæ rectæ, quæ ipsas secent in datis punctis ad angulos rectos. Quod quidem subtilissimâ ac mirabili prosequitur methodo, meoque judicio digna, ut inter ingeniosissima hominum inventa celebretur. Postea verò nequid desit, quod ad usum curvarum linearum ibidem propositarum spectare videretur, ostendit ipsas diversas habere proprietates, quæ nequaquam sectionum Conicarum proprietatibus cedunt, describitque quædam Ovalium genera, ad radiorum reflexionem atque refractionem per specula & vitra, apprimè conducibilia: adeoque in Catoptrica atque Dioptrica usum insignem habentia. Denique ostendit, quo pacto, quæ de lineis curvis explicuit, adplicari etiam possint ad lineas curvas, quæ per motum aliquem ordinatum quorundam punctorum alicujus corporis in spatio trium dimensionum describi possunt. Atque ita, quæcunque ad curvarum linearum cognitionem necessaria sunt, breviter absolvit. Quantùm autem ad Geometriam promovendam, ejusque arcana detegenda, nec non varias illius functiones cognoscendas hic liber faciat, vel ea ipsa quæ in illo pertractantur, ac modò recensuimus, testari possunt; tum etiam, quia in eo via ad surdesolida, altioraque loca, hactenus incognita, investiganda sternitur, atque in eo infinitæ speculationis campus aperitur.

COM-

COMMENTARII
IN
LIBRVM SECVNDVM.

QVEMADMODVM *illa re ipsâ nulla alia est quàm Hyperbola.*] Si enim producatur A G ad D, ut D G æqualis sit E A seu N L, & per D agatur recta D F ipsi C K parallela, occurrens rectæ A B in F: erit D F una ex Asymptotis, & A F altera. Quod facilè demonstrari potest. Supponamus namque lineam G O C E Hyperbolam esse, cujus Asymptoti D F, F A, & utraque D G, E A æqualis sit ipsi N L; nec non D F ipsi C K parallela, ut di- A



 ximus;

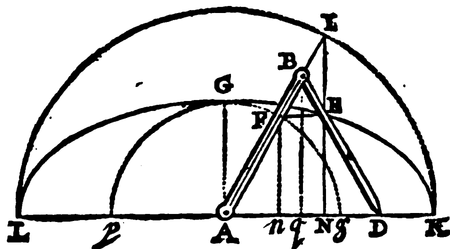
ximus; hoc est, angulus D F A æqualis sit angulo C K B. Producatur autem B C, ut secet D F in I; & per D agatur recta D H parallela ipsi A F, occurrens cum B C in H. Quoniam igitur similia sunt triangula D H I & K L N triangulo F A D, erunt & ipsa inter se similia. Unde erit ut K L ad L N, hoc est, ut b ad c, ita D H seu A B, hoc est, x, ad H I, quæ ideo erit $\frac{cx}{b}$. Deinde subductâ H I ex H B seu D A, hoc est, $\frac{cx}{b}$ ex $a+c$, relinquetur I B, $a+c-\frac{cx}{b}$. E qua si auferatur B C seu y, remanebit I C, $a+c-\frac{cx}{b}-y$. Quia verò in Hyperbola rectangulum I C B æquatur rectangulo D E A, per 10 prop. 2[di] libri Conicorum Apollonii; ideo si multiplicetur I C per C B, hoc est, $a+c-\frac{cx}{b}-y$ per y, fiet rectangulum I C B, $ay+cy-\frac{cxy}{b}-yy$, æquale rectangulo D E A seu ac, hoc est, ei quod fit ex ductu ipsius D E seu G A in E A. Quare ordinatâ æquatione, factaque transpositione, ut yy unam obtineat æquationis partem, invenietur $yy \infty cy-\frac{cxy}{b}+ay-ac$. Quæ æquatio eadem est, quæ supra ex motu regulæ G L & rectæ lineæ C K fuit inventa. Adeò ut affirmare liceat, descriptam lineam curvam C E Hyperbolam esse, cujus Asymptoti A F, F D; quemadmodum supposuimus. Quorum pleniorem demonstrationem qui desiderat, consulat caput 6[tum] tractatus nostri de Organica Conicarum Sectionum in plano descriptione, ubi casus omnes prosecuti sumus.

Sed utile fuerit unum aut alterum Problema simile adjungere.

In plano quocunque concipiatur moveri A B regula, mobilis circa punctum fixum A, atque huic regulæ affixa alia æqualis regula B D, in puncto B, ut similiter circa punctum B in eodem plano moveri possit. Assumpto autem in B D inter B & D quovis puncto E, & commoto puncto D per rectam lineam A D; Quæritur cujus generis sit curva linea, quam punctum E motu illo describit?

Quoniam igitur ad hanc quæstionem oportet cognoscere relationem, quam hujus curvæ puncta habent ad puncta lineæ rectæ A D, in qua punctum A est datum; suppono ex puncto E, ad

quod



quod instrumentum huic curvæ describendæ inserviens est adplicatum, demissam esse super A D perpendicularem E N. Et quidem cum E N, N A duæ sint quantitates indeterminatæ ac incognitæ; voco unam x, & alteram y. Deinde, ut relationem unius ad alteram investigem, considero etiam quantitates cognitas A B vel B D, & D E, quæ hujus curvæ descriptionem determinant; illamque appello a; hanc verò b. Tum quia triangulum N E D est rectangulum, à quadrato ex D E, hoc est bb, aufero quadratum ex N E, hoc est, xx, & relinquitur quadratum ex N D, seu $bb - xx$, cujus radix $\sqrt{bb - xx}$ est ipsa linea N D. Porrò demissâ ex B super A D perpendiculari B q, secabitur recta A D ab ipsa bifariam in q, propter æqualitatem regularum A B & B D, fientque triangula B q D & E N D similia. Unde erit ut D E ad D N, hoc est, b ad $\sqrt{bb - xx}$; ita D B, hoc est, a, ad D q, seu $\frac{a}{b}\sqrt{bb - xx}$. & fit A D $\propto \frac{2a}{b}\sqrt{bb - xx}$. Cæterùm cum A N sit $\propto y$, & N D $\propto \sqrt{bb - xx}$, erit tota A D $\propto y + \sqrt{bb - xx}$. Adeò ut habeatur æquatio inter A D bis inventam, hoc est, inter $\frac{2a}{b}\sqrt{bb - xx}$ & $y + \sqrt{bb - xx}$, vel, inter $\frac{2a}{b}\sqrt{bb - xx} - \sqrt{bb - xx}$ seu $\frac{2a - b}{b}\sqrt{bb - xx}$ & y. Et multiplicatâ utrâque æqualitatis parte in se, ut signa radicalia evanescant, & æquatio ab asymmetria liberetur, fit $4aa - 4ab + bb - \frac{4aaxx}{bb} + \frac{4axx}{b} - xx \propto yy$. Quæ æquatio si per transpositionem ac divisionem

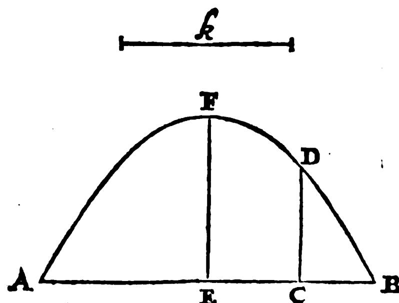
 ordi-

ordinetur, ita ut xx unam teneat æquationis partem (si sit x quam invenire volumus, relinquendo y indeterminatam), invenietur $xx \propto \frac{4aabb - 4ab^3 + b^4 - bbyy}{4aa - 4ab + bb}$, vel $xx \propto bb - \frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$. Unde cum æquatio non ascendat ultra quadratum unius ex quantitatibus indeterminatis, quemadmodum & superiùs in Hyperbola evenit: constat, lineam curvam descriptam esse primi generis, quippe quæ alia non est quàm Ellipsis, juxta ea quæ secundo capite tractatus nostri de Organica Conicarum sectionum descriptione demonstravimus. Ubi advertere licet praxin (quam & Clavius lib. 1. suæ Gnom. affert prop. 26ta) describendi Ellipsin per puncta, quæ ex inventa æquatione colligi potest, quæque lignariis & cæmentariis in extruendis fornicibus familiaris est, atque in orthographicis Sphæræ delineationibus usum habet insignem. Nam si productâ A B ad I, ut B I sit æqualis B E, centro A intervallo A I circulus describatur, secans A D, hinc inde productam, in L & K: erit L K axis transversus Ellipsis. Rectus autem invenitur, si ex eodem centro, intervallo D E, circulus describatur p G F g, secans A I in F. Erit enim A G semissis axis recti. Et si à puncto F ipsi A D ducatur F E parallela, secans I N in E: erit punctum E unum ex punctis, per quod Ellipsis transire debet. Quo quidem modo infinita alia puncta inveniuntur. Quod & ex calculo fit manifestum: Est enim A I $2a - b$, & A N y; estque ut A I seu $2a - b$ ad A N seu y, ita A F seu b ad A n, quæ ideo est $\frac{by}{2a - b}$. Cujus quadratum $\frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$ si auferatur à quadrato ex A F seu bb, remanebit quadratum ex n F $\propto bb - \frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$, utpote æquale xx quadrato lineæ N E. Quemadmodum fuit inventum.

Eodem modo operaberis in quæstione sequenti, quæ ultima est propositio lib. 4^{ti} collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini.

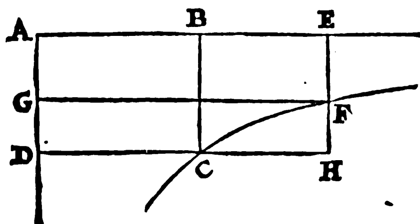
Quæritur cujus generis sit curva linea A F D B, cujus hæc est proprietas: ut, deductâ, à quolibet ejus puncto, ut D, perpendiculari D C, in rectam A B, positione & magnitudine datam, id quod sub perpendiculari D C & alia quadam data linea k continetur, æquale sit rectangulo, quod sub segmentis A C, C B comprehenditur.

Sectâ



Sectâ AB bifariam in E, pono AE vel EB $\infty\ a$, EC $\infty\ y$, CD $\infty\ x$: eritque AC $\infty\ a + y$, & CB $\infty\ a - y$. Cum igitur ejusmodi sit relatio punctorum curvæ ADB ad puncta rectæ AB, ut rectangulum sub CD & k æquetur rectangulo sub AC, CB: erit $aa - yy \infty kx$. Quæ æquatio ad omnia utriusque lineæ puncta referri potest, quandoquidem y & x duæ quantitates indeterminatæ existunt, quæ ad omnes lineas EC, CD applicari possunt. Exceptis punctis F & E, quo casu quantitas y nulla est, & EF æquatur $\frac{aa}{k}$. quod & de duobus præcedentibus Problematîs est intelligendum. Cæterùm cum in æquatione inventa $aa - yy \infty kx$ una quantitatum incognitarum y adscendat ad quadratum, indicio est, lineam curvam esse primi generis. Quam aliam non esse, quàm Parabolam, demonstravit Pappus loco citato.

Non aliter concludes, æquatione existente $xy \infty ab$, vel $xy \infty by - ax$, lineam curvam, quæ hanc æquationem produxit, esse primi generis: cum tantùm ascendat ad rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum x & y. Est autem curva illa linea Hyperbola. Quod facilè intelligetur, si in prima æquatione, ubi $xy \infty ab$, concipiamus ab constituere rectangulum aliquod parallelogrammum ABCD, cujus unum latus AB sit a, & alterum BC sit b; atque per punctum C circa Asymptotos DA, AB Hyperbolen describamus CF; ac denique à quovis in ea pun-



ea puncto F agamus duas rectas lineas F G, F E, ipsis A B, B C parallelas: Erit enim parallelogrammum A E F G parallelogrammo A B C D æquale, per 12 prop. 2^{di} libri Conicorum Apollonii. Adeò ut A E & E F sumi possint pro duabus quantitatibus indeterminatis y & x, quæ in se invicem ductæ efficiant $xy \propto ab$. quod exigebat proposita æquatio.

Eodem modo, si æquatio fuerit $xy \propto by - ax$, & producantur rectæ D C, E F, donec concurrant in punctum H: erit itidem parallelogrammum D H F G parallelogrammo C H E B æquale. Ac proinde si D C ponatur $\propto a$, & C B $\propto b$, (ut ante) & binæ quantitates indeterminatæ y & x ad binas lineas C H & H F referantur, atque D H seu $a + y$ ducatur in H F seu x: erit rectangulum D F seu $xy + ax$ æquale rectangulo C E seu by, utpote quod invenitur multiplicando C B seu b per C H seu y. Adeoque si utrinque auferatur ax, relinquetur $xy \propto by - ax$. Quæ est æquatio posterior.

E quibus manifestum fit, quòd, licèt plurimi referat, quænam rectæ pro quantitatibus indeterminatis sumantur, ut æquatio brevis atque facilis reddatur, semper tamen linea ejusdem generis appareat, quocunque tandem modo sumantur.

Omitto alios æquationum modos seu formulas, eandem curvam designantes, quandoquidem complures sunt. In genere hoc dicam, totam æquationum illarum varietatem oriri tantùm ex varia harum curvarum ad diversas rectas lineas relatione. Nam, ut ostendatur quænam differentia obtineri possit, cùm curva linea ad diversas rectas lineas refertur: Sunto duæ rectæ lineæ positione datæ A B, D F, sibi mutuò occurrentes in D; punctum autem

tem

tem in curva sit C. Et in AB quidem puncto A existente dato, & in ipsam à puncto C demissâ perpendiculari CB, ad referendum punctum C ad aliquod punctum ipsius AB: voco AB, x; & BC, y. Deinde, quoniam, propter positione datas AB, DF, datum est punctum intersectionis D, data quoque erit recta DA, nec non AF, quæ ipsi AB est perpendicularis, secans DH in F. Denique, demissâ ex puncto C super DH perpendiculari CG, producatur CB, donec occurrat rectæ DF in puncto H. Quibus positis, ut inveniantur rectæ DG, GC, ostendentes relationem, quam habet punctum C ad punctum G; ponatur DA ∞ a, AF ∞ b. Hinc, cum AB sit ∞ x, erit DB ∞ $a+x$. Jam verò quia propter similitudinem triangulorum DAF, DBH, DA est ad AF, hoc est, a ad b, sicut DB, hoc est, $a+x$, ad BH, erit BH ∞ $\frac{ab+bx}{a}$. Cui si addatur CB ∞ y, fiet tota CH ∞ $y+b+\frac{bx}{a}$. Porrò quoniam rectangulum est triangulum DAF, erit quadratum ex DF æquale quadratis ex DA & AF; ideoque DF ∞ $\sqrt{aa+bb}$. Hinc cum DA sit ad DF, hoc est, a ad $\sqrt{aa+bb}$, sicut DB, hoc est, $a+x$, ad DH; erit ipsa ∞ $\frac{a+x}{a}\sqrt{aa+bb}$ seu $\sqrt{aa+bb}+\frac{x}{a}\sqrt{aa+bb}$. similiter, ob similitudinem triangulorum FAD, HGC, cum sit ut DF ad FA, hoc est, $\sqrt{aa+bb}$, ad b, ita CH, hoc est, $y+b+\frac{bx}{a}$ ad HG; erit HG ∞ $\frac{aby+abb+bbx}{a\sqrt{aa+bb}}$. Quæ si subtrahatur ex DH ∞ $\sqrt{aa+bb}+\frac{x}{a}\sqrt{aa+bb}$, relinquetur DG ∞ $\frac{a^3+aax-aby}{a\sqrt{aa+bb}}$ seu $\frac{aa+ax-by}{\sqrt{aa+bb}}$. Denique quoniam DF est ad DA, hoc est, $\sqrt{aa+bb}$ ad a, sicut CH, hoc est,

$y + b + \frac{bx}{a}$, ad CG; erit CG $\infty \frac{ab + bx + ay}{\sqrt{aa + bb}}$. E quibus perspicuum fit, differentiam omnem, quæ in referendis curvæ punctis C, tum ad puncta rectæ A B, tum ad puncta rectæ D F, obtineri potest, in eo tantùm consistere, quòd, cùm A B indeterminata relinquitur, C B exprimatur per y; sed C G per $\frac{ab + bx + ay}{\sqrt{aa + bb}}$; & D G per $\frac{aa + ax - by}{\sqrt{aa + bb}}$. Ita ut si y speciem induat, quæ ei ex proprietate curvæ convenit; constabit simul relatio, quam curvæ puncta C obtinebunt ad puncta utriusque rectæ A B, D F. Id quod eodem modo in omni alia datarum linearum positione ostendi posset, nisi breviores esse vellemus.

B *Saltem si supponamus quantitatem e z majorem quàm c g. nam si minor foret, mutanda essent omnia signa + & —.*] Existente enim ez minore quàm cg, & multiplicando utrobique per z^2, foret ez^3 minor quàm cgz^2. Quo casu omnes quoque numeratoris termini, qui signo + adficiuntur, minores erunt illis, qui signo — adficiuntur; adeò ut tantùm mutanda sint omnia signa. Æquationem autem hoc facto illæsam manere, ita ostenditur. Esto $y \infty \frac{fe - dk}{d - e}$ (sufficit enim id per facile aliquod exemplum ostendere), suppositaque d minori quàm e, mutentur omnia signa + & —: fietque $y \infty \frac{-fe + dk}{-d + e}$.

Quoniam enim ex hypothesi $y \infty \frac{fe - dk}{d - e}$, erit, multiplicando utrinque per $d - e$, $dy - ey \infty fe - dk$. Unde factâ transpositione, ut totum æquetur nihilo, erit $dy - ey - fe + dk \infty 0$. Transferantur rursus $+ dy - ey$ in alteram æquationis partem, & fiet $-fe + dk \infty -dy + ey$. Quæ æquatio à præcedenti non differt, nisi quòd termini omnes contrariis signis sint adfecti. Quare si utraque æqualitatis pars dividatur per $-d + e$, prodibit $y \infty \frac{-fe + dk}{-d + e}$. ut erat propositum.

Unde colligere licet: Si quantitates quædam signis + & — junctæ æquentur aliis quibusdam quantitatibus etiam signis + & — junctis: erunt quoque eædem contrariis signis affectæ inter se æquales.

Vnde

Vnde si in hac æquatione quantitas y nulla sit, aut minor quàm nihil, postquam punctum C supposuimus in angulo D A G, oporteret & illud supponere in angulo D A E, aut E A R, aut R A G, mutando signa + & —, prout ad effectum hunc requireretur. Quòd si verò in quatuor hisce positionibus valor ipsius y nullus reperiretur, indicio esset, quæstionem casu proposito esse impossibilem.] Sciendum hic ab Autore obiter notari, ad plenam compositionem loci, in quem cadit quæsitum punctum C, opùs esse ut investigemus id ipsum in omnibus 4^or angulis D A G, D A E, E A R, & R A G, quærendo nempe ad hoc 4^or æquationes diversas. Id quod notat facile esse, unâ æquatione jam inventâ, quoniam ad reliquas obtinendas tantummodo mutare oportet signa + & —, pro diversa habitudine quantitatum inventarum ad figuræ lineas; ut punctum C, quando cadit intra angulum D A E, aut E A R, aut R A G quæratur eâdem ratione, quâ illud hìc invenire docuit, cùm intra angulum D A G cadere supponitur. Manifestum enim est, quòd, si in 4^or hisce positionibus valor ipsius y nullus reperiatur, quæstio proposita futura sit impossibilis. Quod ipsum hìc in genere de puncto C intelligi debet, etiamsi quæstio alias conditiones præsupponat: cum illa vix alioquin Autori (ob exiguam ejus utilitatem) istius momenti visa sit, ut in constructione hujus loci totus esset, nisi quatenus hìc unà simul compositionem Locorum Planorum & Solidorum traderet, sicut ipsius verba indicant p. 12 & 34. Quippe aliàs in hac positione datarum linearum contingit, quando videlicet rectangulum sub C B, C F ponitur æquale rectangulo sub C D, C H, ut punctum C non tantùm ubivis cadat in Circulum, qui transit per puncta A, G, & duas intersectiones linearum F E, G H, & ipsarum D A, F E; verùm etiam in utramque duarum oppositarum Hyperbolarum, quarum una transit per A & G puncta, & altera per duas reliquas intersectiones dictas. Quemadmodum etiam, si duæ ex datis lineis sunt parallelæ, fieri potest, ut punctum C ubilibet cadat in duas oppositas Hyperbolas & insuper in Parabolam vel in duas alias oppositas Hyperbolas; aut etiam in duas oppositas Hyperbolas & in rectam lineam, ubi videlicet bina sunt parallelarum paria sese intersecantia. atque ita de aliis. Idem observare licet in Apollonii Locis Planis, à me restitutis, in quorum nonnullis,

BB

Vide fig. pag. 12.

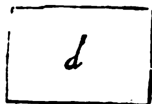
 ad

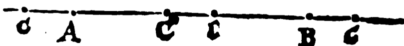
ad plenam loci compoſitionem, quæſitum punctum præter lineas jam expreſſas etiam alia plana loca contingit, quæ pari facilitate inveſtigari & conſtrui poſſunt, prout nimirum idem punctum ad id in aliis tantùm angulis ſuppoſitum fuerit; quemadmodum & ibidem fuit indicatum.

His ſimilia notare quoque licet circa Problemata omnino determinata, in quibus non niſi certus eſt punctorum numerus. Cujuſmodi eſt ſequens

PROBLEMA.

IN recta interminata aſſignatis duobus punctis A, B, in eadem aliud aſſignare punctum C, ut rectangulum ACB, quod ſit ſub rectis AC, CB, ad aſſignata puncta A, B abſciſſis, dato ſpatio *d* æquale ſit, quod tamen minus ſit quartâ parte quadrati ex AB, quæ ſit ∞ *a*.





Quoniam hìc juxta mentem Problematis punctum C indeterminatum eſt reſpectu puncti A, ut & reſpectu puncti B, hoc eſt, indeterminatum quò magis ad dextram quàm ad ſiniſtram utriuſque cadat, hinc ſi concipiatur determinatum inter A & B, æquatio huc pertinens comprehendet plus quàm oportet, neque legitima erit, ſi ei ſoli acquieſcere velimus. Quocirca & illud ipſum extra A & B ab utraque parte ſupponendum eſt, ſi velimus ut ſolutio Problematis omnibus numeris ſit abſoluta.

Unde ſupponendo C primùm cadere extra AB ad ſiniſtram ipſius A, erit, aſſumptâ x pro Ac, $xx + ax \infty d$; ac deinde ſupponendo C cadere inter A & B, erit $ax - xx \infty d$; & denique ſupponendo c cadere extra AB ad dextram ipſius B, erit $xx - ax \infty d$. Hoc eſt in numeris, ſi a ſit ∞ 20, $d \infty 96$, habebitur $x \infty 4$, $x \infty -24$; $x \infty 12$, $x \infty 8$; $x \infty 24$, & $x \infty -4$. Quæ quidem omnes ſunt radices, quæ ad propoſitum Problema pertinent. Quarum prima & ultima deſignant longitudinem lineæ Ac ∞x,

qualis

qualis ipſa ſumenda eſt ab A versùs ſiniſtram, & quatuor reliquæ, qualis ipſa ſumi debet ab A versùs dextram, cadente puncto C inter A & B, vel ultra B; adeò ut in toto ſint 4^or^ diverſa puncta, quæ quæſito ſatisfaciant.

Cæterùm ſi velimus, ut una obtineatur æquatio, quæ haſce omnes radices ſimul includat, oportet tantùm, ubicunque accepto puncto C, factâque A c $\propto x$, multiplicare $xx + 20x - 96 \propto 0$ per $20x - xx - 96 \propto 0$, & id quod fit rurſus per $xx - 20x - 96 \propto 0$, & invenietur $-x^6 + 20x^5 + 496x^4 - 11840x^3 + 47616xx + 184320x - 884736 \propto 0$ ſeu $x^6 - 20x^5 - 496x^4 + 11840x^3 - 47616xx - 184320x + 884736 \propto 0$.

Id quod etiam univerſaliùs fieri poteſt multiplicando C B $\propto \pm 20 \pm x$ per A C $\propto x$, obtinebitur enim $\pm 20x \pm xx \propto 96$. Quæ æquatio præter radices ſuperiores etiam continet $x \propto -8$, & $x \propto -12$, quippe quæ eliciuntur ex æquatione $-xx - 20x \propto 96$.

Ubi demum notandum, ex æquatione inventa $\pm 20x \pm xx \propto 96$ facile quoque eſſe aliam vulgari modo affectam invenire, quæ omnes eaſdem radices cum illa comprehendat, utpote multiplicando utramque partem in ſe quadratè, & fit $400xx \pm 40x^3 + x^4 \propto 9216$. Unde ſervatâ $\pm 40x^3$ ab una parte, & deinde utrâque rurſus quadratâ, invenitur æquatio $x^8 - 800x^6 + 141568x^4 - 7372800xx + 84934656 \propto 0$, cujus radices eædem ſunt quæ præcedentis æquationis $\pm 20x \pm xx \propto 96$, quas enumeravimus. Ratio autem, cur D. des Cartes hujuſmodi æquationibus ad ſolutionem quæſtionis ex Pappo allatæ non fuerit uſus, vel ea videtur, quòd alias tum vulgares, tum etiam à quolibet faciliùs perceptibiles animadverterit; ita ut, dum quæſtio per ſe ſatis difficilis exiſtit, præſtare judicaverit, ſpecialem æquationem pro C puncto inveſtigare, poſtquam illud in angulo D A G ſupponitur, ulteriùsque tantùm digito indicare, ſi Problemati penitus ſatisfaciendum ſit, eodem modo in reliquis angulis D A E, E A R, & R A G eſſe procedendum; quàm æquationem univerſalem, quæ omnia ſimul puncta reſpiceret, invenire.

Hinc nihil mihi ampliùs reſtare video pro linea L C præter C
hoſce terminos: $LC \propto \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. *Vnde cognoſcitur,*

scitur, quòd si nulli fuissent, futurum fuisse ut punctum C reperiretur in linea recta I L; & si tales extitissent, ut inde radix extrahi potuisset, hoc est, ut, m m & $\frac{p}{m}$ x x signo + notatis, o o fuisset æqualis 4 p m, sive etiam termini m m & o x, aut o x & $\frac{p}{m}$ x x nihilo fuissent æquales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidisset, quæ quidem inventu difficilior non fuisset quàm I L.] Hæc verba tres conditiones complectuntur ad determinandum punctum C, quando in lineam rectam cadit.

Nam cum facienda sit L C ∞ $\sqrt{mm + ox - \frac{pxx}{m}}$, reperietur illud punctum in linea recta I L, si termini, quibus ipsa exprimitur, nulli sint. Et si tales fuerint, ut radix ex iis extrahi possit, hoc est, ut, mm & $\frac{p}{m}xx$ signo + notatis, oo sit æqualis $4pm$, hoc est, ut L C sit $\sqrt{mm + \frac{pxx}{m} \; 8 \; x\sqrt{4pm}}$ seu $m \; 8 \; x\sqrt{\frac{p}{m}}$: punctum C similiter in recta linea reperietur. Idem continget, si termini mm & ox, aut ox & $\frac{pxx}{m}$ fuerint nulli, dummodo reliquus $\frac{pxx}{m}$, aut mm semper signo + adfectus sit.

CC *Sed si hoc non fiat, punctum C reperietur semper in aliqua trium Conicarum sectionum, aut in Circulo, cujus, &c.*] Quò ista, quæ hic deinceps pag. 29, 30, & 31 ab Autore traduntur, cuivis manifestiora fiant, sequentia in medium afferre visum fuit.

Primus casus, cùm Sectio est Parabola, in quâ linea L C una ex iis existit, quæ ordinatim ad diametrum, quæ semper in lineam I L cadit, adplicantur; & cujus vertex N in ea ex altera parte puncti L sumendus est respectu puncti I; linea L C existente ∞ $\sqrt{mm + ox}$. Ad quem inveniendum, sicut & latus rectum

ctum r, pono pro NI f, eritque NL $\infty f + \frac{ax}{z}$, deinde ita procedo:

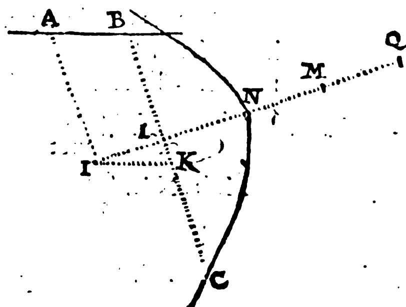
$$\begin{array}{l} \text{Mult. NL. } f + \frac{ax}{z} \\ \text{per } \quad r \\ \hline \text{fit } \square \text{ LC. } fr + \frac{arx}{z}, \text{ æquale } mm + ox. \end{array}$$

$$\frac{ar}{z} \infty o \qquad\qquad fr \infty mm, \text{ dele } r$$

$$ar \infty oz \qquad\qquad \frac{foz}{a} \infty mm$$

$$r \infty \frac{oz}{a} \qquad\qquad foz \infty amm$$

$$f \infty \frac{amm}{oz}$$



2dus casus, ubi vertex N in linea IL ex eadem parte puncti L sumendus est respectu puncti I, lineâ LC existente ∞ $\sqrt{mm - ox}$.

Quod sic liquet

$$\begin{array}{l} \text{Mult. LN. } f - \frac{ax}{z} \\ \text{per } \quad r \\ \hline \text{fit } \square \text{ LC. } fr - \frac{arx}{z} \text{ æquale } mm - ox. \end{array}$$

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $f \infty \frac{amm}{oz}$.

3tium

3^{tius} casus, ubi vertex N in linea I L sumi debet inter puncta I & L, lineâ L C existente $\infty \sqrt{-mm+ox}$.

Quod sic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z} - f$

per r

fit $\Box$ L C. $\frac{arx}{z} - fr$, æquale $-mm+ox$.

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $f \infty \frac{amm}{oz}$.

4^{tus} casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm nulla est, lineâ L C existente ∞ $\sqrt{ox}$.

Quod sic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z}$

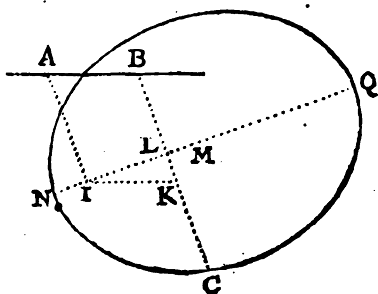
per r

fit $\Box$ L C. $\frac{arx}{z}$, æquale ox.

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$.

E quibus colligitur, cum in omnibus hisce Parabolæ casibus sive diversis ejus positionibus latus rectum sit ∞ $\frac{oz}{a}$, atque in iis nullibi reperiatur quantitas in xx ducta, nec præter easdem ulla alia excogitari possit, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur, quæsitum punctum C cadere in Parabolam, cujus latus rectum est $\frac{oz}{a}$, quæque pro diversa terminorum ipsius L C constitutione, positiones jam explicatas admittat.

Primus



Primus casus, cùm linea est Circulus, & centrum ejus M in linea I L ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Ad quod inveniendum, ut & diametrum N Q, pono pro N M vel M Q c, & pro I M d; eritque N L $\infty\, c - d + \frac{ax}{z}$, & L Q $\infty\, c + d - \frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Mult. N L.} & c & -d & +\frac{ax}{z} & \\
\text{per L Q.} & c & +d & -\frac{ax}{z} & \\
\hline
 & cc & -cd & +\frac{acx}{z} & \\
 & & +cd & -dd & +\frac{adx}{z} \\
 & & & -\frac{acx}{z} & +\frac{adx}{z} \quad -\frac{aaxx}{zz} \\
\hline
\end{array}
$$

fit ▭ N L Q seu □ L C. $cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm + ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige ~~hic~~ c majorem esse quàm d.

$$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m} \qquad \frac{2ad}{z} \infty o$$

$$aam \infty pzz \qquad 2ad \infty oz$$

$d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$. Est enim $aam \infty pzz$. Et fit $dd \infty \frac{oozz}{4aa}$.

$cc - dd \infty mm$, dele dd

$cc \infty \frac{oozz}{4aa} + mm$

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{4aamm}{aa}$, dele aam

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}$

$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$.

2^{dus} casus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte puncti L sumendum est respectu puncti I, lineâ L C existente $\propto \sqrt{mm - ox - \frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet.

Mult. QL. $c + d + \frac{ax}{z}$

per L N. $c - d - \frac{ax}{z}$

$cc + cd + \frac{acx}{z}$

$- cd - dd - \frac{adx}{z}$

$- \frac{acx}{z} - \frac{adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$

fit □ QLN seu □ L C. $cc - dd - \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm - ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hìc similiter c majorem quàm d.

Et fit, ut ante, $aam \propto pzz$, $d \propto \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$, &

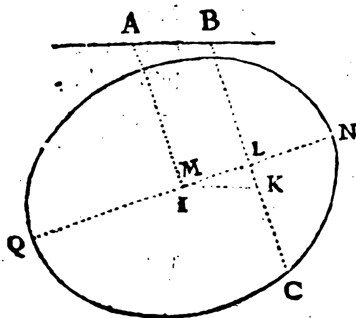
$2c \propto r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$.

3^{tius} casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas $o\,x$ nulla est, lineâ L C existente

$\infty \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$.

Et fit $2c \infty {}^{2}m$ vel $\frac{2pzz}{aa}$, vel etiam

$\sqrt{4\frac{mpzz}{aa}}$.



Quod sic liquet

Mult. QL. $c + \frac{ax}{z}$

per LN. $c - \frac{ax}{z}$

$$cc + \frac{acx}{z}$$

$$- \frac{acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$$

& fit ▭ QLN seu □ L C. $cc - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hic d esse ∞ o.

$$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$$

$$aam \infty pzz$$

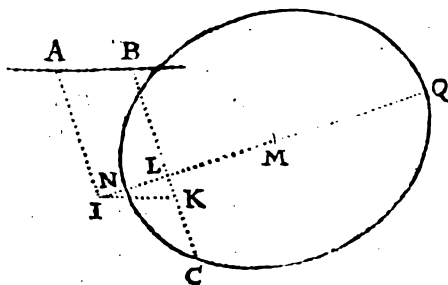
$$m \infty \frac{pzz}{aa}, \text{ \& } mm \infty \frac{ppz^4}{a^4} \infty cc$$

$$\frac{4ppz^4}{a^4} \infty 4cc$$

$$2c \infty r \infty {}^{2}\frac{pzz}{aa} \text{ vel } 2m.$$

Nota hìc in tribus allatis casibus, in quibus c major intelligitur quàm d, verticem N cadere ad alteram partem puncti M respectu puncti I, hoc est, quando habetur $+mm$.

 4^{tus}



4^{tus} casus, ubi vertex N cadit ad eandem partem puncti M respectu puncti I, nimirum inter puncta I & L, cùm quantitas oo est major quàm $4mp$, lineâ LC existente ∞ $\sqrt{-mm+ox-\frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$.

Quod sic liquet

Mult. NL. $c - d + \frac{ax}{z}$

per LQ. $c + d - \frac{ax}{z}$

$$cc - cd + \frac{acx}{z}$$
$$+ cd - dd + \frac{adx}{z}$$
$$- \frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$$

fit ▭ NLQ seu □ LC, $cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $-mm+ox-\frac{p}{m}xx$.

Intellige hìc c minorem quàm d.

$$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$$
$$aam \infty pzz$$

$$\frac{2ad}{z} \infty o$$
$$2ad \infty oz$$

$d \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$. Est enim $aam \infty pzz$.

Et fit $dd \infty \frac{oozz}{4aa}$.

$cc -$

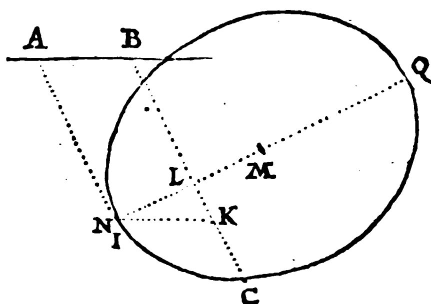
$cc - dd \infty - mm$, dele dd

$cc \infty \frac{oozz}{4aa} - mm$

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{4aamm}{aa}$, dele aam

$4cc \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}$

$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Circulum, quemadmodum supposuimus, quantitatem oo hoc casu majorem requiri quàm $4mp$.



5^tus^ casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ L C existente $\infty \sqrt{ox - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $d \infty c \infty \frac{oz}{2a}$ seu $\frac{aom}{2pz}$, & $2c \infty \frac{oz}{a}$.

Quod sic liquet

Mult. N L. $\frac{ax}{z}$

per L Q. $2c - \frac{ax}{z}$

fit ▭ N L Q seu □ L C. $\frac{2acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hìc c & d esse æquales.

$\frac{2ac}{z} \infty o$

$2ac \infty oz$

$2c \infty r \infty \frac{oz}{a}$

$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$

$aam \infty pzz$

Hinc cùm in omnibus hisce Circuli casibus sive diversis ejus positionibus quantitas in xx ducta ubique signo — adfecta reperiatur, ut & quantitas $aam \infty pzz$; nec præter positiones hasce ulla alia

la alia excogitari possit, quâ linea LC talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur: sequitur, si in quæstione terminus $\frac{p}{m}xx$ signo — fuerit adfectus, & quantitas $aam \propto pzz$, angulo ILC existente recto, lineam, in quam punctum quæsitum C cadit, fore Circulum, quemadmodum est ostensum.

Primus casus, cùm linea est Ellipsis, & centrum ejus M in linea IL sumendum est ex eadem parte puncti L respectu puncti I, lineâ LC existente $\propto \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Ad quod inveniendum, sicut & latus rectum r, & transversum NQ, pono, ut ante in Circulo, pro NM vel MQ c, & pro IM d: eritque NL $\propto c - d + \frac{ax}{z}$; & LQ $\propto c + d - \frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

lat. transv.	lat. rect.	▭ NLQ
$2c$ —	r —	$cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, ad

□ LC

$$\frac{ccr - ddr + \frac{2adrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale } mm + ox - \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hìc c majorem esse quàm d.

$$\frac{adr}{cz} \propto o$$

$$adr \propto coz$$

$$\frac{adr}{oz} \propto c, \ \& \ \frac{aaddrr}{oozz} \propto cc \qquad \frac{aar}{2czz} \propto \frac{p}{m}$$

dele c, $aamr \propto 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$,

$$aamr \propto \frac{2adpzr}{o} \quad \text{ita } pzz \text{ ad } aam$$

$$aom \propto 2dpz$$

$$\frac{aom}{2pz} \propto d$$

ccr —

$\frac{ccr - ddr}{2c} \infty mm$

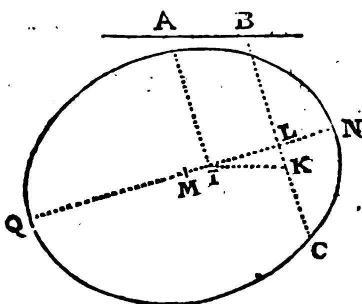
$ccr - ddr \infty 2cmm$, dele c & cc

$\frac{aaddr^3}{oozz} - ddr \infty \frac{2admmr}{oz}$

$aadrr \infty doozz + {}^2ammoz$

$rr \infty \frac{oozz}{aa} + \frac{2mmoz}{ad}$, dele d, & extr. $\sqrt{}$

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.



2[dus] casus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte est sumendum puncti L respectu puncti I, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - ox - \frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. $\square$ Q L N

$2c$ ——— r ——— $cc - dd - \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$,

$\square$ L C

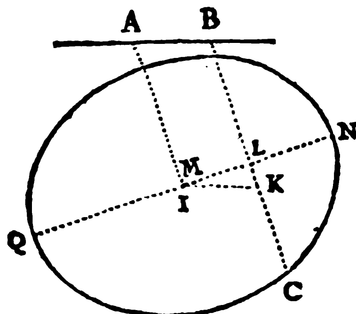
ad $\frac{ccr - ddr - \frac{2adrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $mm - ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hìc similiter c majorem quàm d.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.

3[tius]



3^{tius} casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ox nulla est, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$ seu $\frac{2z}{a}\sqrt{mp}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod sic liquet

lat. transv.	lat. rect.	▭ QKN	☐ LC
$2c$ ——	r ——	$cc - \frac{aaxx}{zz}$, ad	$\frac{ccr - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale

$mm - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hic d esse ∞o

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

$aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$c \infty \frac{aamr}{2pzz}$

$\frac{cr}{2} \infty mm$

$cr \infty 2mm$, dele c

$\frac{aamrr}{2pzz} \infty 2mm$

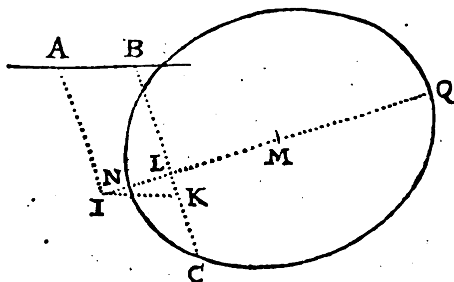
$aarr \infty 4mpzz$

$rr \infty \frac{4mpzz}{aa}$

$r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Ubi

Ubi notandum, in allatis tribus casibus, sicut in Circulo, propter c ipsâ d majorem, verticem N cadere ad alteram partem puncti M respectu puncti I, hoc est, quando habetur $+mm$.



4^{tus} casus, ubi vertex N cadit ad eandem partem puncti M respectu puncti I, nimirum inter puncta I & L, cùm oo est major quàm $4mp$, lineâ L C existente $\infty \sqrt{-mm+ox-\frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}-\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod sic liquet.

lat. transv. lat. rect. ▭ N L Q

$2c$ —— r —— $cc-dd+\frac{2adx}{z}-\frac{aaxx}{zz}$, ad

□ L C

$\frac{ccr-ddr+\frac{2adrx}{z}-\frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $-mm+ox-\frac{p}{m}xx$.

Intellige hìc c minorem quàm d.

$\frac{adr}{cz} \infty o$

$adr \infty coz$

$\frac{adr}{oz} \infty c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$

$aom \infty 2dpz$

$d \infty \frac{aom}{2pz}$

$\frac{ccr - ddr}{2c} \infty - mm$

$ccr - ddr \infty - 2cmm$, dele c & cc

$\frac{aaddr^3}{oozz} - ddr \infty - \frac{2admmr}{oz}$

$aadrr \infty doozz - 2ammoz$

$rr \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{2mmoz}{ad}$, dele d, & extr. $\sqrt{}$

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Ellipsin, quemadmodum hìc supposuimus, quantitatem oo hoc casu minorem requiri quàm $4mp$.

5tus casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ LC existente ∞ $\sqrt{ox - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $d \infty c \infty \frac{aom}{2pz}$, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $2c \infty \frac{aom}{pz}$.

Quod sic liquet

lat. transv. lat. rect. ▭ NLQ □ LC

$2c$ —— r —— $\frac{2acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, ad $\frac{\frac{2acrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hìc c & d æquales.

$\frac{ar}{z} \infty o$

$ar \infty oz$

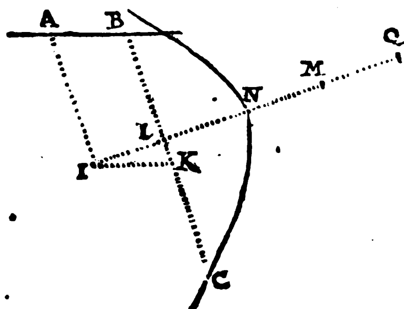
$r \infty \frac{oz}{a}$

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

$aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam. Unde ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\frac{oz}{a}$, ad $\frac{aom}{pz}$.

Quo-

Quocirca cum in omnibus hisce Ellipseos casibus sive diversis ejus positionibus quantitas in xx ducta ubique signo — adfecta reperiatur, & ratio recti lateris ad transversum sit, ut pzz ad aam; nec præter allatas positiones ulla alia excogitari queat, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur: sequitur, si in quæstione terminus $\frac{p}{m}xx$ signo — denotatus fuerit, lineam, in quam punctum quæsitum C cadit, fore Ellipsin, cujus rectum latus ad transversum sit ut pzz ad aam, ac ejusdem positio, cujusmodi jam est ostensum, exiltat.



Primus casus, cùm sectio est Hyperbola, in quâ linea L C est una ex iis, quæ ad diametrum, quæ est in linea I L, ordinatim adplicantur; & ubi centrum M in linea I M ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, cùm quantitas oo est major quàm $4mp$, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm - ox + \frac{p}{m}xx}$.

Hinc ad inveniendum centrum M, latus rectum r, & transversum N Q, pono, ut ante in Circulo & Ellipsi, pro N M vel M Q c, & pro I M d: eritque N L $\infty\ d - c - \frac{ax}{z}$, & L Q $\infty\ d + c - \frac{ax}{z}$.

 Dein-

Deinde ita procedo:

Mult. NL. $d - c - \frac{ax}{z}$

per LQ. $d + c - \frac{ax}{z}$

$$dd - cd - \frac{adx}{z}$$
$$+ cd - cc - \frac{acx}{z}$$
$$- \frac{adx}{z} + \frac{acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$2c$ —— r —— $\square$ NLQ. $dd - cc - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad $\square$ LC. $\frac{ddr - ccr - \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

Intellige hìc d majorem esse quàm c.

$\frac{adr}{cz} \infty o$

$adr \infty coz$

$\frac{adr}{oz} \infty c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$

$\frac{2aar}{czz} \infty \frac{p}{m}$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$

$aom \infty 2dpz$

$\frac{aom}{2pz} \infty d$

$\frac{ddr - ccr}{2c} \infty mm$

$ddr - ccr \infty 2cmm$, dele c & cc

$ddr - \frac{aaddr^3}{oozz} \infty \frac{2admmr}{oz}$

$doozz - aadrr \infty 2ammoz$

$doozz - 2ammoz \infty aadrr$

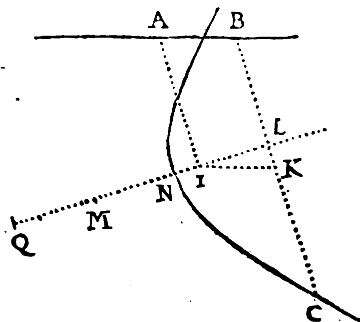
$\frac{oozz}{aa} - \frac{2mmoz}{ad} \infty rr$, dele d, & extr. $\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} \infty r$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita

$$\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}, \text{ ad } \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Ubi

Ubi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum supposuimus, quantitatem oo hoc casu majorem requiri quàm $4\,mp$.



2[dus] casus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte puncti L sumendum est respectu puncti I, cùm oo est major quàm $4\,mp$, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet

$$\text{Mult. QL. } c + d + \frac{ax}{z}$$

$$\text{per LN.} - c + d + \frac{ax}{z}$$

$$-cc - cd - \frac{acx}{z}$$

$$+ cd + dd + \frac{adx}{z}$$

$$+ \frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$$2c \text{ --- } r \text{ --- } \square \text{QLN. } dd - cc + \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz},$$

$$\text{ad } \square \text{ LC. } \frac{ddr - ccr + \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale}$$

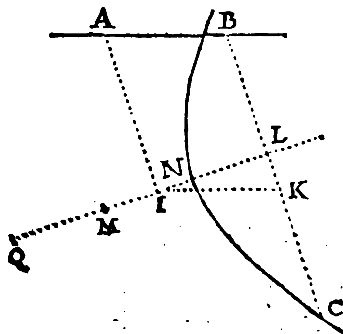
$$mm + ox + \frac{p}{m}xx.$$

Similiter hic d majorem intellige quàm c.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \propto \frac{aom}{2pz}$,

$$r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} \;\&\; 2c \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum supposuimus, quantitatem oo & hoc casu majorem requiri quàm $4mp$.



3^tius^ casus, ubi vertex N sumendus est inter puncta I & L, lineâ LC existente $\propto \sqrt{-mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \propto \frac{aom}{2pz}$, $r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod sic liquet

$$\text{Mult. QL.} \quad c + d + \frac{ax}{z}$$

$$\text{per LN.} \; -c + d + \frac{ax}{z}$$

$$-cc - cd - \frac{acx}{z}$$

$$+cd + dd + \frac{adx}{z}$$

$$+\frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$$2c \text{---} r \text{---} \square\, \text{QLN.}\; dd - cc + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz},$$

$$\text{ad } \square\, \text{LC.} \frac{ddr - ccr + \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale}$$

$$-mm + ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intel-

Intellige hìc d minorem esse quàm c.

$\frac{adr}{cz} \infty o$

$adr \infty coz$

$\frac{adr}{oz} \infty c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$aamr \infty \frac{2adpzr}{o}$

$aom \infty 2dpz$

$\frac{aom}{2pz} \infty d$

$\frac{ddr - ccr}{2c} \infty - mm$

$ddr - ccr \infty -2cmm$, dele, c & cc

$ddr - \frac{aaddr^3}{oozz} \infty - \frac{2admmr}{oz}$

$doozz + 2ammoz \infty aadrr$

dele d, & extr. $\surd$. $\frac{oozz}{aa} + \frac{2mmoz}{ad} \infty rr$

$\surd \frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa} \infty r$. Hinc ad inveniendum latus transversum, fiat ut pzz ad aam, ita $\surd \frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}$, ad $\surd \frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}$.

4^{tus} casus, ubi centrum M & vertex N sumi debent inter puncta I & L, lineâ LC existente $\infty \surd - mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

Quod

Quod sic liquet

$$\text{Mult. QL.} \quad c - d + \frac{ax}{z}$$

$$\text{per LN.} \; - c - d + \frac{ax}{z}$$

$$-cc + cd - \frac{acx}{z}$$

$$-cd + dd - \frac{adx}{z}$$

$$+\frac{acx}{z} - \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat.tr. lat.rect.

$$2c \text{ —— } r \text{ —— } \square \text{ QLN.} \; -cc + dd - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz},$$

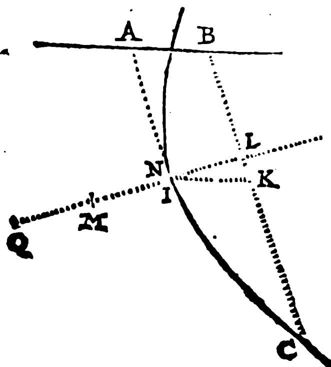
$$\text{ad } \square \text{ LC.} \; \frac{-ccr + ddr - \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale}$$

$$-mm - ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hìc similiter d minorem quàm c.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \propto \frac{aom}{2pz}$,

$$r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}, \; \& \; 2c \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}.$$



5^{tus} casus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ LC existente

$$\propto \sqrt{ox + \frac{p}{m}xx}.$$

Quod sic liquet

$$\text{Mult. QL.} \; 2c + \frac{ax}{z}$$

$$\text{per LN.} \quad \frac{ax}{z}$$

lat. transv. lat. rect.

$$2c \text{ —— } r \text{ —— } \square \text{ QLN.} \; \frac{2acx}{z} + \frac{aaxx}{zz},$$

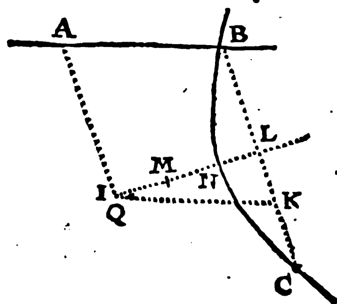
$$\text{ad } \square \text{ LC.} \; \frac{\frac{2acrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale } ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intel-

Intellige hìc c & d esse æquales.

Et fit, ut ante in Ellipsi, r ad $2c$, ut pzz ad aam,

$$d \infty c \infty \frac{aom}{2pz},\ r \infty \frac{oz}{a},\ \&\ 2c \infty \frac{aom}{pz}.$$



6^{tus} casus, ubi vertex Q cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ LC existente $\infty \sqrt{-ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet

Mult. QL. $\frac{ax}{z}$

per LN. $-2c + \frac{ax}{z}$

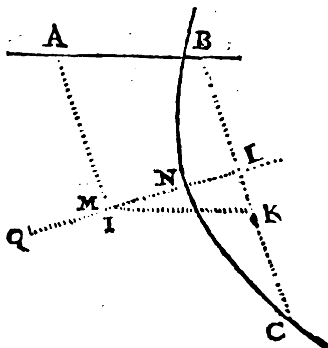
lat. transv. lat. rect.

$$2c \text{———} r \text{———} \square \text{QLN}. -\frac{2acx}{z} + \frac{aaxx}{zz},$$

$$\text{ad } \square \text{LC}. \frac{-\frac{2acrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c},\ \text{æquale } -ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hìc similiter c & d esse æquales.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty c \infty \frac{aom}{2pz}$, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $2c \infty \frac{aom}{pz}$.



7^{mus} casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ox nulla est, lineâ LC existente $\infty \sqrt{-mm + \frac{p}{m}xx}$.

 Quod

Quod sic liquet

Mult. Q L. $c + \frac{ax}{z}$

per L N. $-c + \frac{ax}{z}$

$$-cc - \frac{acx}{z}$$

$$+\frac{acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$2c$ — r — □ Q L N. $-cc + \frac{aaxx}{zz}$,

ad □ L C. $\frac{-ccr + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $-mm + \frac{p}{m}xx$.

Intellige hic d esse ∞ o.

Unde, ut ante in Ellipsi, invenitur, r esse ad $2c$, sicut pzz ad aam, & r ∞ $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, at verò $2c$ ∞ $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.

8^vus casus, ubi linea L C est parallela diametro, ad quam illa, quæ est in linea I L, ordinatim adplicatur, & ubi centrum M in linea I L ex eadem parte puncti L sumendum est respectu puncti I, cùm quantitas oo est minor quàm $4mp$, lineâ L C existente ∞ $\sqrt{mm - ox + \frac{p}{m}xx}$.

Hinc ad inveniendum centrum M, latus rectum R pertinens ad diametrum O P, & latus transversum O Q, pono, ut ante, pro I M d, & pro O M vel M Q e.

Dein-

Deinde ita procedo:

Multi. L M vel C P. $d - \frac{ax}{z}$

per C P. $d - \frac{ax}{z}$

$$dd - \frac{adx}{z}$$

$$- \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. rect. lat. transv.

R ——— 2 e ——— □ C P. $dd - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad ▭ Q P O. $\frac{2dde - \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

add. □ M O. ee

fit □ M P vel L C. $\frac{2dde + eeR - \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

æquale $mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

$$\frac{4ade}{Rz} \propto o$$

$$4ade \propto oRz$$

$$e \propto \frac{oRz}{4ad}$$

$$\frac{2aae}{Rzz} \propto \frac{p}{m}$$

dele e, $2aaem \propto pRzz$. Hinc ut $2e$ ad R, ita pzz ad aam.

$$\frac{aomRz}{2d} \propto pRzz$$

$$aom \propto 2dpz$$

$$\frac{aom}{2pz} \propto d$$

$$\frac{2dde + eeR}{R} \propto mm$$

$2dde + eeR \propto mmR$, dele e

$$\frac{dozR}{2a} + eeR \propto mmR$$

$$\frac{oom}{4p} + ee \propto mm$$

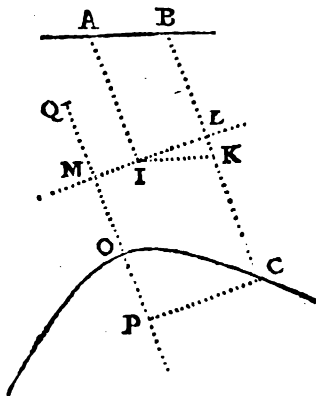
$$ee \propto mm - \frac{oom}{4p}$$

$e \propto \sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$, & $2e \propto \sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$.

 Hinc

Hinc ad inveniendum latus rectum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$, ad $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$.

Ubi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum suppofuimus, quantitatem oo hoc casu minorem requiri quàm $4mp$, contra quàm in primo casu.



9^{nus} casus, ubi centrum M in linea I L sumendum est ex altera parte puncti L respectu puncti I, cùm oo est minor quàm $4mp$, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod sic liquet

Mult. M L vel P C. $d + \frac{ax}{z}$

per P C. $d + \frac{ax}{z}$

$dd + \frac{adx}{z}$

$+ \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

lat. rect. lat. transv.

R —— $2e$ —— □ P C. $dd + \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

▭ Q P O

ad $\frac{2dde + \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

add. □ M O. ee

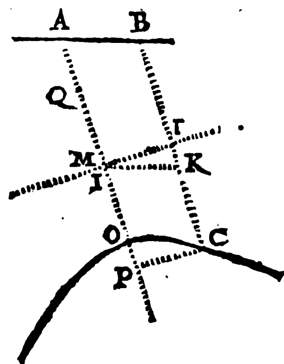
fit □ M P vel L C. $\frac{2dde + eeR + \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

æquale $mm + ox + \frac{p}{m}xx$.

Et fit, ut ante, $2e$ ad R, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$, $2e \infty \sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$, & $R \infty \sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$.

Ubi

Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum supposuimus, quantitatem oo & hoc casu minorem requiri quàm $4mp$, contra quàm in 2[do] casu.



10[mus] casus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas oo nulla est, lineâ L C existente $\infty \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

Et fit $2e \infty 2m$, & $R \infty \frac{2aamm}{pzz}$, & ratio $2e$ ad R, ut pzz ad aam.

Quod sic liquet

Mult. M L vel P C. $\frac{ax}{z}$

per P C. $\frac{ax}{z}$

lat. rect. lat. transv.

R —— $2e$ —— □ P C. $\frac{aaxx}{zz}$, ad ▭ Q P O. $\frac{2aaexx}{Rzz}$

add. □ M O. ee

fit □ M P vel L C. $ee + \frac{2aaexx}{Rzz}$,

æquale $mm + \frac{p}{m}xx$.

$ee \infty mm$

$e \infty m$, & $2e \infty 2m$

$\frac{2aae}{Rzz} \infty \frac{p}{m}$

dele e, $2aaem \infty pRzz$. Hinc ut $2e$ ad R, ita pzz ad aam.

$2aamm \infty pRzz$

$\frac{2aamm}{pzz} \infty R$

 Hinc

Hinc cum in omnibus hisce Hyperbolæ casibus sive diversis ejus positionibus quantitas in xx ducta ubique signo + adfecta reperiatur, & in prioribus septem latus rectum ad transversum sit, ut pzz ad aam, at in tribus posterioribus ut aam ad pzz; nec præter has positiones ulla alia excogitari queat, quâ linea LC talis, qualis in his omnibus casibus data fuit, obtineatur: sequitur, si in quæstione terminus $\frac{p}{m}xx$ signo + denotatus fuerit, punctum quæsitum C cadere in Hyperbolam, cujus rectum latus ad transversum sive etiam transversum ad rectum, pro diversa terminorum ipsius LC constitutione, sit ut pzz ad aam, ac ejusdem positio, qualis jam ostensa fuit, existat.

Ubi denique notandum, quòd, sicut punctum C in Hyperbolam cadere ostensum est, cujus vertex N vel O, id ipsum similiter in Hyperbola opposita pro libitu assumi possit, cujus vertex est Q, non autem indifferenter in 4^or^ ejusmodi sectionibus, quæ Conjugatæ vocantur, simul.

CCC *Quâ quidem ratione inde facile est invenire hanc Parabolam per Problema 1^mum^ primi libri Conicorum Apollonii.*] Quò illis, quibus hi Apollonii libri, aut etiam aliorum, qui de Conicis scripserunt, non sunt ad manus, hac in parte satisfiat: lubet hoc loco adducere ea, quæ mihi olim circa hæc, dum me inter peregrinandum in hac Geometriæ methodo exercebam, exciderant, simili occasione ipse investiganda proposui ac inveni. Quod etiam iis in hac Methodo se oblectare cupientibus, ut proprio marte propositiones invenire addiscant, inservire potest, prout iis, hisce tanquam exemplis, quibus ad alias quærendas & investigandas instigentur, præivero; ne ad universalem Matheseos complexionem plura librorum volumina evolvere & propositiones in iis singulas excutere (quod plerisque summus est scopus) opus habeant; quin potiùs quo pacto illæ inventæ fuerint perpendant, novasque alias innumeras, quibus scientia hæc non parvum incrementum capere valeat, invenire moliantur.

Verùm enimvero ut non solùm pateat, quâ ratione illa, quæ hoc loco Autor ab Apollonio ostensa citavit, juxta Geometriæ suæ methodum inveniri possint; sed etiam illa, quæ ex ipso p. 29, 31, & 32 allegavit (quæ omnia, quod sciam, ea sunt, quæ ab eo ad Geometriam suam ex Apollonio præsupponuntur): non abs re fue-

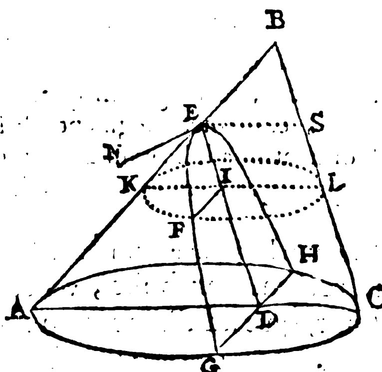
re fuerit illa præsenti commentario simul comprehendere atque ad Autoris mentem sic explicata exhibere.

DE LOCIS SOLIDIS SIVE CONICARUM SECTIONUM PROPRIETATIBUS.

Suppositiones.

1. REctam lineam B A vel B C, quæ à vertice coni B ducitur ad basis A C circumferentiam, esse in superficie conica.

2. Sectionem K F L, basi coni A C parallelam, esse circulum.



De PARABOLA, quæ est sectio coni A B C per planum G F E H, in quâ linea E D, communis sectio trianguli per axem A B C & plani secantis G F E H, quæ & sectionis diameter dici consuevit, parallela est uni laterum A B, B C ejusdem trianguli, ut hìc ipsi B C; lineâ G H, quæ Basis Sectionis G F E H vocatur, ipsam A C, basin trianguli per axem, ad rectos angulos secante.

Esto

Esto AB ∞ a
BC ∞ b Fiat propter similitudinem △rum ABC & KEI
AC ∞ c
EB ∞ d. ut BC ad CA, ita EI ad IK
EI ∞ x b —— c —— x / $\frac{cx}{b}$
FI ∞ y Rursus fiat propter similitudinem △rum ABC & EBS
ut AB ad AC, ita EB ad ES seu IL
a —— c —— d / $\frac{cd}{a}$ } Mult.
—— □ FI
fit ▭ KIL. $\frac{ccd}{ab}x \infty yy$.

Hinc si fiat, ut ab ad cc, hoc est, ut ▭ ABC ad □ AC, ita d, hoc est, EB, ad quartam, quæ sit EN: erit EN ∞ $\frac{ccd}{ab}$. Quæ si brevitatis causâ nominetur r, habebitur $rx \infty yy$. Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate 11mo primi libri Conicorum; ubi docet, rectangulum quodlibet, sub rectâ EN seu r sic inventâ, & diametri segmento EI, quod inter verticem ejus E & ordinatim adplicatam FI intercipitur, comprehensum, esse æquale quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ FI.

Ubi notandum, lineam hanc inventam EN seu r, ab Apollonio vocari Latus rectum Parabolæ, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum ED ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea Parameter appellatur. Quam porrò lineam breviùs obtinere licet, quàm hìc cum Apollonio ostendimus. Etenim lineâ ES existente ∞ $\frac{cd}{a}$, cum BC sit ad CA, hoc est, b ad c, sicut ES, hoc est, $\frac{cd}{a}$, ad EN ∞ $\frac{ccd}{ab}$: inveniri poterit EN, quærendo tantùm ipsis BC, CA, & ES quartam proportionalem. Quemadmodum ex ostensis est manifestum.

De

De *HYPERBOLA*, quæ est sectio coni ABC per planum GFEH, in quâ linea ER, communis sectio trianguli per axem ABC & plani secantis GFEH, quæ & Sectionis diameter dicitur, extra ejus verticem E producta convenit cum uno laterum AB, BC ejusdem trianguli extra verticem coni B producto, ut hìc in D; lineâ GH, quæ basis sectionis GFEH vocatur, ipsam AC, basin trianguli per axem, ad rectos angulos secante.

Sit AM $\infty\ a$
MB $\infty\ b$ — Fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ CBM & LDI
MC $\infty\ c$
DE $\infty\ q$ — ut BM ad MC, ita DI ad IL
EI $\infty\ x$, eritq; DI $\infty\ q+x$ — b — c — $q+x$ / $\frac{cq+cx}{b}$
FI $\infty\ y$.

Rursus fiat propter similitudinem
$\triangle^{rum}$ MBA & IEK
ut BM ad MA, ita EI ad IK
b — a — x / $\frac{ax}{b}$

Mult. — □ FI

fit ▭ LIK. $\frac{acqx+acxx}{bb}\ \infty\ yy.$

Hinc si fiat, ut bb ad ac, hoc est, ut □ B M ad ▭ A M C, ita q, hoc est, D E, ad quartam, quæ sit E N: erit E N ∞ $\frac{acq}{bb}$. Ipsa autem brevitatis causâ nominetur r.

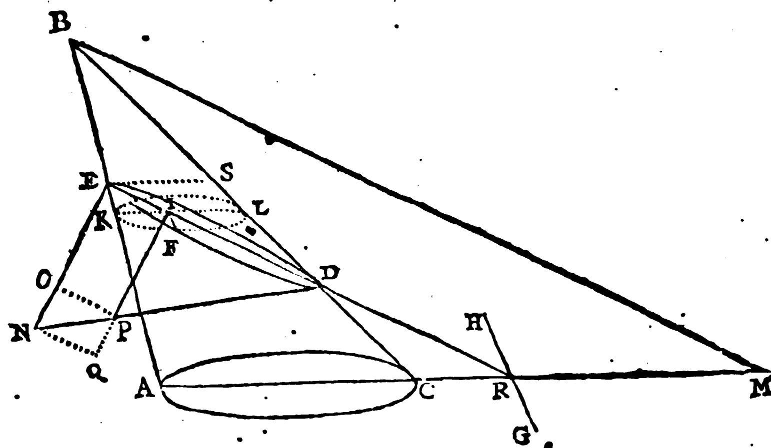
Deinde fiat rursus, ut bb ad ac, hoc est, ut D E ad E N, ita x, hoc est, E I seu N Q ad Q P ∞ $\frac{acx}{bb}$. Eritque rx + Q P in x ∞ yy. Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate duodecimo primi libri Conicorum, ubi docet, rectangulum quodvis, sub rectâ E N seu r sic inventâ, & diametri segmento E I seu x, quod inter ejus verticem E & ordinatim adplicatam F I interjicitur, comprehensum, unà cum rectangulo N Q P, quod sub eodem diametri segmento E I vel N Q, & lineâ Q P, ad quam N Q eandem rationem habet, quam D E ad E N, continetur, quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ F I esse æquale.

Ubi notandum, lineam D E ab Apollonio vocari Latus transversum Hyperbolæ, & lineam inventam E N Latus rectum, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum E R ordinatim adplicantur. à Mydorgio verò hæc ipsa Parameter appellatur. Quæ porrò linea faciliùs obtineri potest, hoc modo: Ductâ scilicet E S ipsi A C parallelâ, ac deinde ipsis B M, M A, & S E quærendo quartam proportionalem E N. Etenim cum B M sit ad M C, hoc est, b ad c, sicut D E, hoc est, q, ad E S: erit E S ∞ $\frac{cq}{b}$. Unde cum præterea B M ad M A sit, hoc est, b ad a, sicut E S, hoc est, $\frac{cq}{b}$, ad quartam $\frac{acq}{bb}$, quæ hìc eadem est, quæ linea E N superiori modo inventa: manifestum est id, quod proponitur.

De *ELLIPSI*, quæ est sectio Coni A B C per planum G F E H, in quâ linea E R, communis sectio trianguli per axem A B C & plani secantis G F E H convenit cum utroque latere A B, B C ejusdem trianguli in E & D; lineâ G H, quæ basis sectionis G F E H vocatur, ipsam A C, basin trianguli per axem, eandémve productam, ad rectos angulos secante.

Esto

Esto $AM \infty a$
$MB \infty b$
$MC \infty c$
$ED \infty q$
$EI \infty x$, eritque $ID \infty q - x$
$FI \infty y$.



Fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ BCM & DLI
ut BM ad MC, ita DI ad IL
b — c — $q - x$ / $\frac{cq - cx}{b}$
Rursus fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ ABM & KEI
ut BM ad MA, ita EI ad IK
b — a — x / $\frac{ax}{b}$ } Mult.

fit ▭ KIL. $\frac{acqx - acxx}{bb}$ □FI $\infty\, yy$.

Hinc si ut in Hyperbola fiat, ut bb ad ac, hoc est, ut □BM ad ▭ AMC, ita q, hoc est, DE, ad quartam, quæ sit EN: erit EN $\infty \frac{acq}{bb}$. Ipsa autem brevitatis causâ nominetur r.

Deinde fiat rursus, ut bb ad ac, hoc est, ut DE ad EN, ita x, hoc est, IE seu PO, ad ON $\infty \frac{acx}{bb}$. Eritque $rx -$ NO in $x \infty yy$.

 Quod

Quod ipsum est, quod ab Apollonio est ostensum Theoremate decimotertio primi libri Conicorum, Ubi docet, rectangulum quodvis, sub rectâ NE seu r sic inventâ, & diametri segmento EI seu x, quod inter ejus verticem E & ordinatim adplicatam FI interjicitur, comprehensum, minus rectangulo NOP, quod sub eodem diametri segmento EI vel OP, & lineâ NO, ad quam OP eandem rationem habet, quam DE ad EN, continetur, quadrato ejusdem ordinatim adplicatæ FI esse æquale.

Ubi notandum lineam ED, sectionis diametrum, ab Apollonio vocari Latus transversum ut & Diametrum transversam Ellipsis, & lineam inventam NE. Latus rectum, vel etiam Lineam, juxta quam possunt, quæ ad diametrum ED ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea NE Parameter appellatur. Quæ porrò linea, ut ante in Hyperbola, postquam linea ES ipsi AC ducta est parallela, breviùs obtineri potest, si tantùm ipsis BM, MA, & SE quæratur quarta proportionalis: quandoquidem hæc semper eadem existit, quæ ipsa NE, inventa, ut supra. Sicut superiùs à nobis in Hyperbola est ostensum.

Ex his porrò facilè liquet, quam inter se rationem habeant quadrata ordinatim adplicatarum ad diametrum in unaquaque harum trium sectionum. Etenim si in Parabolâ linea ED vocetur z, & ordinatim adplicata GD vocetur v, erit, ut supra, $\frac{ccdz}{ab} \propto vv$: ac proinde yy ad vv, hoc est, □FI ad □GD, ut $\frac{ccdx}{ab}$ ad $\frac{ccdz}{ab}$, seu x ad z, hoc est, EI ad ED. Hoc est, in Parabola quadrata ordinatim adplicatarum FI, GD inter se sunt, sicut lineæ EI, ED, quæ ab ipsis ex diametro ED ad verticem E abscinduntur. Quod ipsum est, quod docet Apollonius Prop^{ne} 20ma libri 1^{mi} Conicorum.

(Vide figuram 1.)

Eodem modo in Hyperbola & Ellipsi acceptâ pro EI aliâ magnitudine quàm ante, ut puta z, erit in Hyperbola $vv \propto \frac{acqz + aczz}{bb}$, & in Ellipsi $vv \propto \frac{acqz - aczz}{bb}$. Unde yy ad vv in Hyperbola fit, ut $\frac{acqx + acxx}{bb}$ ad $\frac{acqz + aczz}{bb}$, hoc est, ut $qx + xx$ ad $qz + zz$; at in Ellipsi, ut $\frac{acqx - acxx}{bb}$ ad

(Vide fig. 2. & 3.)

acqz—

$\frac{acqz-aczz}{bb}$, hoc eſt, ut $qx-xx$ ad $qz-zz$. Hoc eſt, in Hyperbola & Ellipſi quadrata ordinatim adplicatarum inter ſe ſunt, ut rectangula contenta lineis, quæ inter ipſas & vertices tranſverſi lateris interjiciuntur. Denique, quia in Hyperbola □ FI $\infty \frac{acqx+acxx}{bb}$ eſt ad ▭ EID $\infty qx+xx$, ut ac ad bb; ſimiliterque in Ellipſi □ FI $\infty \frac{acqx-acxx}{bb}$ ad ▭ EID $\infty qx-xx$, ut ac ad bb, hoc eſt, ut NE ad ED: patet in utrâque figurâ quadrata ordinatim adplicatarum FI eſſe ad rectangula EID, quæ ſub rectis EI, ID, inter FI & vertices tranſverſi lateris E, D interceptis, comprehenduntur, ut figuræ rectum latus NE ad tranſverſum ED. Omnino ut habet Prop^{tio} 21ma libri 1^{mi} Conicorum Apollonii. Eadem eſt ratio in Circulo, qui non niſi certa Ellipſis ſpecies cenſenda eſt, quippe in qua rectum latus & tranſverſum ſunt æqualia.

Oſtenſis igitur quo pacto Cono dato, eoque ſecto, ita ut ſectio Parabola, Hyperbola, vel Ellipſis exiſtat, ſectionis ſive figuræ hujus latera inveniri queant: reſtat ut è contra oſtendamus, quâ viâ Conus inveniri poſſit, & in eo unaquæque trium harum figurarum exhiberi, cujus latera ſint datis rectis lineis æqualia.

Ut ad inveniendum Conum ABC, in eoque ſectionem GFEH, quæ Parabola appellatur, cujus latus rectum ſit $\infty \frac{oz}{a}$, facio $\frac{ccd}{ab} \infty \frac{oz}{a}$ ſeu $\frac{boz}{ab}$, & fit rejecto ab, communi denominatore, $ccd \infty boz$. Hoc eſt, diviſo utrobique per cc, erit $d \infty \frac{boz}{cc}$. Hinc aſſumpto triangulo quolibet ABC, cujus latera ſint, AB ∞a, BC ∞b, & AC ∞c, ſi in ipſo ſumatur EB $\infty \frac{boz}{cc}$, atque ex E ducatur ED ipſi BC parallela: erit AC diameter circuli ſive baſis Coni, & ABC triangulum per axem. Ac proinde ſi per D in plano baſis hujus Coni ipſi AC ad rectos angulos ducatur GH, atque per rectas GH, DE ſectio inſtituatur, faciens in ſuperficie Conica curvam lineam GFEH: erit hæc ipſa Parabola, cujus latus rectum NE ſit datæ $\frac{oz}{a}$ æqualis, quemadmodum requirebatur. Quòd ſi verò ipſa talis præterea exhiberi debeat, ut rectæ FI, quæ ſemper ipſi GH parallelæ intelligun- Vide fig. 1.

guntur, in dato angulo ad diametrum E D adplicentur, opùs tantùm erit angulum G D E sive E D H dato æqualem efficere, intelligendo ad id circulum A G C H moveri circa A C, tanquam axem, eritque Problemati ex omni parte satisfactum.

Vide 2. & 3. fig. Similiter ad inveniendum Conum A B C, & in eo sectionem G F E H, quæ sit vel Hyperbola vel Ellipsis, cujus latus rectum sit $\infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & transversum $\infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$: facio $\frac{acq}{bb} \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $q \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$. Hoc est, assumptis horum quadratis, erit $\frac{aaccqq}{b^4} \infty \frac{oozz + 4mpzz}{aa}$, & $qq \infty \frac{aaoomm + 4aam^3p}{ppzz}$. Adeoque si in termino $\frac{aaccqq}{b^4}$ pro qq hic numerus substituatur, habebitur $\frac{a^4ccoomm + 4a^4ccm^3p}{b^4ppzz} \infty \frac{oozz + 4mpzz}{aa}$. Hoc est, multiplicato per crucem, erit $a^6ccoomm + 4a^6ccm^3p \infty b^4oppz^4 + 4b^4mp^3z^4$: & fit, si utrinque per $oppz^4 + 4mp^3z^4$ dividatur, $\frac{a^6ccoomm + 4a^6ccm^3p}{ooppz^4 + 4mp^3z^4}$ seu $\frac{a^6ccmm}{ppz^4} \infty b^4$. Unde, extrahendo utrobique radicem biquadratam, invenitur $\sqrt{\frac{a^3cm}{pzz}} \infty b$. Hinc assumptis ad libitum duabus lineis A M & M C, iisque in directum seu in unam lineam positis, quarum major A M sit ∞a, & minor M C ∞c, duco ex M in angulo quocunque rectam M B $\infty \sqrt{\frac{a^3cm}{pzz}}$, jungoque B A & B C; ita ut habeatur triangulum per axem A B C, cujus basis A C diametrum circuli referat, qui Coni basis existit, & punctum B verticem ipsius Coni. Deinde productâ B C, ad Hyperbolam obtinendam, inter angulum A B D pro utrâque figurâ aptanda erit recta E D $\infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$; ita ut ipsa parallela sit lineæ B M, (quod facile est,) continuataque occurrat rectæ A M in R. Quibus sic positis, si per R in plano basis hujus Coni ipsi A M ad rectos angulos ducatur G H, atque per rectas G H, R E sectio instituatur, faciens in superficie conica curvam lineam F E: erit hæc ipsa Hyperbola vel Ellipsis quæsita, hoc est, cujus rectum latus est $\infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & transver-

sum

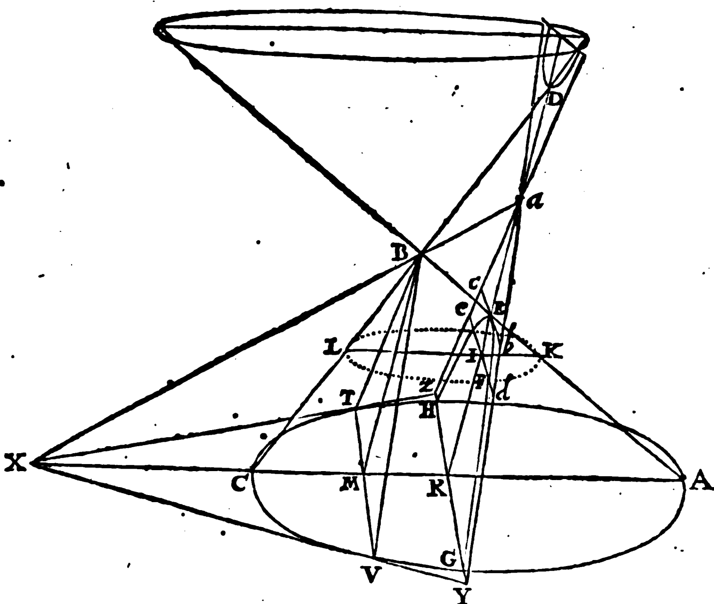
ſum $\infty \sqrt{-\frac{aaoomm}{ppqq} + \frac{4aam^3}{pqq}}$. Quòd ſi verò inſuper tales exhibendæ ſint, ut rectæ F I, quæ ſemper ipſi G H parallelæ intelliguntur, in dato angulo ad diametrum E R adplicentur, oportet tantùm (ut ante in Parabola) angulum G R E ſive E R H dato æqualem efficere, intelligendo ad id planum baſis hujus Coni eſſe mobile circa A M, tanquam axem: eruntque ſic conditiones quæſtionis omnes adimpletæ, ita ut his primo, ſecundo, & tertio Problematîs primi libri Conicorum Apollonii ſatisfactum putem. Quorum quidem omnium veritas ex præcedentibus ſit manifeſta.

Eodem modo reliquos caſus Ellipſeos & Hyperbolæ, in quibus latera recta & tranſverſa alias quantitates ab his diverſas ſortiuntur, qualeſque eas in antecedentibus determinare docuimus, perſequi licet.

Denique ut appareat, quâ ratione Propoſitiones de Hyperbolæ Aſymptotis agentes, de quibus Apollonius ſecundo atque ſequentibus Conicorum libris multas egregias proprietates demonſtravit, inventæ fuerint, ſequentia protuliſſe juvabit.

Sit

Sit $AM \propto a$
$MB \propto b$
$MC \propto c$
$DE \propto q$
$EI \propto x$
$FI \propto y$
$ER \propto z$, eritque $DR \propto q+z$
$GR \propto v$
$aE \propto s$
$XM \propto t$, eritque $XC \propto t-c$.



Mult. XA. $t+a$
per XC. $t-c$

$-tc-ac$
$tt+ta$

Ad □XM. tt
add. ▭CMA seu □MV. ac

——— ▭CXA.

per 47. 1mi Elem. □XV. $tt+ac \propto tt+ta-tc-ac$. *per 36. 3tii Elem.*

$2ac \propto ta-tc$

XM. $\frac{2ac}{a-c} \propto t$

Fiat

Fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ BMA & ERA
ut BM ad MA, ita ER ad RA
b — a — z, $\frac{az}{b}$

Rursus fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$
BMC & DRC
ut BM ad MC, ita DR ad RC
b — c — $q+z$, $\frac{cq+cz}{b}$

add.

CA. $\frac{az+cz+cq}{b} \infty a+c$

$$az+cz+cq \infty ab+cb$$
$$az+cz \infty ab+cb-cq$$
$$z \infty \frac{ab+cb-cq}{a+c}.$$

Ad RC. $\frac{cq+cz}{b}$
adde XC. $t-c$

Fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ XMB & XRa.

XM — MB — XR — Ra
t — b — $\frac{cq+cz+bt-bc}{b}$, ad $s+z$

Eritque, per 16. 6^{ti} Elem.

$$ts+tz \infty cq+cz+bt-bc$$
$$ts+tz-bt \infty cq+cz-bc$$
$$t \infty \frac{cq+cz-bc}{s+z-b} \infty \frac{2ac}{a-c}$$
$$aq+az-ab-cq-cz+cb \infty 2as+2az-2ab$$
$$ab+cb+aq-cq-2as \infty az+cz$$
$$\frac{ab+cb-cq}{a+c} \infty \frac{ab+cb+aq-cq-2as}{a+c} \infty z$$
$$ab+cb-cq \infty ab+cb+aq-cq-2as$$
$$2as \infty aq$$

fit aE $\infty s \infty \frac{1}{2}q$. Id quod ostendit, rectas, quæ oppositarum sectionum Asymptoti dicuntur, in medio transversi lateris DE se invicem decussare. Ubi etiam patet, angulos, quos comprehendunt, angulo verticis trianguli TBV, cui planum harum sectionum æquidistat, esse æquales.

Fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ BMV & aRY

$$\square BM\ \square MV \quad bb - ac \left\{ \begin{array}{l} \square aE \\ \tfrac{1}{4}qq \\ \square aI \\ \tfrac{1}{4}qq + qx + xx \\ \square aR \\ \tfrac{1}{4}qq + qz + zz \end{array} \right\} \text{ad} \left\{ \begin{array}{l} \square Eb \\ \tfrac{1}{4}\frac{acqq}{bb}. \\ \square Id \\ \tfrac{1}{4}\frac{acqq + acqx + acxx}{bb} \\ \square RY \\ \tfrac{1}{4}\frac{acqq + acqz + aczz}{bb} \end{array} \right.$$

A quo subducto $\square^{to}$ IF, ante invento, ∞ $\frac{acqx + acxx}{bb}$, relinquetur, per 5. 2^{di} Elem., $\Box$ eFd ∞ $\tfrac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$.

A quo subducto $\square^{to}$ RG, ante invento, ∞ $\frac{acqz + aczz}{bb}$, relinquetur, per 5. 2^{di} Elem., $\Box$ ZGY ∞ $\tfrac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$.

Jam cùm $\square$ E b, $\Box$ eFd, & $\Box$ ZGY singula sint inventa ∞ $\tfrac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$, constat ipsa inter se esse æqualia. Eadem est ratio de quibuscunque aliis hujusmodi rectangulis, in infinitum assumptis, Quod ipsum est, quod docet Prop^{tio} 10. 2^{di} libri Conicorum Apollonii.

Porrò, quoniam $\tfrac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$ est $\tfrac{1}{4}^{ta}$ pars rectanguli sub latere transverso DE ∞ q & latere recto NE, ante invento, ∞ $\frac{acq}{bb}$, manifesta hinc etiam est Prop^{tio} 1ma ejusdem libri.

Præ-

Præterea supponatur eE vel $Eb \infty e$

$eF \infty f$, eritque

$Fd \infty \frac{ee}{f}$

$gE \infty g$

$EF \infty h$

$Fh \infty i$, eritque

$Eh \infty h+i$

$Ei \infty k$

$ai \infty l$

$Fk \infty m$

& $ak \infty n$, eritque

$ik \infty n - l$

Tum fiat propter similitudinem Δ^{lorum} cgE & egF;

ut gE ad Ec, ita gF ad Fe

g — e — $g+h$ / f

Eritque per 15. 6ti Elem. $gf \infty eg + eh$

$gf - ge \infty eh$

Rursus fiat propter similitudinem Δ^{lorum} Fdh & Ebh

ut Fh ad Fd, ita Eh ad Eb

i — $\frac{ee}{f}$ — $h+i$ / e

Eritque per 16. 6ti Elem. $i \infty \frac{eh+ei}{f}$

$fi \infty eh + ei$

Et fit $gf - ge \infty fi - ei \infty eh$

Id est, dividendo utrinque per $f - e$, erit $g \infty i$. Hoc est, gE est æqualis Fh. Eadem est ratio de recta EF, quomodocunque per duo quælibet alia puncta in Hyperbolâ ducta, & utrinque Asymptotis terminata. Id quod cum octava convenit Propositione secundi libri Conicorum Apollonii.

Ad hæc fiat propter parallelas Ei & Fk

ut gE ad EF, ita ai ad ik

g — h — l / $n - l$

Eritque per 16. 6ti Elem. $gn - gl \infty hl$

Hoc est, in locum g substituto i, habebitur $in - il \infty hl$, & fit $h \infty \frac{in - il}{l}$.

 Deni-

Denique fiat propter similitudinem Δ^{lorum} Eib & Fkb

ut Ei ad Eb, ita Fk ad Fb

$k - h + i - m \quad l \quad i$

Eritq; per 16. 6[ti] Elem. $ki \propto hm + im$

vel $ki - mi \propto hm$

& fit $h \propto \frac{ki - mi}{m} \propto \frac{in - il}{l}$

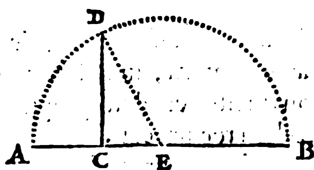
$kl - ml \propto mn - ml$

& $kl \propto mn$. Hoc est, rectangulum sub Ei & ia est æquale rectangulo sub Fk & ka. Id quod eodem modo de omnibus aliis rectangulis, sub similibus lineis comprehensis, manifestum est; prout nimirum ad hoc præter puncta E & F alia quævis in Hyperbola assumpta fuerint. Quibus haud dissimilia sunt ea, quæ Apollonius demonstravit Prop[ne] 12[ma] libri 2[di] Conicorum.

Unde demum facile est inferre, cum puncta hæc ulteriùs atque ulteriùs semper in Hyperbola assumi possint, ac inde uno latere horum rectangulorum continuè accrescente latus alterum ipsorum perpetuò decrescat; quòd idcirco Asymptoti ab, ac, & Hyperbola EF in infinitum productæ ad se ipsas propiùs accedant, & ad intervallum perveniant, minus quolibet dato intervallo. Quibus & illa quadrant, quæ ab Apollonio Prop[bus] 1[ma] & 14[ta] ejusdem libri sunt ostensa.

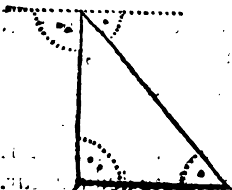
Cæterùm quoniam D[nus] des Cartes universim iis tantùm propositionibus usus fuisse videtur, quæ non nisi proprietates declarant, quæ cum subjecto suo omnimodè reciprocantur, & à Logicis proprietates 4[ti] modi appellari solent: visum fuit hoc loco deinceps modum, quo cognosci possunt, qualem eum eruditissimus atque ingeniosissimus Vir-Juvenis D. Johannes Huddenius, Amstelodamensis, Gerh. fil. excogitavit, per unum aut alterum exemplum exponere.

Ut



Ut ad inquirendum, utrum proprietas circuli, quæ declarat, quadrata ordinatim adplicatarum ad diametrum esse æqualia rectangulis sub segmentis diametri, cum circulo sit reciproca nec ne: supponatur recta A B, & in eam perpendicularis C D, hanc habens proprietatem, ut quadratum super ipsâ sit æquale rectangulo sub segmentis A C, C B. Quæritur qualis sit linea A D B.

Ad quod investigandum, sectâ A B bifariam in E, ponatur A E vel E B $\infty\, a$, C E $\infty\, x$, & C D $\infty\, y$: eritque A C $\infty\, a - x$, & C B $\infty\, a + x$. Jam cum A C multiplicatâ per C B proveniat $aa - xx$, pro rectangulo A C B; hocque ex data proprietate æquetur quadrato ex C D: erit $aa - xx \infty\, yy$. Deinde, quoniam, lineâ C D perpendiculari existente super A B; quadratum ex E D, per 47 Primi Elementorum Euclidis, est æquale duobus quadratis ex E C & C D: erit quadratum ex E D $\infty\, xx + yy$. Ac proinde si in hac summa pro yy subrogetur $aa - xx$, habebitur quadratum ex E D $\infty\, aa$; hoc est, E D $\infty\, a$. Id quod ostendit, rectis A E, E D, & E B singulis ipsi a æqualibus existentibus, lineam A D B esse circulum, cujus centrum E, ac idcirco proprietatem allegatam cum circulo esse reciprocam. Quod ipsum & hoc modo cognosci potest. Advertendo scilicet, utrum proprietas proposita sine necessariâ subjecti inclusione demonstrari possit nec ne. Si enim ea absque necessaria subjecti inclusione demonstrari nequeat, proprietas erit reciproca; sin secus, proprietas communis.



Ut ad intelligendum, num proprietas hæc cum triangulo rectangulo sit reciproca, nimirum: tres angulos simul sumptos æquales esse duobus rectis: advertendum tantummodo est, utrum demonstratio illius triangulum rectangulum præsupponat nec ne; ac proinde cum ipsa absque ulla discretione in quolibet triangulo locum obtineat, concludendum

 est

est eandem non nisi pro communi trianguli rectanguli proprietate esse habendam.

Ita etiam considerando demonstrationem supradictæ proprietatis circuli, quoniam ipsa radiorum æqualitatem, in quâ circuli natura consistit, omnino exposcit, convincitur eandem proprietatem soli circulo competere ac cum eodem reciprocari.

Similiter, si quis naturam demonstrationis perpendat, quâ ostenditur, quadrata ordinatim adplicatarum inter se esse, sicut rectangula sub segmentis diametri: comperietur, eandem demonstrationem radiorum æqualitatem non includere, adeoque proprietatem hanc non nisi communem proprietatem circuli existere: quandoquidem & Ellipsi, cujus Circulus non nisi speciem refert, omnino convenit.

Sed & usum horum perpendere, cum in universa Mathesi haud exigui sit momenti, non inutile fuerit sequentia, quibus eundem quadantenus indicasse existimamus, in medium afferre.

Primò itaque, postquam in quærenda æquatione proprietas reciproca adhibita fuit, certi sumus totam subjecti naturam hâc ratione in ea esse inclusam; adeoque, ad aliam adhuc æquationem à præcedenti diversam obtinendam, non licere ut ad id alia ejusdem subjecti proprietas adhibeatur, nisi accedat aliquid, quod in præcedenti æquatione nondum sit involutum; quandoquidem sic circulum committi manifestum est.

2.do, Theoremata omnia, quæ necessitatem subjecti inferunt ex proprietate jam ostensâ, (ut, verbi gratiâ, Prop. 48 primi libri Elementorum) quæque ut plurimùm indirectè per deductionem ad absurdum demonstrari solent, possunt directè demonstrari, dummodo ostendatur, proprietatem illam cum subjecto suo esse reciprocam.

3.tio, Si quis ad solvenda Problemata naturam subjecti retinere velit, commodissimè id præstare poterit, retinendo tantùm proprietatem aliquam, cum eodem subjecto reciprocam, quæ aut omnium facillimè memoriæ mandari queat aut etiam simplicissima existat: cum minimè necessum sit, ut is retinendis omnibus illius Theorematîs aggravetur, quippe quæ omnia Geometriæ hujus Methodo certâ arte ex hujusmodi proprietate deducuntur.

4.to, Hinc etiam perspicuum est, quàm parùm necesse sit, libros, qui Theorematibus referti sint, conscribere, quæ aut usum nullum

sum habent, aut difficulter retineri possunt, aut etiam beneficio alicujus facilioris sive simplicioris proprietatis reciprocæ è natura subjecti sui nullo negotio eruuntur.

Nimirum si latus hocce rectum statuatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, *transversum erit* $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.] Qui termini hoc etiam pacto scribi possunt $\frac{z}{a}\sqrt{oo + 4mp}$, & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$, quemadmodum postea in demonstratione pag. 33 à Domino des Cartes sunt assumpti. Similiter, si habeatur, ut paulò superiùs, $\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, poterit ejus loco scribi $\frac{z}{a}\sqrt{oo - 4mp}$. Eodem modo cùm habetur $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$ (ut paulò post, pagin. 31) possumus ejus loco scribere $\frac{aam}{pzz}\sqrt{4mm - \frac{4oom}{p}}$, tollendo scilicet ex signo radicali quicquid est rationale. Haud secus fit, cùm pro $\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ scribitur $\frac{a}{b}\sqrt{3}$. Quæ scribendi ratio non ineptè quoque ad radicum commensurabilium species sive operationes adhiberi potest. Ut ad addendum $\sqrt{27}$ ad $\sqrt{75}$: quoniam $3\sqrt{3}$ idem est quod $\sqrt{27}$, & $5\sqrt{3}$ idem quod $\sqrt{75}$, hinc summa earum erit $8\sqrt{3}$, & differentia $2\sqrt{3}$, productum verò multiplicationis $15, 3$ seu 45; & quotiens ex divisione majoris per minorem $\frac{5}{3}$ seu $1\frac{2}{3}$. Sic ad multiplicandum $\frac{8}{27\sqrt{3}}$ per $3\sqrt{3}$, divido $27\sqrt{3}$ per $3\sqrt{3}$, seu, quod idem est, 27 per 3, & fit productum $\frac{8}{9}$. Similiter ad dividendum fractiones $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$ per $\sqrt{3}$, multiplico earum denominatores per $\sqrt{3}$, & fiunt quotientes $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, & $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, seu $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$, perinde enim est sive hoc sive illo modo scribantur. Idem de sequentibus formulis, quas hìc subjungere visum fuit, intellige. Ut si habeatur $\sqrt{ac}$, ejus loco scribere possumus $a\sqrt{\frac{c}{a}}$, vel $c\sqrt{\frac{a}{c}}$. Et si habeatur $\frac{ab}{\sqrt{ac}}$, scribi ejus loco potest $b\sqrt{\frac{a}{c}}$; adeò ut, si habeatur $\frac{acc + a^3}{2\sqrt{aa + cc}}$, ejus loco substitui possit $\frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$. Ita pro $b\sqrt{\frac{ac}{bb}}$ ponere licet $\sqrt{ac}$, nec non

Vide pag. 75. lin. penult. & ult.

Vide pag. 76. lin. 7.

Vide pag. 82. lin. 18

D

non pro $2\,b\sqrt{\frac{cbb}{a}}$ reponere $\frac{2bb}{a}\sqrt{ac}$. Similiter pro $d + \frac{bb - bd}{b+d}$ scribi potest $\frac{dd+bb}{b+d}$. Sic etiam loco $d + \frac{bb}{b+d}$ scribi potest $b + \frac{dd}{b+d}$: cum sub eodem denominatore reducti faciant $\frac{bb+bd+dd}{b+d}$. Et denique pro $\frac{c}{\sqrt{c}} - \frac{a}{\sqrt{a}}$ scribere possumus $\frac{c-a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ vel $\sqrt{c} - \sqrt{a}$. Et sic de aliis, ut passim in hisce commentariis est videre.

E *Sed si sectione Hyperbolâ existente &c.*] Notandum hìc, applicatam esse Hyperbolam ei linearum positioni, cui postea Circulum quadrare ab Authore ostenditur. Quod tam perspicuitatis quàm brevitatis studio factum; quandoquidem ea, cùm literæ A, B, C, D, &c. in iisdem omnium figurarum locis reperiuntur, quæ ibidem scripsit, sic faciliùs intelligi possunt, quàm si nunc in uno, nunc in alio essent quærendæ.

Etenim cùm requiritur, ut productum, quod oritur ex multiplicatione CB per CF, æquale sit ei, quod fit ex ductu CD in CH; oportet lineam illam curvam transire per quatuor intersectionum puncta datarum linearum: nimirum, per intersectionem A, linearum DA, AB (quoniam eo casu lineæ BC & CD nullæ sunt, ac proinde singulæ, in singulas ex reliquis ductæ, nihil producunt), & per intersectionem G linearum AB, GH, (quo casu lineæ CH & CB nullæ sunt): nec non per utramque reliquam, utpote ipsarum FE, GH (quo casu CF & CH nullæ sunt), & ipsarum DA, EF (quo casu CD & CF nullæ sunt), quæ in hac figura non sunt expressæ, sed in Circulo observatæ apparent. Unde, cum D^{nus} des Cartes, brevitati studens, referre voluerit casus omnes ad unum exemplum, figuræ nempe pag. 12. mirum videri non debet, quòd, postquam hujus exempli locum Circulum esse ostendit, nec in quæstione quicquam mutavit, eidem linearum positioni non Hyperbola sicut Circulus responderit. Nec etiam hinc ullus sequitur error, quandoquidem tota quæstio nondum determinata existit, sed pagin. 33 primò determinatur. Quippe fieri potest, ut, paucis in ea mutatis, eidem linearum positioni, cui Circulus competit, quadret Hyperbola; & quidem Hyperbola, quæ non transeat per ullas datarum linearum intersectio-

sectiones. Ut, exempli causâ, si rectangulum ex F C in C D debeat esse majus, quàm rectangulum ex C B in C H, datâ quâdam quantitate, vel aliud quid simile: sequitur eam sic applicari posse, ut, manentibus literis I, K, L, B, C, D, &c. suis locis, ea pauca, quæ de Hyperbola afferre voluit, faciliùs intelligantur, quàm si figura mutata fuisset.

Ejusdem brevitatis studio nulla etiam hìc mentio fit oppositarum Hyperbolarum, non quòd ab Authore ignorentur, utpote qui paulò post pag. 37. quatuor lineas Hyperbolæ affines, inter se oppositas, exhibuit: Sed quòd faciliora ferè semper in hac Geometria neglexerit. In difficilioribus certè, quæ tractanda suscepit, nihil omisit. Atque idcirco hìc maluit eam linearum positionem exhibere, cui conveniret Circulus, quàm cui competeret Ellipsis, aut Hyperbola, quia ejus inventio peculiarem habet difficultatem.

Quippe hæc loca nihil aliud sunt, quàm cùm in quæstione aliqua est inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipsa prorsus sit determinata.] Nimirum, ubi ad inveniendum illud punctum duas supponere oportet lineas incognitas, & materia tantùm pro una æquatione suppetit. Ut in hoc exemplo, ubi ad determinandum punctum C, duæ supponendæ sunt incognitæ lineæ A B & B C; quarum una ostendat, ad quod punctum lineæ A B duci debeat recta B C in dato angulo; & altera, ubinam illud ipsum in eadem recta sit sumendum. Ubi porrò, postquam conditiones omnes sunt adimpletæ, inventa est æquatio F

$$yy \propto \frac{\begin{matrix}-dekzz \\ +cfglz\end{matrix}\, y \begin{matrix}-dezzx \\ -cfgzx \\ +bcgzx\end{matrix}\, y \begin{matrix}+bcfglx \\ -bcfgxx\end{matrix}}{ez^3 - cgzz},$$

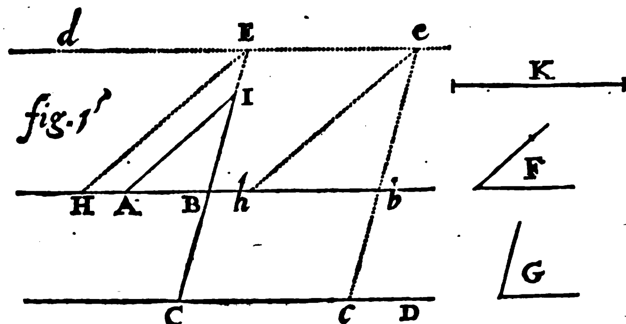
duas continens quantitates incognitas x & y. Adeò ut, cum in ipsâ una desit conditio ut sit prorsus determinata, quantitatem aliquam cognitam pro arbitrio assumere liceat pro incognita x, cui non respondet aliqua æquatio, atque tot inde invenire puncta C, quot ipsi radici x tribuerimus diversos valores.

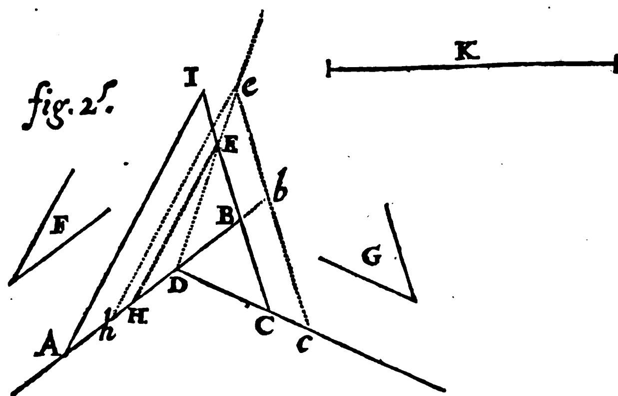
Cæterùm quoniam hæc quæstio extendi potest ad omnes lineas curvas, quæ sub calculum cadunt, atque in Geometriam recipi possunt: ita ut nulla sit linea curva primi generis, quæ ad illam non sit utilis, quando in quatuor lineis proponitur: nec ulla

secundi, quando in 8 lineis: nec ulla tertii, quando in 12 lineis est proposita, atque ita porrò: placuit hìc quoque subjungere casum, quando in duabus tantùm lineis est proposita, qui quidem omnium simplicissimus existit.

Locus ad duas lineas.

Datis positione duabus rectis lineis AB, CD, inter se parallelis, aut concurrentibus in puncto D; punctum extra ipsas invenire, ut E, à quo si in datis angulis F & G ad positione datas AB, CD, duæ ducantur rectæ lineæ EH, EC, ipsæ datam inter se habeant rationem *r* ad *s*.





Supponantur anguli BAI, DCB æquales angulis F, G; & con-

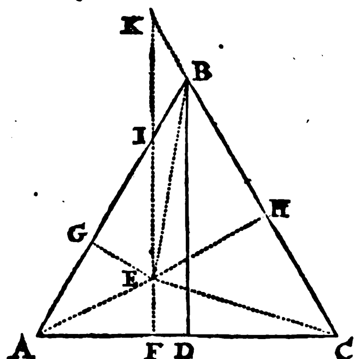
concurrant rectæ A I, C B, (ubicunque hosce æquales angulos ad positione datas constituentes) in punctum I. Deinde ratio, quam H E ad E C servare debet, detur ut A I ad K, vel si non ita detur, ad hanc formam reducatur.

Resolutio. Puta factum esse, quod quæritur, ponaturque B C ∞ q, A I ∞ r, K ∞ s, B I ∞ t, & B E ∞ x. Unde, cum propter triangulorum B I A, B E H similitudinem, B I sit ad I A, hoc est, t ad r, sicut B E seu x ad E H, erit E H ∞ $\frac{rx}{t}$. Deinde quoniam A I est ad K, hoc est, r ad s, sicut H E ad E C, sive $\frac{rx}{t}$ ad $q + x$: erit productum sub extremis $rq + rx$, æquale producto sub mediis $\frac{rsx}{t}$. Ac proinde si utrinque dividatur per r, atque multiplicetur per t, æquatio erit $sx - tx$ ∞ tq. Hoc est, revocatâ æqualitate ad proportionem, erit ut $s - t$ ad t, ita q ad x. Unde talis emergit *Constructio.* Fiat, ut excessus, quo K excedit B I, ad B I; ita B C ad B E. Tum per E ducatur E d ipsi A B seu C D parallela (ut in prima fig.); aut ex D per E agatur recta D E indefinitè (ut in secunda fig.): Dico si ex quolibet ejus puncto, ut e, ad positione datas A B, C D, duæ ducantur rectæ lineæ eh, ec in datis angulis F & G, hoc est, ipsis A I, I C parallelæ, dictas lineas datam inter se rationem servaturas, hoc est, he fore ad ec, sicut A I ad K, seu r ad s.

Demonstratio. Quoniam enim est, ut excessus, quo K excedit B I, ad B I, ita B C ad B E: erit quoque componendo K ad B I, sicut C E ad E B. Unde cum ratio C E ad E B composita sit ex ratione C E ad E H, & ex ratione H E ad E B seu A I ad I B: erit quoque ratio K ad B I ex eisdem rationibus composita. Eodem modo, quoniam item ratio K ad B I componitur ex ratione K ad A I, & ex ratione A I ad I B: erit ratio composita ex ratione C E ad E H, & ex ratione A I ad I B, eadem cum ratione, quæ componitur ex K ad A I, & ex A I ad I B. Quare si communis auferatur ratio A I ad I B, erit quoque reliqua ratio C E ad E H eadem reliquæ rationi K ad A I, seu s ad r. Quod erat faciendum. Eadem est ratio ubicunque tandem in recta d E punctum e assumatur. Unde manifestum fit, punctum quæsitum e rectam lineam contingere D E, positione datam, ac proinde in loco plano esse. Omitto reliquos hujus quæstionis casus, cum à quovis ad horum imitationem facilè construi possint.

G *At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud reperitur, superficies est, quæ similiter aut plana, aut Sphærica, aut magis composita esse potest.*] Quæ verba, ut rectè intelligantur, exemplis sequentibus illustrare conabimur.

Locus ad Superficiem. Dato triangulo æquilatero ABC, à cujus vertice B ad basin AC demissa sit perpendicularis BD: oporteat intra ipsum invenire punctum, ut E, à quo si ad opposita latera deducantur perpendiculares EF, EG, & EH, ipsæ simul sumptæ æquentur perpendiculari BD.



Factum jam sit, & productâ FE, usque dum secet latus AB in I, BC verò productum in K; ponatur AD seu DC ∞ a, DB ∞ b, AF ∞ x, & FE ∞ y. Hinc cum similia sint triangula ADB, & AFI, erit sicut AD ad DB, hoc est, a ad b, ita AF seu x ad FI; quæ ideo erit $\frac{bx}{a}$. E qua si auferatur FE ∞ y, relinquetur EI ∞ $\frac{bx}{a} - y$. Similiter, quoniam similia sunt triangula CDB & CFK, erit CD ad DB, hoc est, a ad b, ut CF seu $2a - x$ ad FK; quæ ideo erit $2b - \frac{bx}{a}$. E qua si auferatur FE ∞ y, restabit EK ∞ $2b - \frac{bx}{a} - y$. Eodem modo cum, propter similitudinem triangulorum ADB, EGI, AB sit ad AD, hoc est, $2a$ ad a, seu 2 ad 1, sicut IE seu $\frac{bx}{a} - y$ ad EG; erit EG ∞ $\frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Non secus, cum similia sint triangula EKH & DBC, erit ut BC ad CD, hoc est, $2a$ ad a, seu 2 ad 1, ita EK seu $2b - \frac{bx}{a} - y$ ad EH; quæ ideo

erit

erit $b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Adeoque si addantur perpendiculares inventæ E F, E G, & E H, erit earum summa b, æqualis b, perpendiculo trianguli A B C.

Ubi patet, quòd, postquam incidimus in æquationem, in qua ab utraque parte reperitur eadem quantitas, quæstio proposita non sit Problema, sed Theorema; seu quòd conditio, ex qua hæc æquatio deducta fuit, in quæstionis datis sit comprehensa, neque unquam sine hac conditione esse possit: Atque adeò, duas in ea conditiones desiderari, ad dicti puncti determinationem; unam, ad æquationem pro x inveniendam, quâ innotescat, ad quod punctum lineæ A C duci debet perpendicularis E F; atque alteram, ad æquationem pro y inveniendam, quâ cognoscatur, ubinam illud ipsum in hac perpendiculari sit sumendum: quibus mediantibus quæstio penitus determinata reddatur. Quare, postquam conditiones in quæstione præstandæ exsecutæ sunt, & neutri linearum incognitarum A F, F E æquatio respondet, poterunt illæ ad arbitrium accipi, atque idcirco quæsitum punctum E ubique intra triangulum A B C assumi. Cujus demonstratio facilis est.

Vide ea, quæ habentur pag. 4.

Ducantur enim rectæ A E, E B, & E C, ut constituantur tria triangula A E C, A E B, & B E C.

Quoniam igitur horum triangulorum bases sunt æquales, ac quælibet ex ipsis æqualis basi trianguli A B C; habebunt ipsa ad triangulum A B C eandem rationem, quam perpendicula F E, E G, & E H. Quare cum triangula A E C, A E B, & B E C simul sumpta ipsi triangulo A B C sint æqualia: erunt quoque perpendiculares E F, E G, & E H simul sumptæ ipsi perpendiculari B D æquales. Quod erat demonstrandum.

Porrò notandum est, quòd, quemadmodum punctum E, intra triangulum A B C assumptum, exhibet semper eandem summam perpendicularium E F, E G, & E H, quæ ab eo ad trianguli latera deducuntur, & æqualem perpendiculari B D, ita contra, si sumatur extra triangulum A B C, atque ab eo ad singula ejus latera, si opùs est, producta perpendiculares demittantur, obtineatur semper eadem perpendicularium differentia, quæ rursus perpendiculari B D sit æqualis. Oportet autem perpendicularem, quæ ducitur in latus subtensum angulo, intra quem punctum sumptum

erit, auferre ex summa duarum reliquarum. Quæ simili ratione aliis quoque figuris rectilineis ordinatis competunt, cum eadem in omnibus sit demonstratio.

Alterum exemplum, quod hìc afferendum duxi, desumpsi ex inventis Nobilissimi & præclari Juvenis D. Christiani Hugenii, quibus sibi jam pridem apud Doctos tantam paravit laudem atque admirationem, ut non nisi magna quæque ab eo expectanda esse affirmare non veriti fuerint.

Dato Circulo A G B, dataque positione diametro A B: invenire extra ipsam punctum E, à quo si ad A B demittatur perpendicularis E D, & per idem punctum agatur recta quædam linea F G utrinque à circumferentiâ terminata, ut rectangulum F E G, sub segmentis ejus F E, E G comprehensum, unà cum quadrato perpendicularis demissæ E D, æquetur rectangulo A D B, sub segmentis diametri A D, D B.

Ductâ per E rectâ K I parallelâ ipsi A B, deducatur ex centro C in eam perpendicularis C H, jungaturque C I. Positâ igitur A C vel C B $\infty\, a$, C D $\infty\, x$, & D E $\infty\, y$: erit H I $\infty \sqrt{aa - yy}$, E I $\infty \sqrt{aa - yy} + x$, & E K $\infty \sqrt{aa - yy} - x$. Unde si multiplicavero E K $\infty \sqrt{aa - yy} - x$ per E I $\infty \sqrt{aa - yy} + x$, fiet rectan-

rectangulum KEI seu FEG $\infty aa - yy - xx$. Cui si addatur quadratum ex ED ∞yy, erit summa $aa - xx \infty aa - xx$, rectangulo ADB, utpote æqualis ei, quod fit ex $a - x$ in $a + x$. 35 *Tertii Elem.*

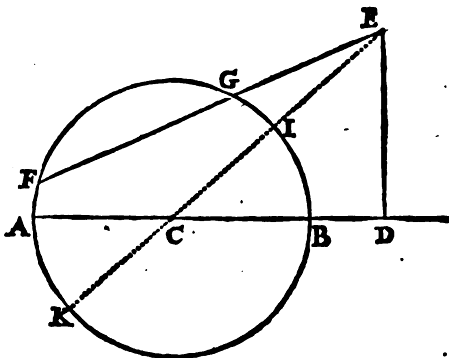
Quia igitur hìc utrinque eædem reperiuntur quantitates, & adimpletis omnibus conditionibus nulla ampliùs inveniri potest æquatio, quâ innotescat utraque incognita quantitas x & y: liquet eas ad arbitrium sumi posse, atque Problema propositum esse Theorema. Defectus itaque duarum in hac quæstione conditionum, ad determinandum punctum E, ostendit, illud ubique extra diametrum, intra circulum cadere posse, & locum ejus esse ad superficiem Circuli. Id quod facilè demonstari potest.

Quoniam enim CH perpendicularis est ad KI, secabit rectam KI bifariam in H. Unde cum in E quoque inæqualiter sit secta, erit rectangulum KEI, sub inæqualibus segmentis comprehensum, seu, quod idem est rectangulum FEG, unà cum quadrato segmenti intermedii EH, æquale quadrato dimidiæ lineæ HI. Eodem modo, quoniam recta AB bifariam divisa est in C, & non bifariam in D: erit rectangulum ADB unà cum quadrato intersegmenti DC, æquale quadrato ex CB seu CI. Quare cum quadratum CI æquetur quoque quadratis CH, HI, quorum quidem quadratum HI æquale est ostensum rectangulo FEG, unà cum quadrato EH: sequitur rectangulum ADB unà cum quadrato DC seu EH æquari rectangulo FEG unà cum duobus quadratis CH, EH. Ac proinde, dempto communi quadrato EH, remanebit rectangulum ADB æquale rectangulo FEG, unà cum quadrato CH seu ED. Quod erat demonstrandum. Non secus demonstrabitur, omne aliud punctum, intra Circulum extra diametrum AB assumptum, præstare id quod quæritur: Quocirca, Si in Circulo extra diametrum, sumatur aliquod punctum, à quo ad diametrum demittatur perpendicularis, & per idem punctum agatur recta linea à circumferentia utrinque terminata: erit rectangulum sub segmentis hujus rectæ comprehensum, unà cum quadrato perpendicularis demissæ, æquale rectangulo sub segmentis diametri. Idem ferè contingit si extra Circulum acceptum fuerit punctum. 3 *Tertii Elem.* 5 *Secundi Elem.* 35 *Tertii Elem.*

Etenim,

Etenim,

Aſſumpto extra Circulum puncto quolibet, ut E, ab eoque ad diametrum A B, ipſámve productam, ſi opùs eſt, deductâ perpendiculari E D, tum verò rectâ E F, Circulum utcunque in F & G ſecante: erit rectangulum A D B, unà cum quadrato rectæ D E, æquale rectangulo F E G. Quod ſimiliter ut ſupra experiri licet, atque demonſtrare.



Porrò ſicut in allatis exemplis loca quæſitorum punctorum fuerunt ad ſuperficies planas, eaſque terminatas, vel in infinitum extenſas; ita quoque inveniuntur loca punctorum, quæ ſunt ad ſuperficies curvas, & quidem vel terminatas, vel in infinitum extenſas.

Si enim, exempli cauſsâ, in figura pag. 123 manente rectâ A B, & in ea punctis A & B, circumvolvatur ſemicirculus F D E, donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat, deſcribetur ſuperficies Sphærica, in qua ſi quodlibet punctum accipiatur, ut D, ab eoque ad puncta A & B rectæ agantur D A, D B: habebunt ipſæ datam inter ſe rationem, hoc eſt, eandem, quam P H ad M N. Ita ut punctum D ſit ad ſuperficiem curvam terminatam, utpote ad ſuperficiem Sphæricam, converſione ſemicirculi F D E deſcriptam. Eâdem ratione, ſi à duobus datis punctis duæ inflectantur rectæ

rectæ lineæ in data differentia: punctum ad inflexionem erit ad superficiem Hyperbolicam, positione datam. Etenim si in plano quocunque, quod per data puncta transit, describatur Hyperbola, cujus foci hæc puncta existant, & axis transversus differentia data: & manentibus punctis Hyperbola circa axem circumvertatur, donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat; describetur superficies curva, quæ in infinitum extenditur, & Hyperbolica dicitur (quippe Hyperbolâ in infinitum extensâ), in qua si ad libitum sumatur punctum, à quo ad data puncta agantur duæ rectæ lineæ, servabunt illæ inter se differentiam datam.

Atque sic progrediendo curvæ superficies ostendi possunt, in infinitum magis magisque compositæ, quæ quæsitorum punctorum determinationi inserviunt. Verùm cum sufficiat nobis per exempla aliquot modum explicuisse, quo hæc loca per calculum detegantur, & à locis planis, solidis, aliisve magis compositis discernantur: ulteriori explicationi supersedebimus.

Cæterùm, ne quid, quod ad hanc materiam spectare possit, desideretur, sed Geometria omnibus numeris sit absoluta, paucis subjiciam, quomodo cognosci possit, quando locus alicujus puncti est ad solidum: cum id neque ab Antiquis, neque à Recentioribus (quod sciam) hactenus sit deprehensum.

Tribus igitur conditionibus deficientibus, ad puncti alicujus determinationem, locus, in quo illud reperitur, Solidum est: & vel planis constans superficiebus, vel Sphæricâ, vel aliâ magis compositâ, vel denique mixtis ex planis & curvis. Solida autem hæc vel sunt terminata, vel indefinitè extensa.

Ut, si intra Tetraëdrum, inveniendum sit punctum, ita ut summa perpendicularium, ab eo in quatuor ejus plana, quibus constat, demissarum, æquetur perpendiculo Tetraëdri: cadet illud quovis loco intra Tetraëdrum, ita ut nullum intra ipsum punctum assumi possit, quod quæsito non satisfaciat. Quod eodem modo indagatur & demonstratur, atque superiùs in triangulo æquilatero est ostensum. Nam, cum ad hujus puncti determinationem tres requirantur radices seu incognitæ quantitates (quarum una inservit determinandæ longitudini perpendicularis, *Locus ad Solidum.*

quæ à quæsito puncto cadit supra unum ex planis, & reliquæ duæ, ad locum hujus perpendicularis in eodem plano determinandum), & adimpletis conditionibus omnibus tandem in æquationem incidamus, ubi utrinque eædem occurrunt quantitates: indicio est, incognitas quantitates ad libitum sumi posse, atque Problema propositum esse Theorema. Nihil igitur refert quodcunque intra Tetraëdrum assumatur punctum, cum omnia quæsito satisfaciant.

Non dissimili ratione demonstrare possumus: Si extra Tetraëdrum sumatur punctum, à quo ad singula ejus plana demittantur perpendiculares, earum differentiam æquari perpendiculo Tetraëdri. Adeò ut, si quæstio fuerit de inveniendo puncto, à quo demissæ perpendiculares simul collectæ, æquentur Tetraëdri perpendiculo, punctum illud futurum sit in solido terminato, utpote ubique intra Tetraëdrum; si verò postuletur, ut differentia ipsarum eidem perpendiculo sit æqualis, reperietur punctum illud in solido indefinitè extenso, atque sumi poterit extra Tetraëdrum, ubicunque libuerit. Idem de aliis figuris ordinatis, planisque superficiebus contentis, dici & demonstrari posse, perspicuum est.

Alterum exemplum, quod hìc adducemus, ex Hugeniano Problemate deduci potest, quemadmodum præcedens Tetraëdri ex triangulo æquilatero deduximus, & est hujusmodi: Si Sphæra plano per centrum secetur, sumatur autem extra planum quodlibet punctum intra Sphæram, ab eoque ad planum demittatur perpendicularis, & per subjectum punctum in eodem plano utcunque ducatur recta linea, utrinque à Sphæræ superficie terminata: erit rectangulum, sub segmentis hujus rectæ comprehensum, æquale rectangulo sub segmentis rectæ, utcunque per assumptum punctum ad Sphæræ superficiem ductæ, unà cum demissæ perpendicularis quadrato. Idem fermè contingit si punctum sumatur extra Sphæram.

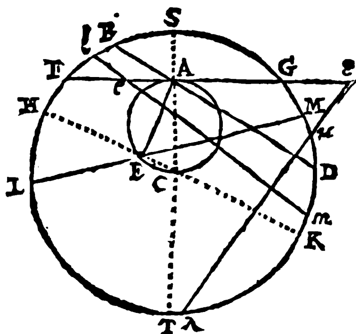
His adde sequens Problema, quod occasione istius Hugeniani sibi ante tres annos è vestigio inquirendum proposui. Vir Celeber-

berrimus atque undequaque Doctissimus D. Johannes Wallisius, S.T.D, & in Academia Oxoniensi Geometriæ Professor SAVILIANUS. Estque hujusmodi:

In circulo, cujus centrum C, assignato ubivis puncto A, per quod ducta recta peripheriæ occurrat in punctis B, D: inveniantur alia quotlibet puncta, ita ut, si per quodvis eorum ducatur recta peripheriæ occurrens in punctis L, M, quadratum distantiæ A E æquetur vel differentiæ vel summæ rectangulorum L E M, B A D.

Puta □ A E ∞ { ▭ L E M — ▭ B A D.
▭ B A D — ▭ L E M.
▭ B A D + ▭ L E M. }

Diametro A C describatur circellus, quem contingat recta infinita F A G. Dico, singula puncta in peripheria circelli præstare



primum quæsitum: quæ verò in recta F G intra circulum, secundum: quæ denique in eadem continuata extra circulum, tertium.

Nam $1^{\text{mò}}$, si sit E in peripheria circelli, (ductis diametris S A C T, H E C K,) erit * ▭ B A D ∞ ▭ S A T ∞ $□^{\text{to}}$ Radii (— □ A C ∞) — □ E C — □ A E *. Et ▭ L E M ∞ ▭ H E K ∞ $□^{\text{to}}$ Radii — □ E C. Ergo ▭ L E M — □ A E ∞ ▭ B A D, vel ▭ L E M — ▭ B A D ∞ □ A E.

* *per 35 Tertii Elem.*
* *per 5 Secundi Elem.*

$2^{\text{dò}}$. Si in recta F G intra circulum sumatur E vel *e*: erit ▭ B A D ∞ ▭ F A G ∞ □ F A ∞ ▭ F *e* G + □ A *e*. Et ▭ *lem* ∞ ▭ F *e* G. Ergo ▭ B A D — ▭ *lem* ∞ □ A *e*.

 $3^{\text{tiò}}$.

3tiò. Si in F G continuatâ sumatur e vel ε extra circulum, e-
* per 36 rit * ▭ λεμ ∞ ▭ FεG ∞ □ Aε (— □ FA ∞) — ▭ BAD *.
Tertii Elem. Ergo ▭ BAD + ▭ λεμ ∞ □ Aε. Quod erat faciendum. Idem,
* per 6 Secundi Elem. mutatis paucis, procederet pariter, etiamsi punctum A extra circulum assignaretur.

Quoniam igitur assumpto puncto A ceu dato, puncta invenienda E cadunt in locum planum, utpote in peripheriam circelli, aut in rectam F G intra circulum, aut denique in eandem extra circulum continuatam: patet, si in locum horum circulorum accipiantur duæ sphæræ, quòd similiter hæc puncta E ubique pro lubitu sumi possint in superficie convexa sphæræ A E C, aut in superficie plana circuli, cujus diameter F G, aut denique in eodem plano, extra hujus circumferentiam in infinitum extenso, prout scilicet, ut ante, dictorum rectangulorum vel differentia vel summa quadrato distantiæ horum sumendorum punctorum E à puncto A requiritur æqualis. Quòd si verò idem punctum A non unum locum obtineat, sed ubivis intra circulum S L T assignetur, quòd tunc quidem locus puncti E ubique in solido intra vel extra superficiem sphæræ S L T, pro diversa quæsiti ratione, sit futurus. Atque ita de aliis.

H *Iam verò ex hoc solo, quòd scitur relatio, quam omnia lineæ curvæ puncta habent ad puncta omnia lineæ rectæ, modo illo, quem supra explicavi; facile quoque est invenire relationem, quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque exinde cognoscere diametros, axes, centra, aliasque lineas, & puncta, ad quæ unaquæque curva linea relationem habebit specialiorem vel simpliciorem, quàm ad alia: atque ita imaginari diversos modos illas describendi, ex quibus faciliores eligi possunt.*] Ita, cum relatio, quam habent puncta lineæ C E, per motum regulæ G L & plani rectilinei C N K L descriptæ, (quam superiùs Hyperbolam esse ostendimus) ad puncta lineæ rectæ A B exprimatur per æquationem $yy \infty cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$; prout nimirum in ea assumitur punctum A, tanquam certum ac determinatum, à quo calculus incipiat: facile quoque est invenire relationem, quam habent ad puncta ejusdem A B, quando in ea, loco puncti A, assumitur aliud punctum nempe F, à quo calculus initium

tium sumat. Etenim si fiat, ut N L ad L K, hoc est, ut c ad b, ita D A seu $a+c$ ad A F, erit ipsa $\infty \frac{ab}{c}+b$. E qua si dematur A B ∞x, relinquetur B F $\infty \frac{ab}{c}+b-x$. Hinc si in æquatione inventa $yy \infty cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$ loco x substituamus $\frac{ab}{c}+b-x$: inveniemus æquationem $yy \infty \frac{cx}{b}y - ac$, quâ ostenditur relatio, quam habent puncta Hyperbolæ C E ad puncta rectæ B A, respectu puncti F. Quæ æquatio, cum præcedenti sit simplicior, arguit, Hyperbolæ puncta ad puncta rectæ B A specialiorem seu simpliciorem habere relationem, quando in A B punctum F pro certo & determinato assumitur, quàm cum in ea accipitur punctum A.

Cæterùm relationem, quam Hyperbolæ puncta servant ad omnia alia puncta & lineas datas, cognosces ex pag. 177. Ubi ex relatione, quam habent puncta alicujus curvæ ad puncta rectæ

 posi-

positione datæ, datus est modus inveniendi relationem eorundem punctorum ad puncta alterius cujusvis rectæ positione datæ. Adeoque tot inventis æquationibus diversis, ad quot diversas rectas curva illa fuerit relata, atque ex iis juxta æquationum regulas extractis radicibus: constabunt totidem modi eam describendi, ex quibus faciliores seligi poterunt.

1 *Immo verò, potest quoque ex hoc solo inveniri propemodum omne id, quod determinari potest, atque ad spacii, quod comprehendunt, magnitudinem spectat: ita ut non opus sit de his agere apertiùs.*] Sic ad comparandam Ellipsin cum Circulo, atque ad inveniendam relationem, quam inter se habent, prout circa eundem axem sunt descriptæ: Esto axis ∞ q, latus rectum pertinens ad axem ∞ r, segmentum axis inter verticem & utriusque ordinatam interceptum ∞ x, ipsa verò adplicata ∞ y. Hinc cum in Circulo latus transversum sive diameter æquale sit lateri recto, & æquatio exprimens relationem punctorum Circuli ad puncta diametri vel axis sit $yy \infty qx - xx$; at verò quæ relationem exprimit punctorum Ellipsis ad puncta axis sit $yy \infty rx - \frac{rxx}{q}$: quæ inter se sunt ut q ad r, hoc est, ut axis ad latus rectum pertinens ad eundem axem; quæ quidem ratio duplicata est rationis, quam habet hic axis ad axem secundum, sequitur Circulum ad Ellipsin esse, ut axis primus ad axem secundum. Id quod demonstratum est ab Archimede prop^ne 5^tâ libri de Conoïdibus & Sphæroïdibus, ut & à nobis cap. 2do tractatus de organica Conicarum Sectionum in plano descriptione.

Porrò extendi potest hoc ipsum ad cognoscendam quoque relationem, quam habet Sphæra ad Sphæroïdes, prout eundem habent axem.

Etenim, cum ostensum sit, quadrata ordinatim adplicatarum utriusque curvæ esse inter se, sicut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem; & quadrata illa ad se invicem sint ut Circuli, qui ab ipsis tanquam radiis conversione semicirculi & semi-ellipsis fiunt & utramque figuram describunt: patet Sphæram ad Sphæroïdes esse, ut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem: vel, ut quadratum ejusdem axis ad quadratum axis minoris. Quod & ab Archimede ostensum.

Adeò ut non modò ex hoc solo inveniri propemodum possit omne

omne id, quod determinari potest, atque ad magnitudinem spacii, quod hæ curvæ comprehendunt, spectat, quemadmodum Auctor innuit; sed etiam, quod spectat ad magnitudinem solidi, à superficie aliqua curva comprehensi, atque ab hujusmodi linea generati. Sic ut ex his omnibus constet, Authorem id præcipuè operam dedisse, ut, neglectis particularibus, & præsuppositis iis, quæ ab aliis vel inventa vel demonstrata essent, ea tantùm traderet, quæ difficilia, utilia, & maximè generalia essent, omniaque paucis comprehenderet; quæ verò faciliora & levioris momenti, non nisi obiter tantùm perstringeret. Quod sanè raro ab Auctoribus hodie observatum cernimus, cum plerique id studeant, ut eorum opera in amplissima volumina excrescant.

Cæterùm cum ex hac spacii aut solidi magnitudine deinceps facile sit invenire ejusdem centrum gravitatis, non abs re fuerit si hìc similiter modum, quo id investigari possit, uno atque altero exemplo exponam.

Igitur ad inveniendum, exempli caussâ, gravitatis centrum Parabolæ A B C ac ejus portionis A E F C, abscissæ videlicet per rectam E F ipsi A C parallelam: suppono centrum totius A B C esse H, Parabolæ autem E B F centrum esse I, & centrum portionis A E F C esse K. Deinde factâ $BD \infty a$, AD vel $DC \infty b$, EG vel $GF \infty c$, $BH \infty x$, & $HK \infty y$, jungo A B, B C, E B, & B F. Quibus positis, quæro rationem, quæ est inter triangulum A B C & triangulum E B F. Hinc cum ex natura Parabolæ quadratum ex A D seu bb sit ad quadratum ex E G seu cc, sicut D B seu a ad

G B:

GB: erit GB $\infty \frac{acc}{bb}$. Ac proinde cum AD multiplicata per DB producat ab, at EG multiplicata per GB producat $\frac{ac^3}{b.b}$, erit ratio trianguli ABC ad triangulum EBF quæ ab ad $\frac{ac^3}{bb}$ seu b^3 ad c^3. Hæc autem cum eadem sit rationi, quam inter se habent Parabolæ ABC & EBF (siquidem Parabola quælibet trianguli sibi inscripti maximi est sesquitertia): sequitur rationem portionis AEFC ad Parabolam EBF eandem fore quam $b^3 - c^3$ ad c^3. Porrò cum eadem sit situs ratio centri I in Parabola EBF, quæ centri H in Parabola ABC: erit DB seu a ad BH seu x, sicut GB seu $\frac{acc}{bb}$ ad BI $\frac{ccx}{bb}$. Quâ subductâ ex BH seu x, relinquitur IH $\infty \frac{bbx - ccx}{bb}$. Denique cum IH ad HK, hoc est, $\frac{bbx - ccx}{bb}$, ad y, eandem habere debeat rationem, quam portio AEFC ad Parabolam EBF seu $b^3 - c^3$ ad c^3, fiet, abbreviando primum & tertium terminum per $b - c$, ac deinde multiplicando extremos tum medios, $\frac{bc^3x + c^4x}{bb} \infty bby + bcy + ccy$, vel $\frac{bc^3x + c^4x}{b^4 + b^3c + bbcc} \infty y$. E quibus liquet, invento H, centro gravitatis Parabolæ ABC, ad inveniendum K, centrum gravitatis portionis AEFC, faciendum esse, ut BH seu x sit ad HK seu y, sicut $b^4 + b^3c + bbcc$ ad $bc^3 + c^4$; hoc est, inventis in ratione AD ad EG quinque continuè proportionalibus, erit BH ad HK, ut summa priorum trium ad summam duarum posteriorum. Ubi demum, ad obtinendum ipsum punctum H, opus tantùm est concipere rectas AD & EG esse æquales, hoc est, $b \infty c$, ita ut EGF coïncidat cum ADC, quo casu & punctum I in punctum H cadet, & K in D, lineaque DH seu y æqualis fiet $\frac{2}{3}x$, hoc est, duabus tertiis ipsius HB. Quod ipsum monstrat, sectâ diametro BD in 5 æquales partes, pro linea BH seu x tunc earundem sumendas esse tres. Id quod aliter quoque à nobis est ostensum in Exercitationibus nostris Mathematicis libr. 5. sectione 19.

Eodem modo si in Conoïde Parabolico ABC & ejusdem portione AEFC centra gravitatum H & K invenire velimus, oportet, iisdem quæ supra positis, quærere rationem, quæ est inter Conum ABC & Conum EBF: invenieturque ut b^4 ad c^4. Hæc enim

enim cum eadem quoque ſit rationi, quæ eſt inter duos Conoïdes A B C & E B F (quandoquidem per 23 Prop. de Conoïdibus & Sphæroïdibus Archimedis Conoïs quilibet Parabolicus ſeſquialter eſſe probatur Coni, qui eandem habet baſin eundemque axem cum Conoïde): patet portionem A E F C ad Conoïdem E B F fore, ut $b^4 - c^4$ ad c^4. E quibus porrò, ut ſupra, invenitur $y \infty \frac{c^4 x}{b^4 + bbcc}$, hoc eſt, invento H, centro gravitatis Conoïdis A B C, ad obtinendum K, centrum gravitatis portionis A E F C, faciendum eſſe ut B H ſit ad H K, ſicut $b^4 + bbcc$ ad c^4, ſeu, quod idem eſt, ad D B & G B quærendam eſſe tertiam proportionalem L, atque deinde faciendum ut B H ſit ad H K, ſicut ſumma ipſarum D B, G B ad tertiam L. Ubi tandem, ſi ad ipſum punctum H habendum ſtatuamus, ut ante, $b \infty c$, invenietur $y \infty \frac{1}{2} x$. Quod ipſum docet diametrum B D in 3 æquales partes eſſe dividendam, atque pro B H earundem ſumendas eſſe duas. Atque ita de aliis.

Sit C E linea curva, oporteatque per punctum C, &c.] K
Quæ hâc lineâ & ſequentibus uſque ad paginæ ſequentis lineam 25 continentur, in genere referri debent ad illa, quæ deinceps ab Authore afferuntur uſque ad pag. 44, quibus in ſpecie agit de natura quarundam curvarum, quas, poſtquam ad æquationes reduxit, deinde haſce æquationes cum alia comparat, nempe $yy - 2ey + ee \infty 0$ aut $zz - 2fz + ff \infty 0$, aliáve quæ ex hac vel illa ſit compoſita, ut inveniatur tandem quantitas incognita v.

Quemadmodum ſi C E eſt Ellipſis, in qua M A ſit ſegmentum diametri, ad quam C M ſit ordinatim adplicata, quodque L

pro

pro latere recto habeat r, pro transverso autem q: fiet per 13tium Theorema 1mi libri Conicorum Apollonii: $xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$. *unde tollendo xx, restabit* $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{ryy}{q}$, *vel* $yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ *æquale nihilo.*] Etenim AD latere existente recto $\propto r$, eoque ad AG perpendiculari: erit, propter triangulorum GAD, DHF similitudinem, ut GA ad AD, hoc est, q ad r, ita HF seu MA, hoc est, y, ad FD, quæ ideo est $\frac{ry}{q}$. Quam si per HF multiplicemus, fiet rectangulum HFD $\propto \frac{ryy}{q}$. Deinde quoniam per 13tiam Prop. 1mi libri Conicorum Apollonii rectangulum MAD, minus rectangulo HFD, æquatur quadrato ex CM; & quidem rectangulum MAD sit ry: erit rectangulum MF $\propto ry - \frac{ryy}{q}$. Atque idcirco æquatio talis: $ry - \frac{ryy}{q} \propto xx$; hoc est, $ry - \frac{ryy}{q} \propto ss - vv + 2vy - yy$: quippe quod similiter ipsi xx est æquale. Hæc autem æquatio ut ad superiorem reducatur, oportebit utrobique per q multiplicare, ut fractio evanescat: fietque $qry - ryy \propto qss - qvv + 2qvy - qyy$. Denique factâ transpositione, ut quantitates in yy ductæ unam teneant æquationis partem, reliquæ autem alteram, dividatur utrinque per $q - r$, habebiturque

$$yy \propto \frac{qss - qvv + 2qvy - qry}{q - r} \text{ sive } yy \frac{-qss + qvv - 2qvy + qry}{q - r} \propto 0.$$

Cætera, quæ huc spectant, inveniuntur inter lin. 21. pag. 45. & lin. 9. p. 46: quæ, cum satis sint clara, explicatione non egent.

M *Eodem modo, si CE sit curva linea, per motum Parabolæ descripta, &c.*] Cum enim, propter similitudinem triangulorum

rum GMC, CBL, GM sit ad MC, hoc est, $b - y$ ad x, ut CB, hoc est, y, ad BL; erit BL $\frac{xy}{b-y}$. Cui si addatur KL $\infty\ c$, fiet KB $\infty\ \frac{cb - cy + xy}{b - y}$. Jam verò, quia, per 11 Prop^nem libri 1^mi Conicorum Apollonii, in Parabola CK rectangulum sub diametri segmento KB & latere ejus recto d æquatur quadrato ipsius CB, quæ ad eandem diametrum ordinatim est applicata: hinc si multiplicetur $\frac{cb - cy + xy}{b - y}$ per d, erit æquatio talis: $yy\ \infty\ \frac{dcb - dcy + dxy}{b - y}$. Unde multiplicando utrinque per $b - y$, fiet $dcb - dcy + dxy\ \infty\ byy - y^3$. Factaque transpositione, ut dxy unam teneat æquationis partem, erit $dxy\ \infty\ dcy - dcb + byy - y^3$. In qua si pro x ponatur summa ipsi æqualis, habebitur $dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, seu $\sqrt{ddssyy - ddvvyy + 2ddvy^3 - ddy^4}\ \infty\ dcy - dcb + byy - y^3$. Ut autem æquatio ab asymmetria liberetur, quadretur utraque pars, fiatque transpositio ut quantitates omnes ab una parte habeantur, invenieturque

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} +bb \\ +dd \\ -2dc \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +ddcc \\ +ddvv \\ -2dcbb \\ -ddss \end{matrix}\right\} yy - 2ddccby + ddccbb\ \infty\ 0.$$

Reliqua huc spectantia invenientur à lin. 9. pag. 46. usque ad lineam ultimam paginæ sequentis, quæ explicatione non indigent.

Quoniam autem inventio harum linearum non solùm elegans ac subtilis, verùm etiam per se jucunda atque utilis existit: non ingratum futurum confido, quibus hæc exercere volupe est, si ostendero quò pacto in Hyperbola & Parabola nec non in Conchoïde sint inveniendæ.

 Sit

Inventio dictarum linearum in Hyperbola.

Sit latus transversum $AG \infty q$, rectum verò ∞r, CM vel $AB \infty x$, MA vel $BC \infty y$, $PA \infty v$, & $PC \infty s$. Deinde, propter similitudinem triangulorum GAD, DFH, fiat, ut GA ad AD, hoc est, q ad r, ita HF seu MA, hoc est, y, ad FD, quæ ideo erit $\frac{ry}{q}$. Hæc si multiplicetur per $HF \infty y$, prodibit rectangulum $HFD \infty \frac{ryy}{q}$. Cui porrò si addatur rectangulum DM, ∞ry, fiet rectangulum $MAF \infty \frac{ryy}{q} + ry$. Jam verò, quia, per 12^mam Prop^nem 1^mi libri Conicorum Apollonii, rectangulum MAF æquale est quadrato ex MC seu xx, erit æquatio $\frac{ryy}{q} + ry \infty xx$, vel $\frac{ryy}{q} + ry \infty ss - vv + 2vy - yy$, subrogando nempe $ss - vv + 2vy - yy$ in locum xx. Unde multiplicatâ utrâque parte per q, fiet $ryy + qry \infty qss - qvv + 2qvy - qyy$; transpositisque qyy & qry in contrarias partes, $qyy + ryy \infty -qry + 2qvy - qvv + qss$; ac denique utrâque parte divisâ per $q + r$,

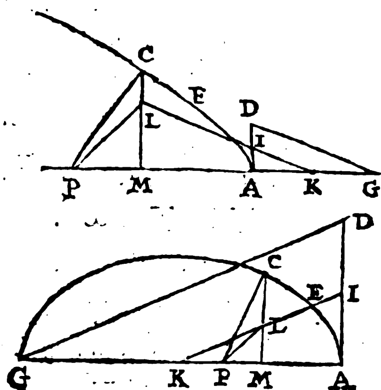
$$yy \infty \frac{-qry + 2qvy - qvv + qss}{q+r}, \text{ vel}$$

$$yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q+r} \infty 0,$$ collocando nimirum quantitates omnes ad unam partem.

Dein-

Deinde, ad inveniendam quantitatem quæsitam v, comparetur æquatio inventa cum æquatione ejusdem formæ $yy - {}^{2}ey + ee \infty 0$, ubi y æquatur e. Quare cum utriusque primus terminus planè sit idem, comparetur secundus cum secundo, nempe, $\frac{+qry - {}^{2}qvy}{q+r}$ cum $- {}^{2}ey$, vel, quod idem est, $\frac{+qr - {}^{2}qv}{q+r}$ cum $- {}^{2}e$: ac idcirco multiplicetur utrinque per $q+r$, & fiet $+qr - {}^{2}qv \infty - {}^{2}qe - {}^{2}re$. Postea translato ${}^{2}re$ ad alteram partem, dividatur utrinque per ${}^{2}q$, fietque $\frac{1}{2}r + e + \frac{re}{q} \infty v$, vel $v \infty y + \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$, quandoquidem e ipsi y supposita est æqualis.

E quibus patet, ad inveniendam rectam P C, latus rectum A D secandum esse bifariam in I, & rectam P M ipsi I F sumendam esse æqualem. Quod in Ellipsi quoque est observandum.



His adde sequentem constructionem, quam Vir insignis ac Geometra præstantissimus D. Auzotius utrique huic sectioni pariter convenientem invenit, ejusque me quinquennio abhinc per literas participem fieri voluit, & talis est.

Existente A D, ut ante, latere recto, & A G latere transverso, ad inveniendam P C, ductis C M, A D ordinatim ad A G, junctâque G D, agatur per centrum sectionis K eidem parallela K I, secans C M in L. Dein assumptâ P M æquali M L, jungatur P C, eritque secans quæsita.

Quod ita patet.

Est enim propter similitudinem triangulorum G A D, K M L, ut G A ad A D, hoc est, q ad r, ita K M, hoc est, $\frac{1}{2}q \; 8 \; y$ ad M L $\frac{1}{2}r \; 8 \; \frac{ry}{q}$. Unde cum A P inventa sit $\infty \; y \; 8 \; \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$, adeoque P M $\infty \frac{1}{2}r \; 8 \; \frac{ry}{q}$, liquet P M & M L esse æquales. Quemadmodum fuerunt assumptæ.

Ubi porrò animadvertere licet, si ex puncto P ceu dato recta P C sit ducenda, quæ utramque sectionem vel earum contingentes ad rectos angulos secet, sive ut circulus, qui ex P ejus intervallo describitur, utramque curvam tangat, opus tantùm esse ducere P L, ita ut angulus A P L sit semissis anguli A M C: si enim per L, ubi hæc recta ipsi K I L occurrit, ducatur M L C ordinatim ad A G, hoc est, ipsi A D parallela, erit juncta P C secans quæsita, sive circulus ex P intervallo P C descriptus utramque curvam in C continget. ut requirebatur.

In Parabola. Sit latus rectum A D $\propto r$, C M vel A B $\propto x$, M A vel B C $\propto y$, P A $\propto v$, & P C $\propto s$. Quoniam igitur per 11^mam Prop^nem 1^mi libri Conicorum Apollonii rectangulum sub segmento diametri M A & latere recto A D æquatur quadrato ordinatim applicatæ C M: erit $ry \propto xx$, vel $ry \propto ss - vv + 2vy - yy$, substituendo nempe $ss - vv + 2vy - yy$ in locum xx. Deinde quantitatibus omnibus ab una parte in alteram translatis, ut yy sit adfecta signo $+$, habebitur æquatio

$$yy \begin{matrix}+r\\-2v\end{matrix}\, y \begin{matrix}+vv\\-ss\end{matrix} \propto 0.$$

Quam si porrò compares cum æquatione $yy - 2ey + ee \propto 0$, ubi y & e sunt æquales, conferendo nempe singulos terminos unius cum singulis alterius: nimirum, secundum $+r - 2v$ cum secundo $-2e$, invenietur $v \propto e + \frac{1}{2}r$, vel $v \propto y + \frac{1}{2}r$. E quibus manifestum fit, ad ducendam rectam P C, opus tantùm esse, dividere latus rectum A D bifariam in puncto I, atque deinde assumere P M ipsi A I seu I D æqualem.

Quòd si verò ipsa tangens C T sit investiganda, poterimus, ut ante, supponendo latus rectum $\propto r$, C M $\propto x$, & M A $\propto y$, quærere A T $\propto v$, & A S $\propto f$, hoc pacto:

Fiat

Fiat propter similitudinem triangulorum A S T & M C T, ut A T ad A S, hoc est, v ad s, sic M T, hoc est, $y + v$, ad M C. Quæ ideo erit $\frac{sy + sv}{v}$. Unde cum & M C sit $\infty\ x$, erit $\frac{sy + sv}{v} \infty\ x$. Hoc est, ductâ utrâque parte in se quadratè, habebitur $\frac{ssyy + 2ssvy + ssvv}{vv} \infty\ xx$. Quoniam autem, multiplicatâ M A per latus rectum, rectangulum ry, quod inde fit, similiter ipsi xx, hoc est, quadrato ex M C est æquale: erit pariter $\frac{ssyy + 2ssvy + ssvv}{vv} \infty\ ry$. Unde ordinatâ æquatione, terminisque omnibus ad unam partem transpositis, fit $yy \begin{matrix} +2v \\ -\frac{vvr}{ss} \end{matrix} y + vv \infty\ 0$. Quam si porrò compares cum æquatione $yy - 2ey + ee \infty\ 0$, conferendo singulos terminos unius cum singulis alterius, tertium videlicet cum tertio, obtinebitur $vv \infty\ ee$, hoc est, $v \infty\ e$. Ac proinde si in locum e substituatur y: fiet $v \infty\ y$. Id quod ostendit, ad ducendam rectam C T ad datum punctum C, opùs tantummodo esse assumere A T æqualem A M, atque connectere puncta C & T.

Quòd si autem quæratur A S, poterimus secundum terminum cum secundo comparare, subrogando y in locum v, ut & y in locum e: invenieturque $s \infty\ \frac{1}{2}\sqrt{ry}$.

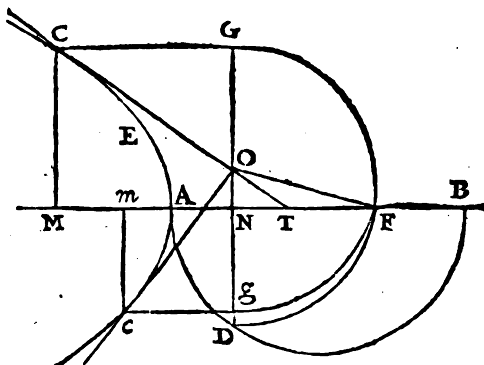
Eodem modo procedendo in binis reliquis sectionibus, invenietur in Ellipsi $v \infty\ \frac{qy}{q - 2y}$ & $s \infty\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qry}{q - y}}$; at in Hyperbola $v \infty\ \frac{qy}{q + 2y}$, & $s \infty\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qry}{q + y}}$.

Porrò ut appareat, quo pacto è puncto T, in axe vel diametro dato, recta T C sit ducenda: oportet duntaxat, assumptâ quantitate v ceu datâ, quærere y, reliquis manentibus invariatis. Ac proinde, cum in Parabola v & y æquentur, opùs tantùm erit accipere M A æqualem A T, &, ductâ M C ordinatim adplicatâ ad M A, jungere deinde puncta C & T, ut habeatur tangens quæsita.

Quoniam vero in Ellipsi v æquatur $\frac{qy}{q - 2y}$, multiplicando utrinque per $q - 2y$, fiet $qv - 2vy \infty\ qy$, seu $qy + 2vy \infty\ qv$. Adeoque si dividatur utrobique per $q + 2v$, invenietur M A $\infty\ y \infty\ \frac{qv}{q + 2v}$.

Pari

pari ratione si quæratur M A in Hyperbola erit ipsa $\infty \frac{qv}{q - 2v}$. Ubi liquet, ad ducendam ex puncto T rectam T C, quæ tangat Hyperbolam A E C, quantitatem v sive lineam A T minorem semper debere dari quàm $\frac{1}{2}q$, hoc est, minorem semisse lateris transversi, cum aliàs propter Asymptotos Problema hoc impossibile sit futurum. Quæ determinatio, cum in Parabola & Ellipsi nullum locum habeat, ostendit, quòd in duabus hisce sectionibus ejusmodi Asymptotæ non sint suspiciendæ; sed in iis ex omni puncto, ubi libet in producta M A assumptò, rectas duci posse, quæ easdem sectiones contingant.



Ad hæc, si ex puncto O, extra axem vel diametrum dato, rectam lineam ducere velimus, ut O C, quæ Parabolam C E contingat: ponatur, ut supra, latus rectum $\infty\, r$, M A $\infty\, y$, M C $\infty\, x$, A N $\infty\, a$, & N O $\infty\, b$, eritque ex jam inventis M T $\infty\, 2y$ & N T $\infty\, y - a$.

Deinde cum propter similitudinem triangulorum M C T & N O T, M C ad M T, hoc est, x ad $2y$, sicut N O ad N T, hoc est, b ad $y - a$: erit $xy - ax$, productum sub extremis, æquale $2by$, producto sub mediis. Quoniam verò ex natura Parabolæ, ry, ut supra, æquatur xx, hoc est, dividendo utrinque per r, y est æqualis $\frac{xx}{r}$: hinc si in æquatione inventa $xy - ax \infty 2by$ in locum y substituamus $\frac{xx}{r}$, habebimus

mus $\frac{x^3}{r} - ax \propto \frac{2bxx}{r}$. Hoc eſt, dividendo ubique per x, & multiplicando per r, invenietur $xx - ar \propto 2bx$, ſeu $xx \propto 2bx + ar$. Quæ eſt æquatio primi caſus quadratarum pag. 6 & 7, admittens unam veram radicem, quæ eſt $b + \sqrt{bb + ar}$, & unam falſam, ſeu minorem quàm nihil, quæ eſt $b - \sqrt{bb + ar}$. Sicut ibidem annotavimus. Cujus utriuſque uſus porrò hìc eleganter elucet.

Nam ſi ad ducendam O C, aſſumptâ N B æquali r, hoc eſt, $\propto$ lateri recto Parabolæ, ſuper totâ A B deſcribatur ſemicirculus, ſecans O N productam in D: erit N D $\propto \sqrt{ar}$. Quâ poſitâ ab N ad F, ſi jungatur O F, erit ipſa $\propto \sqrt{bb + ar}$. Ac proinde ſi centro O intervallo O F circulus deſcribatur, ſecans N O hinc inde productam in punctis G, g, deſignabit N G verum valorem inventum $b + \sqrt{bb + ar}$, & Ng valorem falſum $b - \sqrt{bb + ar}$. Unde ducendo ex punctis G, g rectas G C, gc, ipſi A M parallelas, donec Parabolæ occurrant: obtinebuntur duo ſimul puncta C, c in quibus rectæ ex O ducendæ eandem contingent.

Simili modo in reliquis ſectionibus eſt procedendum.

Eſto C E prima Conchoïdes Veterum, cujus Polus G, norma verò vel regula, cujus ope ducta eſt, ſit A B; ita ut rectæ omnes, quæ tendunt versùs G, atque intra curvam C E & rectam A B continentur, (ut A E, L C) ſint æquales. Oporteat autem rectam lineam ducere (ut C P), quæ Conchoïdem hanc ad angulos rectos ſecet in dato puncto C.] Notandum hìc, quòd, ſi per præcedentem methodum quæratur punctum

N In Conchoïde.

ctum in recta A B, per quod quæsita linea C P transire debet, calculus occurrat nullo antecedentium brevior, licèt constructio sit valde brevis. *Oportet enim tantùm in recta C G sumere C D, æqualem C B, quæ perpendicularis est ad A B; & deinde ex puncto D rectam ducere D F, parallelam ipsi A G, atque æqualem G L: habebiturque hâc ratione punctum F, per quod quæsita linea C P erit ducenda.*] Quoniam autem in hoc exemplo calculus multò est brevior, si in recta A G quæratur punctum P, per quod linea quæsita C P transire debet, quàm si quæratur in recta A B, atque etiam constructio allata ex illo faciliùs potest ostendi: visum fuit breviorem hìc subjungere, atque constructionem ex eo patefacere.

Esto ergo G A $\infty\, b$, A E vel L C $\infty\, c$, C M vel A B $\infty\, x$, M A vel B C $\infty\, y$, A P $\infty\, v$, & P C $\infty\, s$; eritque tota P M $\infty\, v+y$. Cujus quadratum $vv+2vy+yy$ si subtrahatur à quadrato rectæ P C $\infty\, ss$, relinquetur quadratum rectæ C M $\infty\, ss-vv-2vy-yy$. Unde cum C M sit $\infty\, x$, & quadratum ejus $\infty\, xx$: erit $xx \infty ss-vv-2vy-yy$.

Eodem modo, si in triangulo rectangulo B C L à quadrato ex L C $\infty\, cc$ auferatur quadratum rectæ B C $\infty\, yy$, relinquetur quadratum rectæ B L $\infty\, cc-yy$: adeoque ipsa B L $\infty \sqrt{cc-yy}$; quâ ab A B $\infty\, x$ sublatâ, restabit A L $\infty\, x-\sqrt{cc-yy}$.

Jam verò, cum, propter similia triangula G M C & G A L, G M sit ad M C, hoc est, $b+y$ ad x, sicut G A ad A L, hoc est, b ad $x-\sqrt{cc-yy}$: erit rectangulum sub extremis æquale rectangulo sub mediis, nimirum

$bx+xy-\sqrt{bbcc+2bccy\begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix}yy-2by^3-y^4} \infty bx$. & deletis utrobique bx, ordinataque æquatione:

$xy \infty \sqrt{bbcc+2bccy\begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix}yy-2by^3-y^4}$. Deinde ut evanescat signum radicale, ducatur utraque pars in se quadratè, atque ad tollendum xx substituatur ejus loco $ss-vv-2vy-yy$, fietque æquatio $ssyy-vvyy-2vy^3-y^4 \infty bbcc+2bccy\begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix}yy-2by^3-y^4$. Ubi si utrinque auferatur y^4, & fiat transpositio ut quantitates in y^3 ductæ unam obtineant æquationis partem,

tem, reliquæ verò alteram, ac demum utraque pars dividatur per $2v - 2b$, orietur æquatio talis:

$$y^3 \infty \frac{\begin{array}{l}+bb\\-cc\\+ff\\-vv\end{array} yy - 2bccy - bbcc}{2v - 2b.}$$

Hoc est, translatis quantitatibus omnibus ad unam partem, erit:

$$y^3 \frac{\begin{array}{l}-bb\\+cc\\-ff\\+vv\end{array} yy + 2bccy + bbcc}{2v - 2b} \infty 0.$$

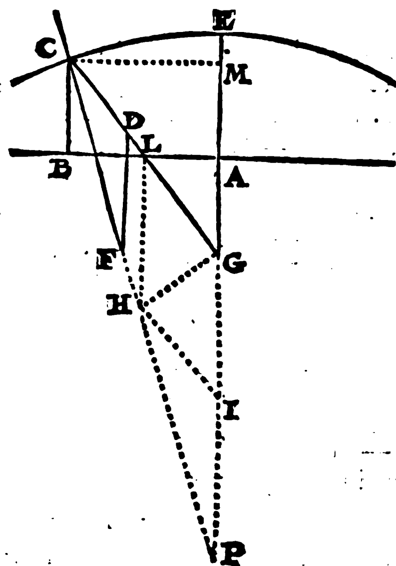
Quæ æquatio relationem ostendit, quam puncta Conchoïdis CE habent ad puncta lineæ rectæ BA. Quare, postquam in ipsa quantitas y est data, quandoquidem punctum C datum est, superest ut inveniamus quantitates v & f, determinantes punctum quæsitum P. Hunc in finem aliam æquationem instituo, quæ æquè multas habeat dimensiones, & in qua y duas valeat quantitates, quæ sibi invicem sint æquales. Ideoque supponendo $y \infty e$, sive $y - e \infty 0$: duco $y - e$ in se, & fit $yy - 2ey + ee \infty 0$. æquatio duas habens radices æquales. Hanc porrò multiplico per $y + f$, ut ascendat ad aliam trium dimensionum, ejusdemque formæ cum præcedente, & provenit æquatio $y^3 \begin{array}{l}+f\\-2e\end{array} yy \begin{array}{l}-2ef\\+ee\end{array} y + eef \infty 0$. Cujus terminos separatim confero cum terminis præcedentis

$$y^3 \frac{\begin{array}{l}-bb\\+cc\\-ff\\+vv\end{array} yy + 2bccy + bbcc}{2v - 2b} \infty 0.$$

Unde cum primus terminus in utraque æquatione sit idem, comparo secundum cum secundo, ac reliquos cum reliquis. Adeò ut, si statuamus $\frac{bbcc}{2v - 2b} \infty eef$, & utrinque dividamus per ee, oriatur $f \infty \frac{bbcc}{2vee - 2bee}$. Pari ratione, si $\frac{+2bccy}{2v - 2b} \infty \begin{array}{l}-2ef\\+ee\end{array} y$, seu $\frac{bcc}{v - b} \infty -2ef + ee$, in locum f subrogetur valor ejus inventus

$\frac{bbcc}{2vee - 2bee}$: habebitur $\frac{bcc}{v - b} \infty \frac{-bbcc}{2ve - 2be} + ee$, hoc est, sub eodem denominatore $\frac{-bcce}{ve - be} \infty \frac{+bbcc + be^3 - e^3 v}{ve - be}$. Et omisso denominatore, adhibitaque decenti transpositione, ut quantitas $e^3 v$ unam constituat æquationis partem, reliquæ verò alteram; dividatur utrinque per e^3, invenieturque $v \infty b + \frac{bcc}{ee} + \frac{bbcc}{e^3}$. Sive, substituendo y in locum quantitatis suppositæ e, $v \infty b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$.

Eodem modo si reliquus terminus cum reliquo comparetur, invenietur quantitas incognita s. Quia verò quantitas inventa v satis determinat punctum P, quod modò in recta AG quærebatur; & tantùm ab invento puncto P rectam lineam PC ducere oportet, ut quæstioni satisfiat: ulteriori operationi incumbere supervacaneum fuerit.



Ut verò ad demonstrationem supra dictæ constructionis accedamus, producatur inventa linea CF donec secet AG productam in P, atque per L agatur recta LH parallela AG, occurrens ipsi PC in H: unde ductâ HI ipsi CG parallelâ, quæ secet AP in I; Dico AP seu v æqualem esse inventæ quantitati $b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$.

Cum enim, propter similitudinem triangulorum BCL, AGL, BC sit ad CL, hoc est, y ad c, sicut AG, hoc est, b, ad GL: erit GL $\infty \frac{bc}{y}$. Deinde, quia, propter similia triangula CDF & CLH, CD ∞y est ad DF seu GL $\infty \frac{bc}{y}$, sicut CL ∞c ad LH: erit,

erit L H $\propto \frac{bcc}{yy}$. Denique, cum, ob similia triangula C D F, H I P, C D sit ad D F seu G L, hoc est, y ad $\frac{bc}{y}$, sicut H I seu G L, hoc est, $\frac{bc}{y}$, ad I P: erit I P $\propto \frac{bbcc}{y^3}$. Quare si ducatur recta G C, in eaque assumatur C D æqualis C B, ac deinde ex puncto D recta agatur D F æqualis G L, & parallela A G: manifestum est, rectam, quæ puncta F, C connectit, esse lineam quæsitam, quippe quæ Conchoïdem secat ad angulos rectos. Quandoquidem, si producatur ad P, G I sit $\propto \frac{bcc}{yy}$, I P $\propto \frac{bbcc}{y^3}$, atque adeò tota A P $\propto b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$. Quod erat faciendum.

Porrò, ut constructio adhuc brevior evadat, operæ pretium est considerare, rectam ab H ad G ductam ipsi G C esse perpendicularem. Id quod, ab acutissimo nostro Hugenio primùm observatum, deinde sic verum deprehendi:

Quoniam enim L H ipsi A G est parallela, erit angulus H L G æqualis angulo L G A. Deinde, quoniam G A $\propto b$ multiplicata per L H $\propto \frac{bcc}{yy}$ facit $\frac{bbcc}{yy}$, quadratum ipsius G L, quæ est $\frac{bc}{y}$: erit A G ad G L, sicut G L ad L H. Unde cùm in triangulis A G L, L G H latera circa æquales angulos ad G & L sint proportionalia, erunt itidem anguli G A L & L G H æquales. Est autem G A L rectus. Quare & L G H rectus erit.

Hinc talis emergit constructio:

Ductâ C G, secante A B in L, agatur ex L ipsi A G parallela L H, donec occurrat perpendiculari G H in H: eritque recta H C, quæ ex H per C ducitur, secans quæsita.

Non dissimili ratione invenire licet constructionem exempli pag. 47.

Verùm enimverò quoniam lineæ C P alio quoque modo investigari queunt, beneficio Methodi de Maximis & Minimis, cujus Author est Vir Clarissimus D. de Fermat, in Parlamento Tolosano Consiliarius, quam Herigonius in supplemento Cursus sui Mathematici exemplis aliquot illustravit, atque ibidem etiam ad inveniendas tangentes adhibere docuit: haud abs re fore duxi, si

hoc loco viam, quâ lineæ CP ope ejusdem Methodi sint inveniendæ, sequenti calculo exposuero.

Esto, ut supra, $GA \infty b$, AE vel $LC \infty c$, $AM \infty y$, & $PA \infty v$: eritque $GM \infty b+y$, & $PM \infty v+y$. Deinde quæro quadratum ex PC, supponendo illud esse minimum quadratorum omnium, quæ fiunt à lineis ex P ad Conchoïdem ductis. Hoc pacto:

$$\overset{AM}{y} \text{———} \overset{LC}{c} \text{———} \overset{GM}{b+y}, \text{ ad } \overset{GC}{\frac{bc+cy}{y}}$$

$$\frac{bc+cy}{y}$$

$$\text{subtr.}\begin{cases} \square GC. \ \dfrac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} \\ \square GM. \ bb+2by+yy \end{cases}$$

$$\square MC. \ \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} - bb - 2by - yy$$

$$\text{add. } \square PM. \ vv+2vy+yy$$

$$\text{fit } \square PC. \ \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} - bb - 2by + vv + 2vy.$$

Hoc autem ut sit minimum, positâ jam $AM \infty y+e$, quæratur rursus, ut ante, quadratum ex PC, quò obtineatur æquatio inter id ipsum bis inventum, quâ innotescat quæsita quantitas v, supponendo e esse ∞ o.

$$\overset{AM}{y+e} \text{——} \overset{LC}{c} \text{——} \overset{GM}{b+y+e}, \text{ ad } \overset{GC}{\frac{bc+cy+ce}{y+e}}$$

$$\frac{bc+cy+ce}{y+e}$$

$$\text{subtr.}\begin{cases} \square GC. \ \dfrac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee} \\ \square GM. \ bb+2by+yy+2be+2ey+ee \end{cases}$$

$$\square CM. \ \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee} - bb - 2by - yy - 2be - 2ey - ee.$$

$$\text{add. } \square PM. \ vv+2vy+yy+2ve+2ey+ee$$

$$\square PC. \ \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee} - bb - 2by - 2be + vv + 2vy + 2ve.$$

Hinc

Hinc dempto utrobique $-bb-2by+vv+2vy$, remanebit

$$\frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} \infty \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee}-2be+2ve,$$ seu

$$\frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee-2beyy-4beey-2be^3+2evyy+4eevy+2e^3v}{yy+2ey+ee}.$$

Hoc est, multiplicato per crucem, erit $bbccyy+2bccy^3+ccy^4+2bbccey+4bcceyy+2ccey^3+bbccee+2bcceey+cceeyy \infty bbccyy+2bccy^3+ccy^4+2bcceyy+2ccey^3+cceey-2bey^4-4beey^3-2be^3yy+2evy^4+4eevy^3+2e^3vyy$. Ac proinde sublatis utrinque æqualibus, restabit $2bbccey+2bcceyy+bbccee+4bcceey \infty -2bey^4-4beey^3-2be^3yy+2evy^4+4eevy^3+2e^3vyy$. Diviso jam ubique per e, reserventur quantitates in v ductæ ad unam partem, fietque, translatis reliquis, $2vy^4+4evy^3+2eevyy \infty 2bbccy+2bccyy+bbcce+2bccey+2by^4+4bey^3+2beeyy$. Unde neglectis iis, quæ in e aut ee ductæ sunt, obtinebitur $2vy^4 \infty 2bbccy+2bccyy+2by^4$. Et fit, dividendo utrinque per $2y^4$, $v \infty \frac{bbcc}{y^3}+\frac{bcc}{yy}+b$. ut ante. Ubi sciendum, calculum multò abbreviari posse, si in secunda hac operatione multiplicationes, quibus ad ee aut e^3 ascenditur, continuè omittantur.

Atq; hæc quidem via est, quam & Hugenium secutum fuisse confido, prout tangentes curvarum linearum se aliter quàm Fermatius ope hujus ipsius Methodi quæsivisse mihi asseveravit. Quam viam ut omnium maximè contrahamus, poterimus, invento, ut priùs, quadrato ex P C, cum subtilissimo ac sæpiùs laudato nostro Huddenio secundam hanc operationem omnino insuper habere, atque rejectis quantitatibus cc, bb, vv, & ss reliquas per ipsius y dimensiones multiplicare, invertendo porrò signa + & − quantitatum, per y & yy divisarum. Perinde, ut hìc videre est.

$$\square PC.\ \frac{bbcc}{yy}+\frac{2bcc}{y}+cc-bb-2by+vv+2vy \infty ss$$

Mult. per 2   1   1   1

$$-\frac{2bbcc}{yy}-\frac{2bcc}{y}-2by+2vy \infty 0$$

$$2vy \infty \frac{2bbcc}{yy}+\frac{2bcc}{y}+2by$$

Et fit $v \infty \frac{bbcc}{y^3}+\frac{bcc}{yy}+b$, ut ante. Atque ita de aliis.

Cæte-

Cæterùm quod ad alias Methodos attinet, quibus tum Maximi & Minimi determinatio, tum tangentium sive secantium harum inventio, tum etiam infinitorum aliorum difficiliorum Problematum solutio obtineri queunt, poteris eas ab eodem Huddenio expectare; qui adeò multa ac præclara circa hæc invenit, ut neminem putem repertum iri, qui cum eo in his sit æquiparandus. quippe is non tantùm Maximi aut Minimi determinationem, cùm quæstio non nisi unum tale agnoscit, exhibere valet; sed etiam, quando complura nec non vario modo infinita Maxima aut Minima admittit, viâ omnium simplicissimâ elicere novit.

Ad hæc si superiori modo ipsam tangentem Conchoïdis CT investigare lubeat, ponatur, ut ante, GA $\infty\, b$, AE vel LC $\infty\, c$, CM vel AB $\infty\, x$, MA vel BC $\infty\, y$, ET $\infty\, v$, & ES $\infty\, s$: eritque ME $\infty\, c - y$, & MT $\infty\, c - y + v$. Tum fiat, propter similitudinem triangulorum STE & CTM, ut TE ad ES, hoc est, v ad s, ita TM, hoc est, $c - y + v$, ad MC. $\frac{cs - sy + sv}{v} \infty\, x$. Hinc cum & supra inventum sit $xy \infty \sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}$, id est, dividendo utrinque per y,

$x \infty \frac{\sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}}{y}$: erit $\frac{cs - sy + sv}{v}$

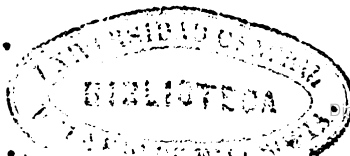
$\infty \frac{\sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}}{y}$. Unde quadratis singulis partibus ordinatâque æquatione invenitur

$$y^4 \infty \frac{\begin{array}{llll} +2css\,y^3 & +ccvv\,yy & +2bccvvy & +bbccvv \\ +2vss & -bbvv & & \\ -2bvv & -ccss & & \\ & -2cvss & & \\ & -vvss & & \end{array}}{ss + vv.}$$

Hoc est, translatis quantitatibus omnibus ad unam partem, habebitur

$$y^4 \frac{\begin{array}{lllll} -2css\,y^3 & -ccvv\,yy & -2bccvvy & -bbccvv & \infty\, 0. \\ -2vss & +bbvv & & & \\ +2bvv & +ccss & & & \\ & +2cvss & & & \\ & +vvss & & & \end{array}}{ss + vv}$$

Deinde, ad inveniendas quantitates v & s, positâ $y \infty\, e$, seu $y - e$ $\infty\, 0$,



$\propto 0$, multiplico $y - e \propto 0$ per $y - e \propto 0$, & fit $yy - 2ey + ee \propto 0$. æquatio duas habens radices æquales. Quam porrò, ut ad æquè-multas cum præcedente dimensiones ascendat ac ejusdem cum illa sit formæ, multiplico per $yy - fy - gg$, & provenit

$$\begin{matrix} y^4 & -2ey^3 & +eeyy & -eefy & -eegg \propto 0. \\ & -f & +2ef & +2egg & \\ & & -gg & & \end{matrix}$$

Cujus itaque terminos separatim comparo cum terminis præcedentis. Ultimus terminus, qui hic est quintus, dat $gg \propto \frac{bbccvv}{eeff + eevv}$, quartus dat

$f \propto \frac{2bbccvv + 2bccevv}{e^3ff + e^3vv}$, tertius dat

$ff \propto \frac{3bbccvv + 4bccevv + e^4vv + cceevv - bbeevv}{ccee + 2ceev + eevv - e^4}$, & secundus dat $vv \propto \frac{e^3ffv + ce^3ff - e^4ff}{e^4 + be^3 + bbcc + bcce}$. Quocirca, ut obtineatur v, si ipsius ff valor jam inventus multiplicetur per

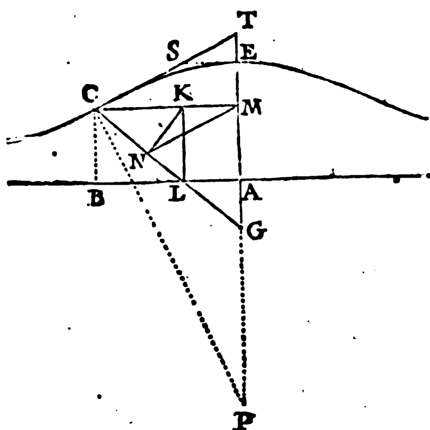
$\frac{e^3v + ce^3 - e^4}{e^4 + be^3 + bbcc + bcce}$, abbreviando priùs, ad facilitatem operationis, numeratorem prioris & denominatorem posterioris fractionis per $e + b$, ac deinde denominatorem prioris & numeratorem posterioris fractionis per $eev + cee - e^3$, exurget $e^4 - be^3 + ccee + 3bcce \propto e^4 + e^3v + ce^3 + bcce + bccv + bc^3$. Fietque, ordinatâ æqualitate, $v \propto \frac{-bc^3 + 2bcce + ccee - be^3 - ce^3}{bcc + e^3}$.
Seu, quia y est $\propto e$, erit $v \propto \frac{-bc^3 + 2bccy + ccyy - by^3 - cy^3}{bcc + e^3}$.

Denique, inventâ quantitate v, facile est invenire quantitatem f. Si enim in superiori æquatione $\frac{cf - fy + fv}{v}$

$\propto \frac{\sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}}{y}$ in locum v subrogetur valor ejus nunc inventus, obtinebitur

$f \propto \frac{-bcc + bcy + cyy + byy}{y^4 + by^3 + cy^3 + bcyy} \sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}$.

Quod ad constructionem hujus attinet, quoniam ipsa, quam inveni, haud inconcinna mihi est visa, placuit eam hìc paucis subnectere.



Ductâ ex C ſuper G E perpendiculari C M, agatur G C, ſecans A B in L; & ex L ducatur L K parallela G E, occurrens ipſi C M in K. Deinde ex K demiſsâ K N perpendiculari ad C G, jungatur N M: eritque C T huic parallela tangens quæſita.

Quibus explicatis facile etiam eſt hic oſtendere, quonam pacto punctum Conchoïdis C, quod duas ejus portiones, concavam & convexam, à ſe invicem diſtinguit, inveſtigari queat. De quo egit Nobiliſſimus D. Hugenius ultimo Problematum Illuſtrium, quæ de Circuli magnitudine inventis adjecit.

Etenim inventâ ad hoc, ut ante, æquatione.

$$\frac{y^4 \begin{array}{l}-2css\\-2vss\\+2bvv\end{array} y^3 \begin{array}{l}-ccvv\\+bbvv\\+ccss\\+2cvss\\+vvss\end{array} yy - 2bccvvy - bbccvv \infty 0,}{vv+ss}$$

quoniam ex puncto T, utcunque in producta G E accepto, nulla recta duci poteſt, Conchoïdem in aliquo puncto tangens, quæ, ſeu poſtquam eſt producta, hanc ipſam in alio puncto non ſecat, exceptâ tantùm rectâ, quæ per flexus punctum ducitur: requiritur ut dicta æquatio ad puncti hujus determinationem tres admit-

tat

tat radicis valores, qui omnes inter ſe ſint æquales. Quod ipſum ut fiat, confero æquationem ſuperiorem cum æquatione $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 \propto 0$, in qua y tres habet valores æquales, qui ſinguli ſunt $\propto e$. Hanc autem, ut ad æquè multas dimenſiones aſcendat, & ejuſdem cum præcedenti ſit formæ, multiplico per $y + f$, & prodit æquatio

$$y^4 \begin{array}{l} -3e \\ +f \end{array} y^3 \begin{array}{l} +3ee \\ -3ef \end{array} yy \begin{array}{l} -e^3 \\ +3eef \end{array} y - e^3 f \propto 0.$$

Cujus termini ſi cum alterius terminis comparentur, invenientur inde $f \propto \frac{bbccvv}{e^3 ff + e^3 vv}$, $ff \propto \frac{3bbccvv}{e^4} + \frac{2bccvv}{e^3} - vv$, $v \propto \frac{bbcc + 2bcce + ccee}{3bcc - 3bee} - b - c$, & $e^3 \propto -3bee * + 2bcc$, ſeu, quia y eſt $\propto e$, $y^3 \propto -3byy * + 2bcc$.

Quoniam autem hæc æquatio Cubica eſt, neque ad Quadratam reduci poteſt, ſupereſt ut valorem radicis y per ſectiones Conicas determinemus. At verò cum æquationes omnes inferiores conſtrui etiam queant beneficio linearum curvarum, quæ ſunt ſuperiorum generum, non ingratum fore judicavi, ſi hìc ulteriùs exponerem, quo pacto ope datæ Conchoïdis C E Problema propoſitum ſolvi poſſit, ſic ut ad conſtructionem ejus non niſi regula atque circino utamur, haud ſecus ac ſi Problema foret Planum. Quemadmodum id ab eruditiſſimo ac præſtantiſſimo Viro-Iuvene D. Henrico van Heuraet, Harlemo-Batavo, inventum fuit, mihiq́ue ab eo communicatum.

Eſto, ut ante, G A $\propto b$, A E vel L C $\propto c$, B C vel A M $\propto y$, & A T $\propto z$. Unde ut ſupra pro A P invenietur $\frac{by^3 + bccy + bbcc}{y^3}$

add. A M. $\quad y$

P M. $\frac{y^4 + by^3 + bccy + bbcc}{y^3}$

M T. $\quad z - y$

$\square$ P M T. $\frac{-y^5 \begin{array}{l} +z \\ -b \end{array} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{array}{l} +bccz \\ -bbcc \end{array} y + bbccz}{y^3}.$

Eſt autem $\square$ C M. $\frac{-y^4 - 2by^3 \begin{array}{l} -bb \\ +cc \end{array} yy + 2bccy + bbcc}{yy}.$

Erit itaque $\dfrac{-y^5 \begin{smallmatrix}+z\\-b\end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz}{y^3}$

$$\infty \frac{-y^4 - 2by^3 \begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix} yy + 2bccy + bbcc}{yy}$$

$$-y^5 \begin{smallmatrix}+z\\-b\end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz \infty -y^5 - 2by^4 \begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix} y^3 + 2bccyy + bbccy.$$

$$\begin{smallmatrix}+z\\+b\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}+bz\\+bb\\-cc\end{smallmatrix} y^3 - 3bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-2bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz \infty 0$$

div. per $y+b$. fit $\begin{smallmatrix}+z\\+b\end{smallmatrix} y^3 - ccyy - 2bccy + bccz \infty 0$. Hæc æquatio duas habet veras radices, quippe quæ ad duas tangentes, ex eodem puncto ad utramque portionem ductas, pertinent; quæ si æquales fuerint, tanget TC utramque portionem in eodem puncto.

$$\begin{array}{l} y - e \\ y - e \\ \hline yy - 2ey + ee \infty 0 \\ y + g \\ \hline y^3 - 2eyy + eey + eeg \infty 0 \\ \quad + g \quad\quad - 2eg \end{array}$$

$$\frac{-cc}{z+b} \infty -2e + g$$

$$g \infty 2e - \frac{cc}{z+b}$$

$$\frac{bccz}{z+b} \infty eeg$$

dele g. $\dfrac{bccz}{z+b} \infty 2e^3 - \dfrac{ccee}{z+b}$

$$bccz \infty 2ze^3 + 2be^3 - ccee$$

$$2ze^3 + 2be^3 - ccee - bccz \infty 0$$

Mult. per 3. $6ze^3 + 6be^3 - 3ccee - 3bccz \infty 0$

subtr. $6ze^3 + 6be^3 - 4ccee - 4bcce \infty 0$

div. per cc. $ccee + 4bcce - 3bccz \infty 0$

$$ee + 4be - 3bz \infty 0$$

$$\frac{-2bcc}{z+b} \infty ee - 2eg$$

dele g. $-\dfrac{2bcc}{z+b} \infty ee - 4ee + \dfrac{2cce}{z+b}$

$$-2bcc \infty -3zee - 3bee + 2cce$$

Mult. $3zee + 3bee - 2cce - 2bcc \infty 0$

per $2e$. $6ze^3 + 6be^3 - 4ccee - 4bcce \infty 0$

Mult. per $3z + 3b$.

$$3zee + 3bee + 12bze + 12bbe - 9bzz - 9bbz \infty 0$$

subtr. $3zee + 3bee - 2cce - 2bcc \infty 0$

$$12bze + 12bbe + 2cce - 9bzz - 9bbz + 2bcc \infty 0$$

$$12bze + 12bbe + 2cce \infty 9bzz + 9bbz - 2bcc$$

$$e \infty \frac{9bzz + 9bbz - 2bcc}{2cc + 12bz + 12bb}$$

Igi-

Igitur si in æquatione $ee + 4be - 3bz \propto 0$ in locum e substituatur hic valor inventus, habebitur:

$$\begin{array}{l} 81bbz^4 + 162b^3z^3 - 108bbcczz - 204b^3ccz - 12bbc^4 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 81b^4 \qquad\quad - 12bc^4 \quad - 96b^4cc \end{array} \propto 0$$

div. per $3b$.

$$\begin{array}{l} 27bz^4 + 54bbz^3 - 36bcczz - 68bbccz - 4bc^4 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 27b^3 \qquad\quad - 4c^4 \quad - 32b^3cc \end{array} \propto 0$$

div. per $z + b$.

$$\begin{array}{l} 27bz^3 + 27bbzz - 36bccz - 32bbcc \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 4c^4 \end{array} \propto 0$$

div. per $27b$.

Et fit $z^3 + bzz - \frac{4}{3}ccz - \dfrac{32bbcc - 4c^4}{27b} \propto 0.$

Jam ut æquatio hæc ope circuli ac datæ Conchoïdis solvatur, ponatur

$GA \propto b$
$AE \propto c$ — Tum fiat, ut sequitur.
$AT \propto x$
$TC \propto y$
& $AM \propto z$, eritque $MT \propto x - z$.

subtr. $\left\{\begin{array}{l} \square CT.\ yy \\ \square MT.\ xx - 2xz + zz \end{array}\right.$ — $\square CM$. Ex natura Conchoïdis.

$\square CM.\ yy - xx + 2xz - zz \propto \dfrac{-z^4 - 2bz^3 - bbzz + cczz + 2bccz + bbcc}{zz}$

$$yyzz - xxzz + 2xz^3 - z^4 \propto -z^4 - 2bz^3 - bbzz + cczz + 2bccz + bbcc$$

$$\begin{array}{l} +2x \\ +2b \end{array} z^3, \begin{array}{l} +yy \\ -xx \\ +bb \\ -cc \end{array} zz - 2bccz - bbcc \propto 0$$

div. per $2x + 2b$.

Et fit $z^3 \dfrac{+yy - xx + bb - cc}{2x + 2b} zz - 2bccz - bbcc \propto 0$.

Hinc cum termini hujus æquationis cum terminis proximè antecedentis sint comparandi; & quidem ad inveniendas quantitates x & y tres essent æquationes quærendæ: facio ut in eadem æquatione tertius terminus sit ad quartum, sicut tertius hujus est ad quartum. In quem finem secundum illius terminum multiplico

per $\frac{9bb}{16bb+2cc}$, & tertium per $\frac{81b^4}{256b^4+64bbcc+4c^4}$. Omninò ut hìc videre est.

$$z^3+bzz-\tfrac{4}{3}ccz- \text{\&c.} \quad \infty\ 0$$

$$\frac{9bb}{16bb+2cc} \qquad \frac{81b^4}{256b^4+64bbcc+4c^4}$$

$$z^3+\frac{9b^3}{16bb+2cc}zz-\frac{27b^4cc}{64b^4+16bbcc+c^4}z-\text{\&c.}\ \infty\ 0.$$

$$\frac{27b^4cc}{64b^4+16bbcc+c^4}\ \infty\ \frac{bcc}{x+b}$$

$$\frac{27b^3}{64b^4+16bbcc+c^4}\ \infty\ \frac{1}{x+b}$$

$$27b^3x+27b^4\ \infty\ 64b^4+16bbcc+c^4$$

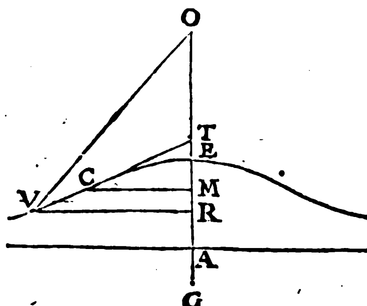
$$x\ \infty\ \frac{64b^4+16bbcc+c^4}{27b^3}-b.$$

$$\frac{9b^3}{16bb+2cc}\ \infty\ \frac{yy-xx+bb-cc}{2x+2b}$$

$$\frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc}\ \infty\ yy-xx+bb-cc$$

$$yy\ \infty\ \frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc}+xx+cc-bb$$

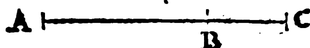
$$y\ \infty\ \sqrt{\frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc}+xx+cc-bb}.$$



Igitur sumendo in axe lineam AO $\infty\ \frac{64b^4+16bbcc+c^4}{27b^3}-b$, eamque vocando x, si ex puncto O intervallo OV $\infty\ \sqrt{\frac{9b^3x+9b^4}{8bb+cc}+xx+cc-bb}$ arcus Circuli describatur, atque ex sectionis puncto V ducatur ad AO perpendicularis VR: erit AT, quæ se habet ad AR, ut $16bb+2cc$ ad $9bb$, inventæ æquationis radix. Unde facile est invenire lineam AM. Ostensum enim est $yy+4by-3bz\ \infty\ 0$.

Denique cum inventio supponendi duas ejusdem formæ æquationes, ad comparandum separatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, non tantùm ad inveniendas tangentes aut secantes curvarum linearum, quemadmodum fuit expositum, adhiberi possit; sed ipsa generalis sit atque infinitis aliis Problematîs resolvendis, ut Author asserit, inservire queat: haud inutile fuerit hìc ulteriùs quoque exponere, quo pacto illam ad Maximi aut Minimi determinationem applicari posse deprehendi, proponendo in eum finem sequentia Problemata.

Datam



Datam rectam lineam A C secare in puncto B, ut parallelepipedum, quod fit sub quadrato unius partis A B & altera parte B C, sit omnium parallelepipedorum, sic factorum, maximum.

Esto A C $\propto a$, & A B $\propto x$: eritque B C $\propto a - x$. Deinde maximum solidum, cui parallelepipedum quæsitum statui potest æquale, esto b^3. Quibus sic positis, si quadratum ex A B $\propto xx$ multiplicetur per B C $\propto a - x$, proveniet $axx - x^3 \propto b^3$, seu $x^3 - axx * + b^3 \propto 0$. Jam factâ $x \propto e$, seu $x - e \propto 0$, multiplico $x - e$ per $x - e$, & fit $xx - 2ex + ee \propto 0$. Quam porrò, ut ejusdem sit formæ cum præcedente, multiplico per $x + f$, & exurgit

$$x^3 \begin{array}{l} -2e \\ +f \end{array} xx \begin{array}{l} +ee \\ -2ef \end{array} x + eef \propto 0.$$

Ex quarum mutua inter se collatione eliciuntur hæ tres æquationes $-2e + f \propto -a$, $+ee - 2ef \propto 0$, & $eef \propto b^3$: quæ resolutæ dant $f \propto \frac{1}{2}e$, e seu $x \propto \frac{2}{3}a$, & $b^3 \propto \frac{4}{27}a^3$. Quod ipsum docet, ad secandam lineam A C, qualis requiritur, eandem in B ita esse dividendam, ut A B ipsius A C contineat duas tertias partes; & maximum solidum, cui parallelepipedum quæsitum adæquari potest, esse $\frac{4}{27}a^3$.

Dividere p planum in tria plana proportionalia, ita ut solidum, quod fit ex ductu summæ duorum priorum in latus secundum vel duorum posteriorum in latus primum, sit omnium maximum.

Assumptis ad hoc x pro latere primo, & y pro latere secundo, fient inde proportionalia plana

$$\begin{array}{ll} xx. & 1^{mum} \\ xy. & 2^{dum} \\ yy. & 3^{tium.} \end{array}$$

Et manifestum est, $xxy + xyy$, quod fit ex $xx + xy$, summâ duorum priorum planorum, in latus secundum y, esse æquale ei, quod fit ex $xy + yy$, summâ duorum posteriorum planorum, in latus primum x. Superest ut $xxy + xyy$ sit omnium ejusmodi solido-

lido-

lidorum maximum. Quoniam autem $xx + xy + yy$ est ∞p

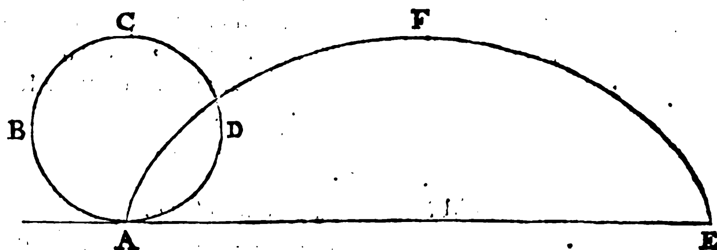
vel $yy \infty p - xx - xy$

mult. per x x

vel etiam $xyy \infty px - x^3 - xxy$:

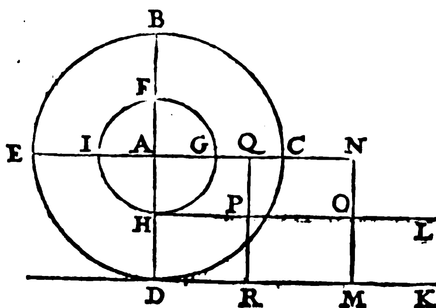
Hinc si pro xyy dicti solidi $xxy + xyy$ substituatur $px - x^3 - xxy$, habebitur $px - x^3$. Quocirca ut $px - x^3$ fiat maximum solidum, quod esse possit, intelligatur ipsum æquale solido q: eritque $x^3 * - px + q \infty 0$. Deinde factâ $x \infty e$ seu $x - e \infty 0$, multiplico $x - e$ per $x - e$, & fit $xx - 2ex + ee \infty 0$. Quam rursus, ut eandem formam habeat cum præcedenti, multiplico per $x + 2e$; & exsurgit $x^3 * - 3eex + 2e^3 \infty 0$. Ex quibus binis æquationibus, si singuli termini unius cum singulis terminis alterius comparentur, elicio $x \infty \sqrt{\frac{1}{3}p}$, & $q \infty \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Eodem modo invenitur $y \infty \sqrt{\frac{1}{3}p}$. Quod ipsum monstrat, ad dividendum p planum in tria plana proportionalia, maximum solidum, quod ex ductu summæ duorum priorum in latus secundum vel ex ductu duorum posteriorum in latus primum gignitur, esse illud, quod obtinetur dividendo p planum in tria plana æqualia. Et sic de aliis.

Cæterùm, cum allatis exemplis satis superque sit ostensum, quâ ratione lineæ rectæ inveniri possint, secantes lineas curvas in Geometriam recipiendas in datis punctis ad angulos rectos: lubet etiam afferre modum ducendi illas in iis curvis, quas pro Geometricis pari jure habere non licet. Qualem Dominus des Cartes excogitavit, atque jam pridem ejus exemplum R. P. Mersenno per literas ostendit in curva, quæ Cycloïdes sive Trochoïdes appellatur, quam Vir Clarissimus, Euangelista Toricellius, scribit à Galilæo Galilæi, prædecessore suo, primùm fuisse consideratam; cujusque ulteriori speculationi ipsum postea, ut & Virum Celeberrimum, D. de Roberval, Mathematum in Academia Parisiensi Professorem Regium, se addixisse novi. Originem autem ducit ex motu puncti, in rota sive circulo assumpti, super rectam aliquam lineam circumvoluti.



Ut si super recta linea A E circumvolvatur rota sive circulus A B C D, donec punctum ejus A, in quo dictam lineam tangit, eidem rursus occurrat in E: describet punctum A hoc motu lineam curvam A F E, quæ Trochoïdes sive Cycloïdes appellatur. Idem intellige de quovis alio puncto, extra vel intra rotam sive circulum assumpto, excepto tantùm ejus centro.

Jam ut in genere ostendatur, quâ ratione lineæ rectæ duci possint, quæ hasce curvas secent in datis punctis ad angulos rectos; non abs re fuerit cum Aristotele hic explicare, quo pacto inæquales circuli, qui circa idem centrum constituti ac conjuncti circumvolvuntur, æquales rectas lineas absolvant.



Sunto ergo duo circuli inæquales, major quidem B C D E; minor autem F G H I, idem habentes centrum A: sintque diametri majoris B D, E C; minoris verò F H & I G, sese ad angulos re-

 ctos

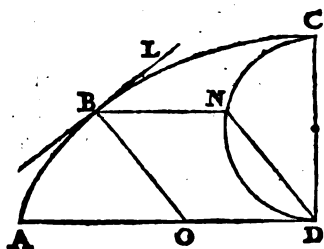
ctos secantes in A. ita ut quadrans circuli majoris sit C D; minoris verò G H. Jam igitur ut pateat ratio, quâ hi circuli, simul circumvoluti, æquales lineas absolvant; concipiatur primùm majorem B C D E dextrorsum moveri super recta D K, & minorem F G H I ad motum illius describere lineam rectam ipsi D K parallelam, quæ sit H L. Unde manifestum, cùm punctum C pervenerit ad M, existente arcu D C æquali rectæ D M, semidiametrum quoque A C tunc fore perpendicularem super D K in M; ita ut coïncidat cum M N, hoc est, punctum C cum puncto M, & punctum A cum puncto N. Ac proinde cum punctum G circuli minoris sit in recta A C: sequitur ipsum quoque post hujus quadrantis devolutionem cadere in punctum O; ita ut semidiameter A G circuli minoris transferatur in N O. Adeò ut, N O æquali existente & parallelâ ipsi A H, ipsa quoque H O sit æqualis futura ipsi A N seu D M, & singulæ rectæ D M, H O separatim ab utroque circuli quadrante eodem tempore peragrentur. Idem de integris circulis est intelligendum.

Non secus ostendetur, si moveatur circulus minor F G H I super rectam H L, secum deferens circulum majorem B C D E, sibi affixum in centro A, lineas rectas æquales absolvi. Devoluto enim circuli minoris quadrante H G super rectam H L, ab H versus L; ita ut rectam lineam H P sibi æqualem percurrat: ducatur per P recta Q P R, secans rectam H L ad angulos rectos in P; sed A N & D K in Q & R. Quo facto, perspicuum est, cùm punctum G est in P, punctum quoque A esse in Q, rectamque A G super rectam Q P. Atque ideo, cum punctum C circuli majoris existat in linea A G producta, patet, illud post hujus quadrantis devolutionem inventum iri in puncto R, rectamque D R æqualem fore rectæ A Q seu H P, & singulas eodem temporis spatio ab utroque circuli quadrante perfici. Quod & de tota circuli circumferentia concludere licet. E quibus tandem liquet, quâ ratione circulus circumvolvi possit, ut rectam absolvat lineam, quæ circumferentiæ ejus sit vel æqualis, vel major, vel minor.

Sed de supra dicta linea A F E notandum, eam duobus motibus describi, inter se distinctis; recto nempe, quo circulus A B C D defertur ab A ad E; & circulari, quo punctum in ejus circumferentia A (quod Trochoïdem describit) rotatur circa centrum, dum movetur per lineam rectam ipsi A E æqualem & parallelam.

Qui-

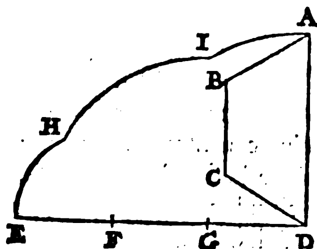
Quibus sic explicatis, ut ad propositum redeamus, atque rectam, quæ Trochoïdem in dato puncto tangat, ducamus: sciendum est, lineam rectam, transeuntem per punctum dictum, & punctum, in quo rota basin, dum punctum in Trochoïde datum describitur, contingit, secare semper tangentem quæsitam ad angulos rectos.



Ut si invenienda sit linea recta, tangens in B curvam sive Trochoïdem ABC, descriptam super basin AD per punctum aliquod circumferentiæ rotæ DNC, super basin AD circumvolutæ: oportet tantùm per punctum B rectam lineam ducere BN, parallelam basi AD; & deinde ab N (ubi rotæ occurrit) ad D, (ubi rota basin tangit) rectam ND; tumque eidem parallelam BO; ac denique huic perpendicularem BL: Quæ erit tangens quæsita.

Cujus rei brevem atque simplicem demonstrationem affert. ut sequitur.

Si super rectam lineam circumvolvatur polygonum aliquod rectilineum, erit linea curva, quæ per aliquod ejus punctum describitur, composita ex pluribus circulorum portionibus, quarum tangentes ad singula earum puncta normaliter secant lineas rectas, quæ ab ipsis ad puncta, in quibus polygonum, unamquamque portionem describendo, basin contingit, ducuntur.

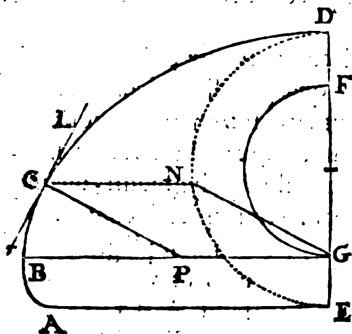


Exempli gratiâ, si faciamus ut volvatur Hexagonum ABCD super rectam EFGD, describet punctum ejus A, lineam curvam EHIA, compositam ex arcu EH, qui describitur, dum Hexagonum hoc contingit basin in puncto F (quod ejusdem arcus est centrum); & ex arcu HI (cujus centrum est punctum G); ut

& ex arcu I A (cujus centrum est punctum D): per quæ centra transeunt omnes rectæ, quæ dictorum arcuum tangentibus ad angulos rectos occurrunt. Quod cum accidat polygono centies millenorum millium, palàm est, idem convenire quoque Circulo.

Verba Authoris. Cæterùm possem hanc tangentem alio modo, & meâ sententiâ elegantiori, magisque Geometrico demonstrare; verùm quoniam prolixior foret, & brevitati hìc mihi consulendum videtur, in præsens ei describendo supersedebo. Notandum solummodo est, cùm basis hujus Trochoïdis æqualis est circumferentiæ rotæ, quam super eandem basin ad ejus descriptionem circumvolvi imaginamur, curvam hanc, à fornice circulari non absimilem figuram, referre: hoc est, quòd tangens utriusque ejus extremi puncti ad basin sit perpendicularis. Sed cùm minor est, quòd tunc utraque extremitas introrsum sit involuta, ita ut complures revolutiones hanc repræsentent figuram





Ad cujus Trochoïdis tangentes inveniendas, atque sciendum ubi se involvere incipiat: imaginandum est, punctum D, à quo describitur, esse extra rotam. Deinde, duæ supponendæ sunt bases; una A E, supra quam Trochoïdes A B C D per punctum D est descripta; & altera B G, super quam rota F G secum deferens circulum D E sibi affixum circa ejus centrum est circumvoluta, cujusque semicircumferentia dimidiæ basi A E est æqualis. Ubi sciendum, tangentes inveniri per circulum D E & punctum G, ubi rota F G basin B G contingit. Adeò ut ad ducendam lineam rectam, quæ tangat hanc Trochoïdem, verbi gratiâ, in puncto C, opus tantùm sit ducere C N parallelam basi A E, occurrentem circu-

circulo D E in puncto N; tum verò junctæ N G parallelam C P; quæ ipsi tangenti quæsitæ erit perpendicularis. Ita ut perspicuum sit, punctum B, ubi hæc secunda basis B G Trochoïdi occurrit, fore illud, ubi ipsa se introrsum involvere incipiet: quandoquidem linea, quæ illam ibidem tangit, ad basin A E perpendicularis existit.

Denique si basis Trochoïdis major fuerit circumferentiâ circuli, qui per assumptum punctum, quod eam designat, circa rotæ centrum describitur: binæ extremitates extrorsum erunt inflexæ; ita ut complures ejusmodi linearum revolutiones hanc exhibeant figuram.

Cujus Trochoïdis tangentes ut inveniantur, atque sciatur ubi se inflectere incipiat, imaginandum est, punctum, quod ipsam designat, esse intra rotam: adeoque secundam basin esse B G, supra quam rota F G, cujus circumferentia huic basi est æqualis, circumvolvatur, interea dum punctum D, Trochoïdem designans, super primam basin A E describit circulum D E, circa rotæ centrum. Jam ut inveniatur linea, quæ ipsam in puncto C, utcunque in Trochoïde assumpto, tangat: ducatur C N parallela basi, occurrens circulo D N E in puncto N. Tum ab N ad G, ubi rota F G basin suam contingit, ductâ rectâ N G, agatur ipsi parallela C P: eritque recta C L, quæ ad eam perpendicularis ducitur, tangens quæsita. Porrò ad inveniendum punctum H, ubi Trochoïdis portio A H

desinit

desinit esse concava, & HCD convexa, opùs tantùm est à puncto G rectam ducere GR, quæ tangat circulum DRE in puncto R; tum ab R rectam RH, parallelam basi, & occurrentem Trochoïdi in puncto H. Quod erit quæsitum.

Ubi notandum, nullam dari lineam rectam, quæ Trochoïdem hanc AHCD tangat in puncto H: quandoquidem illud ipsum duas ejus portiones, quarum una est concava, & altera convexa, distinguit.

Deinde observandum, quòd ea, quæ de tangentibus Trochoïdum, per rotam circularem descriptarum, hìc allata sunt, etiam omnibus aliis Trochoïdibus competant, quæ circumvolutione aliarum quarumlibet figurarum describuntur.

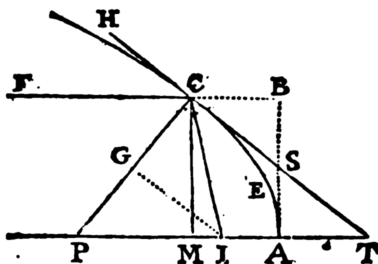
Denique, quòd lineæ hæ sint Mechanicæ, & è numero earum, quæ in hac Geometria repudiantur; adeò ut nemini mirum videri debeat, quòd tangentes earum non inveniantur per regulas ibi expositas, cum ad ipsas non referantur.

oo *Quâ quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 sese intersecabunt, per quæ secunda hac Ovalis erit ducenda.*] Notavit hìc Clarissimus Hugenius, secundam hanc Ovalem (quod animadversione dignum est) uno casu Circulum perfectum evadere, cùm nempe FA ad AG eandem rationem habet, quam 5 A ad A 6. Adeoque radios lucis, ad punctum aliquod tendentes, ope superficiei Sphæricæ ad datum aliud punctum omnes accuratè cogi posse. Quod se apertiùs in tractatu de Dioptricis demonstraturum suscepit, in quo multa egregia ac ingeniosè à se inventa, quæ huc spectant, brevi, si volet Deus, est exhibiturus.

p *Et quod ex tali materia constet, ut vim horum radiorum, secundùm rationem, qua inter lineas A 5 & A 6 reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in Dioptrica demonstravimus, liquet, hoc posito, futurum, ut etiam reflexionum anguli, non secus ac refractionum, inæquales existant, atque eodem modo mensurari possint.*] Hæc refer ad caput 2^{dum} Dioptricæ, ubi demonstratum est, reflexionis angulum angulo incidentiæ esse æqualem: quoniam vis alicujus radii per reflexionem non diminuitur. Sicut per refractionem vis radii, transeundo ex uno corpore pellucido in aliud, augetur aut diminuitur, ac propterea angulos

gulos facit inæquales. Adeò ut hinc sequatur: si speculum haberi possit, ex tali constans materia, ut vim radiorum, quos reflecteret, augeret aut diminueret (omnino ut ostendit, vitrum vim radiorum, quos in se recipit, augere, eorumque refractionis causam esse): essent reflexionum anguli non secus ac refractionum inæquales: & posset eorum ratio mensurari per rationem, quæ est inter lineas A 5 & A 6, supponendo illam eandem esse, quæ est inter vim alicujus radii antequam in speculum incideret, & inter vim, quam immediatè post obtineret, cum esset reflexus.

Cæterùm quoniam ad radios per reflexionem ac refractionem diversimode detorquendos Sectiones Conicæ singularem habent usum, atque specula & vitra ad ipsarum figuram expolita miros effectus præbent: haud inopportunum fore duxi, si, tum ad penitiorem intellectum eorum, quæ in Dioptrica de figura vitrorum ab Authore sunt ostensa, tum ad usum eorum, quæ de inveniendis tangentibus aut secantibus exposita sunt, deinceps hìc adjungerem, quo pacto in axe puncta investigari possint, in quibus radii Solis, postquam in superficiem concavam speculi Parabolici inciderunt, aut per Elliptica vel Hyperbolica vitra transierunt, reflectuntur aut colliguntur.



Ut si fuerit speculum, habens figuram Parabolæ AEC, cujus axis sit MA, & vertex A: ad investigandum punctum I, ad quod radius Solis FC, qui ipsi MA est parallelus, reflectatur, postquam in idem speculum incidit in C, suppono, ut ante, latus rectum $\infty\, r$, MA $\infty\, y$, & IA $\infty\, z$. Quibus positis cum ex superioribus PM sit $\infty\, \frac{1}{2} r$, & AT sit ∞ AM seu y: erit PT $\infty\, \frac{1}{2} r + 2y$, & PI $\infty\, \frac{1}{2} r + y - z$. Quoniam autem propter æquales angulos incidentiæ & reflexionis FCH & ICT, ut & rectam PC ipsi tangenti HT perpendicularem, anguli quoque FCP & PCI sunt æquales; atque horum quidem angulus FCP angulo CPI sit æqualis: erunt pariter anguli PCI & CPI æquales; lineaque IG, ipsi PC perpendicularis, rectam PC bifariam

riam in G secabit. Quibus sic existentibus, cum & hinc P I ipsi I T sit æqualis, erit $r + 2y - 2z \infty \frac{1}{2}r + 2y$. Unde, dempto utrinque $2y$, & reliquis per 2 divisis, invenitur $z \infty \frac{1}{4}r$. Quod ipsum, cum de quovis radio ipsi axi parallelo similiter intelligendum sit, nos docet, radios Solis, axi parallelos, ubi in superficiem concavam speculi Parabolici inciderunt, omnes ad idem axis punctum I reflecti, distans à vertice quartâ parte lateris recti.

Unde porrò fit manifestum, cum lucente Sole, beneficio hujus speculi, prout ipsi directè est obversum, aliquid in I accendatur, quam ob rationem idem speculum ustorium dictum fuerit, punctúmque I Foci nomine appellari consueverit.

Deinde si fuerit vitrum, habens formam Ellipsis D B K, cujus maxima diameter sit D K: ad investigandum quo modo radius A B, qui in aëre existens ipsi D K est parallelus, tendere debeat, postquam intravit ejus superficiem convexam, & in quo vitro refractiones sic fieri intelliguntur, ut, juxta ea, quæ in Dioptricis tradita sunt, illæ omnes mensurari possint per rationem, quæ est inter lineas d & e, facio D H vel I K ∞a, H I ∞z, & D F ∞y, eritque H F $\infty y - a$ vel $a - y$, & F I $\infty a + z - y$ vel $y - a + z$. Quibus positis, si Ellipsis D B K descripta esse intelligatur ope fili H B I, haud secus ac illud Capite 8vo Dioptrices ab Authore aut etiam à nobis in Organica Conicarum Sectionum descriptione expositum fuit, erit, factâ B I ∞x, B H $\infty 2a + z - x$. Unde jam facile est invenire quantitatem y; assumptis scilicet quantitatibus x & z, ut cognitis. Etenim si à quadrato B H. $4aa + 4az + zz - 4ax - 2zx + xx$ tollatur quadratum H F. $yy - 2ay + aa$, restabit $3aa + 4az + zz - 4ax - 2zx + xx + 2ay - yy$, pro quadrato B F. Similiter, si à quadrato B I. xx auferatur quadratum F I. $aa + 2az + zz - 2ay - 2zy + yy$, relinquetur etiam

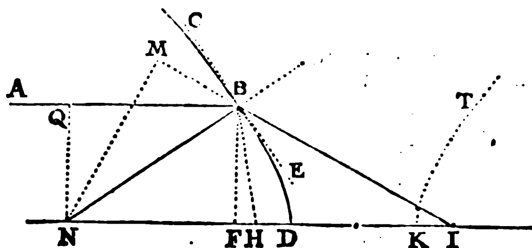
$xx -$

$xx - aa - 2az - zz + 2ay + 2zy - yy$, pro quadrato BF. Hinc cum habeatur æquatio inter quadratum BF bis inventum, invenietur, ordinatâ æqualitate, $y \propto \frac{2aa + 3az + zz - 2ax - zx}{z}$. Esto jam DN $\propto v$, & NB $\propto s$, eritque FN $\propto v - y$. E quibus rursus facile est invenire quantitatem y, suppositis quantitatibus v & s. Si enim à quadrato BN. ss abstulero quadratum FN. $vv - 2vy + yy$, remanebit $ss - vv + 2vy - yy$, pro quadrato BF. Unde factâ æquatione inter hanc summam & posteriorem duarum præcedentium habebitur $y \propto \frac{ss - vv - xx + aa + 2az + zz}{2a + 2z - 2v}$. Quibus jam inter se æquatis, & æquatione de xx ordinatâ, fiet

$$xx \propto \frac{\begin{array}{ll} -4av & x + ssz \\ -2vz & -vvz \\ +4aa & +4aav \\ +[illegible]az & +6avz \\ +2zz & +2vzz \\ & -4a^3 \\ & -9aaz \\ & -6azz \\ & -z^3 \end{array}}{z}.$$

Porrò ut inveniantur quantitates v & s, positâ $x \propto f$, multiplicetur $x - f \propto 0$ per $x - f \propto 0$, & fit $xx - 2fx + ff \propto 0$, seu $xx \propto 2fx - ff$, æquatio ejusdem formæ cum præcedente. Unde, comparando secundum terminum unius cum secundo alterius, emergit v, hoc est, DN $\propto \frac{2aa + 3az + zz - zx}{2a + z}$. Quæ à DI seu $a + z$ ablata relinquit NI $\propto \frac{zx}{2a + z}$. Denique cum linea NQ vel FB & linea NM eandem inter se rationem habeant, quam lineæ, quæ refractionem vitri DBK mensurant; & quidem FB ad NM sit, ut BI ad IN: superest ut d sit ad e, sicut x ad $\frac{zx}{2a + z}$. Et fit, multiplicando extremos, tum medios, $\frac{dzx}{2a + z} \propto ex$. Unde, resolutâ æqualitate, invenitur HI seu $z \propto \frac{2ae}{d - e}$. Cui si addantur DH & IK, hoc est, $2a$, habebitur

D K $\infty \frac{^{2}ad}{d-e}$. Et patet D K ad H I esse, ut ^{2}ad ad ^{2}ae, hoc est, ut d ad e. Quod ipsum, cum de quovis radio A B ipsi D K parallelo similiter intelligendum sit, nos docet, ope vitri Elliptici D B K, in quo D K ad H I eandem habet rationem, quam d ad e, hoc est, eandem quam inter se servant lineæ, quæ hujus vitri refractionem metiuntur, radios, qui in aëre existentes diametro D K sunt paralleli, omnes ita detorqueri, ut, postquam superficiem ejus convexam D B K transierunt, colligantur simul in puncto I.



Denique si fuerit vitrum, habens figuram Hyperbolæ D B, cujus axis sit D K: ad investigandum, quo pacto radius A B, qui in vitro existens ipsi D K est parallelus, se inflectere debeat, postquam superficiem ejus convexam D B erit egressus, supponendo ejusdem vitri refractionem esse eam, quæ est inter lineas d & e, facio H D vel K I $\infty\, a$, H I $\infty\, z$, & D F $\infty\, y$: eritque F H $\infty\, y-a$ vel $a-y$, & F I $\infty\, z+y-a$. Quibus positis, si Hyperbola D B descripta intelligatur beneficio fili, quemadmodum Capite 8vo Dioptrices ab Authore fuit indicatum, vel etiam à nobis libro 4to Exercitationum nostrarum Mathematicarum, erit, factâ B I $\infty\, x$, B H $\infty\, x-z+{}^{2}a$. Unde jam facile est invenire quantitatem y, supponendo quippe quantitates x & z esse cognitæ. Si enim à quadrato B H. $xx-{}^{2}zx+zz+{}^{4}ax-{}^{4}az+{}^{4}aa$ subducatur quadratum F H. $yy-{}^{2}ay+aa$, restabit $xx-{}^{2}zx+zz-yy+{}^{2}ay+{}^{3}aa+{}^{4}ax-{}^{4}az$, pro quadrato F B. Similiter, si à quadrato B I. xx auferatur quadratum F I: $zz+{}^{2}zy+yy-{}^{2}az-{}^{2}ay+aa$, relinquetur quoque $xx-zz-{}^{2}zy-yy+{}^{2}az+{}^{2}ay-aa$, pro quadrato F B. Hinc, cum habeatur æquatio inter

inter quadratum F B dupliciter inventum, invenietur, ordinatâ æqualitate, $y \propto \frac{zx - zz - 2aa + 3az - 2ax}{z}$. Esto jam D N $\propto v$, & N B $\propto s$, eritque N F $\propto v - y$. E quibus rursus facile est invenire quantitatem y, suppositis quantitatibus v & s. Etenim si à quadrato N B. ss detraxero quadratum N F. $vv - 2vy + yy$, remanebit $ss - vv + 2vy - yy$, pro quadrato F B. Unde factâ æquatione inter hanc summam & posteriorem duarum præcedentium, habebitur $y \propto \frac{-ss + vv + xx - aa + 2az - zz}{-2a + 2z + 2v}$. Quibus jam inter se æquatis, & æquatione de xx ordinatâ, fiet

$$xx \propto \frac{\begin{array}{ll} +2zz\,x & +ssz \\ -6az & -vvz \\ +4aa & -2vzz \\ +2vz & -4aav \\ -4av & +6avz \\ & -z^3 \\ & -9aaz \\ & +6azz \\ & +4a^3 \end{array}}{z}$$

Porrò ut innotescant quantitates v & s, positâ $x \propto s$, multiplico $x - s \propto 0$ per $x - s \propto 0$, & fit $xx - 2sx + ss \propto 0$, seu $xx \propto 2sx - ss$, æquatio similis præcedenti. Unde, comparando secundum terminum unius cum secundo alterius, invenitur v, hoc est, D N $\propto \frac{zx - zz + 3az - 2aa}{z - 2a}$. Cui si addatur D I. $z - a$, habebitur N I $\propto \frac{zx}{z - 2a}$. Denique cum linea N M ad N Q vel F B eam habeat rationem, quam inter se habent lineæ refractionem vitri D B mensurantes; & quidem N M ad N Q vel F B sit, ut N I ad I B: relinquitur, ut d sit ad e, sicut $\frac{zx}{z - 2a}$ ad x. Et fit, multiplicando extremos, tum medios, $dx \propto \frac{ezx}{z - 2a}$. Unde, resolutâ æqualitate, invenitur H I seu $z \propto \frac{2ad}{d - e}$. E qua ablatis H D & K I seu $2a$, erit reliqua D K $\propto \frac{2ae}{d - e}$. Et manifestum est H I ad D K esse, ut $2ad$ ad $2ae$, vel ut d ad e. Id quod, dum de quolibet

 radio

radio A B ipsi D K parallelo perinde est intelligendum, nobis monstrat, beneficio vitri Hyperbolici D B, in quo H I ad D K eam obtinet rationem, quam *d* ad *e*, quæ est ejusdem vitri mensura refractionis, radios, qui in vitro D B existentes axi D K sunt paralleli, egrediendo superficiem ejus convexam D B ita flexum iri, ut egressi omnes coëant in punctum I.

PP *Cujus figura est A 3 Y 3, quæ undique est convexa; præterquam versùs A, ubi paululum concava existit, ita ut ipsa pariter atque præcedens cordi haud sit absimilis.*] Ubi etiam sciendum, ex positione punctorum H & F, quemadmodum Nobilissimus Hugenius notavit, contingere posse, ut versùs A convexa existat.

A R-

ARGUMENTUM TERTII LIBRI.

Postquam primo libro exposita sunt ea, quæ viam aperiunt ad Autoris Methodum, quâ in resolvendis & construendis Geometriæ Problematîs utitur, ibidemque simul ostensa est ratio construendi Problemata Plana, hoc est, quæ reduci possunt ad æquationes Quadratas, quæque rectarum linearum atque circuli circumferentiarum ope solvi possunt; accedit deinceps ad Solidorum & Linearium constructiones, hoc est, quæ ad æquationes Cubicas altiorúmve graduum adscendunt, & ad quorum constructiones, sectionibus Conicis, aliisque curvis lineis magis compositis uti necessarium est. Vbi observandum est, quòd, cum peccatum sit non leve apud Geometras, Problema Planum construere per Conica aut Linearia, hoc est, ipsum per improprium solvere genus, ita quoque sit cavendum ne in constructionem ejus adhibeamus lineam aliquam curvam, quæ magis sit composita, quàm ipsius natura admittit.

Quocirca, postquam secundo libro ostensum est, quo pacto curvæ lineæ, mediantibus æquationibus, quæ exhibent relationem, quam ipsarum puncta habent ad puncta lineæ rectæ, distingui possint in certa genera, atque exinde cognosci, quænam illarum magis sint composita; superest ut explicemus, quomodo sciri possit, utrum Problema aliquod sit vel Planum, vel Solidum, vel denique Lineare. Arguitur autem Problema Planum esse, cùm æquatio, ad quam perducitur, postquam ad simplicissimos terminos est reducta, atque ampliùs reduci nequit, Plana existit, hoc est, ut incognita quantitas ad quadratum adscendat, duásve habeat dimensiones, illaque per rectas lineas & circulorum circumferentias inveniri possit, quemadmodum primo libro fuit ostensum. At verò Solidum esse, quando æquatio, quæ ex eo deducitur, postquam ad simplicissimos terminos reducta est, talis existit, ut incognita quantitas ad Cubum aut Quadrato-quadratum, hoc est, ad 3 aut 4 dimensiones adscendat, ipsaque non nisi Conicam aliquam sectionem in constructionem adhibendo inveniri queat. Ac Lineare denique, ubi æquatio illa, postquam non ampliùs reducibilis est, plùs quàm Solida existit, & incognita quantitas ad 5 aut 6 dimensiones assurgit; vel etiam ad 7 aut 8; vel ad 9 aut 10 dimensiones, atque ita porrò in infinitum; ipsaque non nisi per curvam secundi, aut tertii, aut superioris denique generis, inveniri potest.

Ex quibus perspicuum est, quòd, etiamsi lineæ curvæ omnes, quæ motu aliquo ordinato describi possunt, in Geometriam sint recipiendæ, non ideo tamen indifferenter primâ, quæ fortè occurrat, ad constructionem cujusque Problematis uti liceat; sed eligendam esse semper simplicissimam, per quam possibile sit illud ipsum resolvere. Atque pro simplicissimis non habendas esse illas, quæ facillimè omnium describi possunt, sive quæ Problematis constructionem aut demonstrationem faciliorem reddunt; sed præsertim illas, quæ simplicissimi sunt generis, & ad quæsitam lineam determinandam inservire queunt. Ita ut, si peccatum sit in Geometria (quemadmodum supra diximus) Problema aliquod propositum construere per genus Linearum curvarum, magis compositum, quàm natura ejus permittit; contra quoque pro vitio habendum sit, si quis inutiliter desudet ad illud ipsum, per genus aliquod linearum simplicius, quàm natura ejus admittit, construendum.

Quapropter ut utrumque vitium evitari, ac unumquodque Problema ex proprio suo linearum genere solvi possit, postquam tam Problematis quàm ipsius curvæ cognitionem ab æquationum cognitione dependere est ostensum; hinc ad explicandam æquationum naturam progreditur, docens, unamquamque tot admittere posse diversas radices sive differentes valores quantitatis incognitæ, quot ipsa habet dimensiones; earumque interdum quasdam esse, quæ falsæ existunt vel nihilo sunt minores; interdum etiam, quæ planè imaginariæ; sicut etiam quâ ratione ipsæ æquationes producantur ex suis radicibus in se invicem ductis, ita ut per illas rursus sint divisibiles. Quas divisiones subinde utiles ostendit ad explorandum utrum certæ quædam quantitates sint æquationis radices nec ne, tum etiam ad ipsas indagandas, ac denique ad æquationem ad pauciores dimensiones reducendam. Deinde, postquam ostendit quot veræ & quot falsæ radices in unaquaque æquatione haberi possint, sicut etiam quo pacto falsæ reddantur veræ, & veræ falsæ, docet, quo pacto quælibet æquatio transmutari possit in aliam, ita ut radices ejus sint certâ quâdam quantitate majores vel minores, quàm radices prioris; & quidem quoties id fit, ut quædam ex illis sint veræ, quædam verò falsæ, quòd tum augendo veras, falsæ tantundem diminuantur, & contra. Quibus explicatis, tradit, quâ ratione, ad abbreviandam terminorum multitudinem, secundus terminus in qualibet æquatione ope prædictæ transmutationis tolli possit; ita ut in Quadratis æquationibus affectiones sub latere, in Cubicis sub quadrato, in Quadrato-quadratis sub cubo, &c. evanescant. Post hæc, quando quædam ex radicibus veræ sunt, quædam verò falsæ, (id quod ex signorum serie manifestum fit) declarat, facile esse ejusdem transmutationis beneficio efficere, ut radices omnes evadant

veræ.

veræ. Porrò, quemadmodum æquationes Cubicæ atque Quadrato-quadratæ omnes per eandem curvam lineam solvi possunt, utpote per aliquam trium Coni sectionum; & rursus Surdesolidæ atque Quadrato-cubicæ omnes per aliam curvam, quæ uno gradu magis est composita quàm sectiones Conicæ, atque sic ulteriùs; sic ut binæ priores juxta eandem regulam construi queant, sicut etiam binæ posteriores per aliam regulam: Attamen cum in his altioribus æquationibus ob multitudinem terminorum & variationem signorum + & — plurimæ inde (ut diximus) nascantur formulæ, regulaque illa valde foret difficilis ac longa: docet quo pacto æquationes illas attollere liceat, hoc est, Surdesolidas reducere ad Quadrato-cubicas, atque simul efficere, ut, si quæ terminorum loca in illis desint, ipsa repleta existant, ut tandem, si quædam ex radicibus falsæ, quædam autem veræ sint, ipsæ æquationes transmutari possint in alias, ubi radices omnes sint veræ, ipsæque secundùm eandem constructionis regulam inveniri possint. Præterea, quoniam æquationes frequenter fractionibus & surdis numeris involutæ occurrunt, aut ipsæ etiam prolixos numeros continent; quo fit, ut aut minùs expeditè resolvantur feliciterque explicentur, aut ut non nisi operosiorem in resolvendo industriam requirant: docet deinceps, quo pacto ad evitandas fractiones illas atque surdos numeros, sicut etiam ad transmutandos vastos illos numeros in faciliores, radices earum multiplicari aut dividi possint per quantitatem aliquam cognitam sive numerum. Id quod inservire insuper potest ad inveniendas radices proximas veris, alioquin irrationales; quemadmodum etiam ad reddendam quantitatem cognitam alicujus termini in æquatione æqualem cuidam alteri datæ. Cæterùm ne quid desit, quod ad intelligendas radices alicujus æquationis requiratur, ostendit ipsas interdum sive veras sive falsas solummodo imaginarias esse. Ita ut, licèt semper in qualibet æquatione tot talesque, quales supra diximus, imaginari liceat, nonnunquam tamen nullam reperiamus quantitatem, quæ aliquibus ex ipsis respondeat.

Postquam igitur ea, quæ ad æquationum recognitionem atque emendationem pertinent, exposita sunt, & quidem ex æquationum cognitione (ut supra admonuimus) dependeat quoque Problematum cognitio, ac prout æquatio est vel Quadrata, vel Cubica aut Quadrato-quadrata, vel Surdesolida aut Quadrato-cubica, vel plurium denique dimensionum, Problema, quod ad ipsam reducitur, dicatur vel Planum, vel Solidum, &c, illudque exinde construi queat vel per rectas lineas & Circulos, vel per Sectiones Conicas, vel per lineam curvam uno vel pluribus gradibus magis compositam: Hinc, priusquam ad æquationum resolutionem accedit, ac Problema propositum ex proprio suo Linearum genere solvit, tradit, quo pacto post trans-

transmutationes requisitas, quando Problema est Planum & æquatio ad Cubum aut Quadrato-quadratum adscendit, ipsa dividi atque reduci possit ad Quadratum, ita ut deinde regulæ ac circini beneficio, sicut primo libro monstratum fuit, resolvi queat; ac denique quid in genere observandum sit circa reliquas superiores æquationes. Ita ut post institutas illas divisiones, quando æquatio ad tres quatuorvé dimensiones assurgit ipsaque amplius dividi nequit, asserere liceat, Problema, quod ad æquationem illam perductum fuit, Solidum existere, nec inde minus vitium reputandum esse, illud per rectas lineas & circulares expedire velle, quàm adhibere Conicas sectiones in constructionem eorum, quæ per regulam & circinum solvi possunt.

Quibus explicatis, accingit se deinceps ad Solidorum Problematum constructionem, postquam reducta sunt ad æquationem trium aut quatuor dimensionum, & in æquatione secundus terminus est sublatus. Eâque ita præparatâ, docet, unicâ regulâ ope Parabolæ facilè ac expeditè posse construi. In quo sanè eximium atque summi ejus ingenii artificium elucet, à nullo (quòd sciam) ante vel excogitatum vel ostensum. Cæterùm ut hujus regulæ facilitas ac usus in Solidorum Problematum constructionibus eniteat, ipsam deinde, in solvendis nobilissimis binis illis; ac celebratis, nec non antiquitùs usque adeò agitatis Problematîs; altero scilicet de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis; altero autem de dividendo angulo in tres æquales partes, adhibet. Quæ breviùs expeditiusque, quàm ab aliquo hactenus ostensum est, solius Circuli & Parabolæ ope, scientificè atque Geometricâ ratione resolvit. Vbi tandem declarat (quod animadversione dignum): in Problematibus Solidis omnibus, postquam ad æquationem trium quatuórve dimensionum reducta sunt, non secus hanc regulam ad explicandas earum radices requiri, quàm quatenus ipsa adhibenda est ad inveniendas duas medias proportionales inter duas datas lineas; aut ad secandum datum angulum in tres æquales partes. Quandoquidem natura illarum non sinit, ut terminis simplicioribus, quàm per certa quædam Cuborum latera, quorum contentum cognoscitur, aut per subtensas quorundam arcuum, quorum triplum datum est, exprimantur; neque etiam per constructionem aliquam, quæ simul generalior & simplicior sit, determinentur.

Finitâ verò Solidorum Problematum constructione, aggreditur demum Surdesolidorum constructionem, hoc est, eorum quæ ad æquationem 5 aut 6 dimensionum reducuntur, & ad quarum constructionem curva linea adhibenda est, quæ uno gradu magis est composita quàm sectiones Conicæ.

Quam

Quam ut breviter ac unius regulæ beneficio resolvere doceat, observari vult ea, quæ supra monuimus, nimirum ut æquationes quinque dimensionum attollantur ad sex dimensiones, ipsæque demum, si opus est, transmutentur in alias, quarum radices omnes sint veræ. Qualem autem & quantum in hisce Problematis construendis Geometram se prodiderit Auctor, sanè si id ipsum ex superioribus perspicere cuipiam non contigerit, illud demum vel ex hac sola artificiosissima atque planè stupenda eorum constructione Geometrica, antea ne cogitata quidem, nedum inventa, latêre ipsum non potest. E quibus tandem colligere licet, quòd, postquam omnia Geometriæ Problemata ad unum quasi Problema revocata fuerint, quod est, ut quæratur tantummodo longitudo quarundam linearum rectarum, quæ alicujus æquationis sint radices, reductisque ad eandem constructionem, quæ ejusdem generis existunt, tradita simul sit via eadem resolvendi. Adeò ut nullum Problema tam difficile vel arduum, modò æquationem 5 aut 6 dimensionum non excedat, reperiri queat, quod hujus Geometriæ Methodo solvi seu construi non possit.

COMMENTARII

IN

LIBRUM TERTIUM.



ERùM *sæpe accidit, quòd quædam harum radicum sint falsæ, seu minores quàm nihil; ut, si supponatur x designare quoque defectum alicujus quantitatis, puta 5.*] hoc est, quòd x æquetur -5, vel $x+5$ sit æquale 0. A

Quod non ineptè explicatur per eum, qui plus debet quàm est solvendo; vel, cùm id, quod reliquatur, designamus per —. Quò referenda est jucunda atque ingeniosa quæstio, à laudatissimæ memoriæ, Mauritio, Principe Auriaco, atque Confœderati Belgii gubernatore, olim excogitata, quam Amplissimus & Prudentissimus Vir D. Henricus Stevinus, Simonis filius,

 Do-

Dominus in Alphen, paternarum virtutum hæres unicus, ex pluribus monumentis, ad vitam communem utilissimis, & publicâ luce dignissimis, quæ inter adversaria parentis possidet, pro sua liberalitate mihi communicavit.

A & B, societatem ineuntes, lucrati sunt 12 aureos; quorum A expendit aureos 5; B autem debet aureos 2, hoc est, habet — 2 aureos. Quæritur quantum utrique ex summa debeatur? Respondetur, solvendos esse à B ipsi A, 8 aureos, quamvis lucrum hìc esse sit manifestum.

Aliud exemplum de damno.

Personæ duæ A & B jacturam faciunt 12 aureorum, hoc est, habent — 12 aur. Cùm igitur A contribuit 5 aur., & B — 2 aur., manifestum fit, ipsi A ex natura quæstionis deberi — 20 aureos, & ipsi B + 8 aur., hoc est, B habebit 8 aureos, etiamsi jacturam factam esse constet.

Quamvis autem non sit usitatum, ut qui aliquid habet in bonis societatem ineat cum eo, qui minus habet quàm nihil; tamen casus occurrere possunt, in quibus hoc contingit. Exempli gratiâ: Duo mercatores Amstelodami habitantes habent quisque institorem suum Venetiis, & quia institoribus istis non satis fidunt, sciuntque inter ipsos esse inimicitias, mandant illis per literas, ut sibi invicem rationem reddant omnis pecuniæ, ad dominos suos pertinentis, quam penes se habebunt eo tempore, quo literas istas accipient; atque si unus fortè aliquid debeat, ut hoc ex alterius pecunia solvatur, & cum residuo ita mercaturam faciant, ut unus nihil emat vel vendat, nisi cum alterius consensu. Ipsi autem mercatores qui certò non sciunt, quid Venetiis eo tempore sint habituri, quo literæ istæ eò pervenient, talem inter se societatem ineunt, ut quisque lucrum aut damnum pro ratione pecuniæ, quam tunc habuerit, sit accepturus. Quibus positis, si contingat unum habere 5000 aureos, alium verò debere 2000 aureos, his 2000 ex alterius pecunia persolutis, tria tantùm aureorum millia pro mercibus emendis remanebunt; ex quibus si lucrum fiat duodecim millium aureorum, quod est quadruplum pecuniæ: sequitur ex vi societatis illum qui habuit 5 millia debere 20 millia lucrari,

&

& alium 8 millia amittere. Contra verò si damnum sit 12 millium, qui habuit 5 millia debet amittere 20 millia, quadruplum nempe suæ pecuniæ; alius autem 8 millia lucrari debet, propterea quòd à priori sumpserit 2 millia, quæ si emendis mercibus impensa fuissent, damnum 8 millium ei attulissent.

Porrò radices hæ falsæ non inconvenienter in Geometria explicantur retrogrediendo, hoc est, ut, quæ designantur per —, recedant, sicut illæ, quæ denotantur per +, progrediuntur. Cujus rei exemplum post videbitur.

Inservit autem earum cognitio ad inveniendas veras radices, quippe, falsis cognitis, æquationes facilè divisionis ope ad pauciores dimensiones reducuntur, ex iisque veræ eruuntur. Cujus rei exemplum in sequentibus habebitur.

Accedit & hoc, quòd, postquam tam falsæ quàm veræ radices alicujus æquationis fuerint inventæ, earum beneficio ad plenam totius quæstionis cognitionem atque solutionem perducamur, & casus nonnullos detegamus, de quibus nobis antea nihil certi constabat. Cujus rei exemplum sequentia itidem suppeditabunt.

Vnde liquidò constat, quòd Æquationis summa, quæ plures B *radices continet, dividi semper possit per binomium, quod compositum est ex quantitate incognita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem sit, aut plus valore alicujus ex falsis.*] Hoc enim ex Æquationis, quæ plures radices admittit, constitutione manifestum est: cum æquatio quævis producatur ex suis radicibus, in se invicem ductis. Quemadmodum ab Authore fuit explicatum. Unde fit, ut rursus per illas dividi possit, cum id, quod multiplicatione componitur, rursus divisione resolvatur.

Sic si ponatur $x \infty a$, hoc est, $x - a \infty 0$, & rursus $x \infty b$, hoc est, $x - b \infty 0$, & denique $x \infty c$, hoc est, $x - c \infty 0$, atque multiplicemus $x - a \infty 0$ per $x - b \infty 0$, & rursus productum per $x - c \infty 0$: exurget Æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & -a\,xx & +ab\,x & -abc \infty 0. \\ & -b & +bc & \\ & -c & +ac & \end{array}$$

Quæ dividi potest per $x - a \infty 0$, per $x - b \infty 0$, & per $x - c \infty 0$; sed non per x plus vel minus ullâ aliâ quantitate. Si autem eadem æquatio rursus multiplicetur per $x + d \infty 0$, (supponendo x desig-

 nare

nare quoque defectum alicujus quantitatis, utpote d, hoc est, x æquari $-d$) producetur Æquatio

$$x^4 \begin{array}{l} -a \\ -b \\ -c \\ +d \end{array} x^3 \begin{array}{l} +ab \\ +bc \\ +ac \\ -ad \\ -bd \\ -cd \end{array} xx \begin{array}{l} -abc \\ +abd \\ +bcd \\ +acd \end{array} x - abcd \propto 0.$$

Quæ dividi potest per $x - a \propto 0$, per $x - b \propto 0$, per $x - c \propto 0$, & per $x + d \propto 0$, & non per x plus vel minus ullâ aliâ quantitate.

C *Cujus divisionis ope dimensiones ejus in tantum diminuuntur.*] Sic dividendo æquationem præcedentem, quatuor dimensiones habentem, per $x + d \propto 0$, orietur Æquatio

$$x^3 \begin{array}{l} -a \\ -b \\ -c \end{array} xx \begin{array}{l} +ab \\ +bc \\ +ac \end{array} x - abc \propto 0.$$

In quâ incognita quantitas tres duntaxat dimensiones habet. Quâ rursus divisâ per $x - c \propto 0$, prodibit $xx \begin{array}{l} -a \\ -b \end{array} x + ab \propto 0$, æquatio duarum dimensionum. Quæ denuo per $x - b \propto 0$ divisa exhibet $x - a \propto 0$, æquationem simplicem.

Unde perspicere licet, quâ ratione, in qualibet Æquatione, plures radices habente, quantitas cognita secundi termini, æqualis sit summæ omnium radicum; & quantitas cognita tertii termini, æqualis summæ productorum ex singulis binis; & quantitas cognita quarti termini, æqualis summæ productorum ex singulis ternis, atque ita porrò; at verò quantitas cognita ultimi termini sive ipse ultimus terminus, æqualis producto ex omnibus.

Sic cum in æquatione $x^3 - 9xx + 26x - 24 \propto 0$ tres sint radices 2, 3, & 4, quæ designantur per a, b, & c: erit earum summa 9, quæ denotatur per $-a-b-c$, æqualis -9, quantitati cognitæ secundi termini $-9xx$. Summa autem productorum ex singulis binis 26, quæ denotatur per $+ab+bc+ac$, æqualis $+26$, quantitati cognitæ tertii termini $+26x$. Et productum ex ipsis tribus, 24, quod denotatur per $-abc$, æqualis -24, quantitati cognitæ ultimi termini, sive ipsi ultimo termino.

Eodem modo, si fuerit Æquatio talis: $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$, cujus radices sunt 2, 3, 4, & -5, atque designantur per $+a$, $+b$, $+c$, & $-d$: disponatur ipsa, ut termini,

ni, in quibus incognita quantitas x pares dimensiones habet, unam constituant æquationis partem, & reliqui alteram, hoc modo: $x^4 - 19xx - 120 \propto 4x^3 - 106x$. Eodem videlicet quo hæc: $x^4 + abxx - abcd \propto + ax^3 + abcx$. Præstat enim

$$\begin{array}{lll} +bc & +b & -abd \\ +ac & +c & -bcd \\ -ad & -d & -acd \\ -bd & & \\ -cd & & \end{array}$$

illam hìc ita considerare, ut ea, quæ proponuntur, meliùs explicentur: quoniam hoc pacto radices, earumque producta simul addita omnino cum quantitatibus cognitis terminorum æquationis, eorumque signis conveniunt. Et manifestum est, summam harum radicum efficere $+4$, & æqualem esse $+4$, quantitati cognitæ secundi termini $4x^3$. Deinde summam productorum ex singulis binis efficere -19, & æqualem esse -19, quantitati cognitæ tertii termini $19xx$. Postea summam productorum ex singulis ternis efficere -106, & æqualem esse -106, quantitati cognitæ quarti termini $106x$. Denique productum ex ipsis omnibus in se invicem ductis efficere -120, & æqualem esse -120, quantitati cognitæ ultimi termini, sive ipsi ultimo termino 120. Quæ porrò, quo pacto intelligenda sint de Æquationibus, in quibus non omnes termini extant, docebit appendix de Cubicarum Æquationum resolutione, quam hisce Commentariis subjunximus, ubi ista fusiùs pertractantur.

Ex quibus etiam cognoscitur, quot veræ & quot falsæ radices in unaquaque Æquatione haberi possint. Nimirum, tot in ea veras haberi posse; quot variationes reperiuntur signorum + & —; & tot falsas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa +, vel duo signa —, quæ se invicem sequuntur.] D
Notandum, hæc concernere æquationes, quæ producuntur ex suis radicibus, in se invicem ductis, quemadmodum pag. 69 & 70 est ostensum, quod & de cæteris regulis, ubi signorum + & — fit mentio, est observandum. Ut satis declarant priora verba: *Ex quibus etiam cognoscitur.* quæ horum verborum cum prioribus cohærentiam demonstrant: cum aliàs fieri posset, ut in qualibet Æquatione non tot radices haberentur, quot incognita quantitas habet

 dimen-

dimensiones; neque tot veræ, quot in ea reperiuntur variationes signorum + & —; aut tot falsæ, quot vicibus deprehenduntur duo signa + vel duo signa —, quæ se invicem sequantur.

Ut in æquatione $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$; quæ non producitur ex multiplicatione trium radicum, ut fit pag. 69 & 70, sed tantùm ex multiplicatione æquationis impossibilis $xx - 4x + 5 \infty 0$ per $x - 2 \infty 0$. Unde fit, quòd, licèt in æquatione proposita tres concipiantur veræ radices, tamen una tantùm ex illis sit realis, nimirum 2, & reliquæ duæ non nisi imaginariæ, quarum valor nullo modo comprehendi potest.

Quæ autem dicta sunt de æquationibus, quæ ex radicibus suis in se invicem ductis procreantur, non tantùm referenda sunt ad æquationes completas, hoc est, in quibus omnes termini extant, ut in exemplo ab Authore allato; sed etiam de incompletis, ubi unus vel plures termini desunt.

Ut si habeatur $z^3 \infty * - pz + q$, & scire velim, postquam multiplicatione productam supposuerim, quot admittat veras radices, & quot falsas; scribo z^3 8 $0zz + pz - q \infty 0$. Deinde supponendo $0zz$ esse primò signo + adfectum (perinde enim est, sive illum signo + sive signo — adfectum concipias): invenio, propter terminos $+z^3$ & $+0zz$, eodem signo affectos, statuendam esse unam falsam radicem: similiter, propter terminos $+0zz$ & $+pz$, eodem rursus signo adfectos, statuendam esse alteram falsam: ac denique, propter terminos $+px$ & $-q$, diversis signis notatos, ponendam esse unam veram radicem. Postea, supponendo secundum terminum signo — adfici: erit, propter terminos $+z^3$ & $-0zz$, diversis signis notatos, una vera radix: &, propter terminos $-0zz$ & $+pz$, qui diversa possident signa, altera vera: ac denique, propter terminos $+pz$ & $-q$, etiam diversis signis designatos, tertia radix vera. Adeò ut ex prima suppositione eliciam duas falsas & unam veram, at ex secunda tres veras. Quas sic designo: Verùm, quoniam, supponendo secundum terminum affe-

1.   2. ctum esse signo sive + sive —, certò scimus, nihil in
f   v proposita æquatione mutari: ideo, ut hæc regula mul-
f   v tiplicationem, quâ æquatio allata producta fuerit,
v —— v nos edoceat: radices illas inter se confero. Unde,

cum deprehendam duas tantùm esse, quæ consentiunt, easque veras; reliquas autem, quomodocunque collatio instituatur, ne-

quaquam

quaquam consonare: concludo æquationem propositam explicabilem tantùm esse de unica radice vera, & reliquas duas non nisi imaginarias existere; neque ipsam æquationem magis ex multiplicatione trium radicum productam esse, quàm superiorem, $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$.

Eodem modo, si habeatur $z^3 \propto * - pz - q$, seu z^3 8 $0zz + pz + q \propto 0$: invenio è priori suppositione tres falsas radices; è posteriori verò duas veras & unam falsam. Quibus inter se col-
1. 2. latis, ut consensus earum appareat, invenio, æquatio-
f v nem propositam unam tantùm admittere radicem,
f v nempe falsam; duasque reliquas esse imaginarias: ac
f —— f proinde æquationem non posse procreari multiplicatione trium radicum.

Similiter, si fuerit $z^3 \propto * + pz + q$, seu z^3 8 $0zz - pz - q \propto 0$; quoniam è priori suppositione invenio duas falsas & unam veram
1. 2. radicem; & è posteriori duas itidem falsas & unam
f [crossed lines] v veram: cognosco, æquationem propositam, multi-
v [crossed lines] f plicatione trium radicum, quarum duæ sunt falsæ &
f —— f una vera, produci posse.

Non secus, si habeatur $z^3 \propto * + pz - q$ seu z^3 8 $0zz - pz + q \propto 0$; video in priori suppositione reperiri duas veras radices,
1. 2. cum una falsa, atque in posteriori similiter duas ve-
f [crossed lines] v ras, & unam falsam: adeo ut concedendum sit, ipsam
v [crossed lines] f procreari posse ex multiplicatione trium radicum, qua-
v —— v rum duæ sunt veræ, & tertia falsa. Idem de aliis sentiendum. Ubi notandum, radices veras & falsas alicujus æquationis semper esse reales, seu existentes, hoc est, quantitatem aliquam aut defectum quantitatis designantes, quarum valor Arithmeticè vel Geometricè exprimi potest; imaginarias verò non item. Ut in æquatione $xx - 4x + 5 \propto 0$. Quamvis enim in ea duas nobis imaginari possimus radices; tamen nulla iis respondet quantitas; nec, quocunque tandem modo vel augeantur, vel diminuantur, aliæ quàm imaginariæ fieri possunt. Quod sanè nemini mirum videbitur, modò ex iis, quæ pag. 165 explicuimus, intellexerit, æquationem propositam esse impossibilem; neque ullam veram nec falsam radicem admittere, adeoque nec quantitatem aliquam, quæ ipsis respondeat, inveniri posse. Nisi velis, radices ejus esse $x \propto 2 + \sqrt{-1}$, & $x \propto 2 - \sqrt{-1}$, quarum certè

valor

valor nullo modo comprehendi potest. Non magis quàm si illarum quantitatem Geometricè invenire velimus. Quandoquidem in figura p.7, describendo ex centro N, intervallo lineæ N L $\propto 2$, (utpote æqualis semissi ipsius 4, quantitatis cognitæ secundi termini) circulum L Q R, faciendoque rectam L M $\propto \sqrt{5}$ (utpote æqualem radici quadratæ ultimi termini 5); circulus descriptus L Q R neutiquam secare aut tangere potest rectam M R, quæ ipsi L M ducitur perpendicularis, ad duas in ea radices designandas.

Idem de altioribus æquationibus est intelligendum pag. 85, 86, & 87, cùm Circulus centro E descriptus Parabolam F A G secare aut tangere nequit; ut & pag. 99, cùm Circulus C N Q curvam A C N neutiquam vel tangit vel secat.

E *Nimirum mutando signa omnia + & —, quæ in 2do, 4to, 6to, aliisve locis reperiuntur, qui per numeros pares designantur; reliquis 1^mi^, 3^tii^, 5^ti^, similiumque locorum, qui per impares numeros designantur, non mutatis.*] Quæ locum quoque habent in æquationibus incompletis, ubi quidam ex imparibus locis desunt, qui cyphrâ sunt supplendi. Ut si fuerit $x^3 \propto * - 8x - 24$ seu $x^3\ 8\ 0xx + 8x + 24 \propto 0$, mutando signa + & — secundi & quarti loci in contraria, fit æquatio $x^3\ 8\ 0xx + 8x - 24 \propto 0$, seu $x^3 \propto * - 8x + 24$, cujus radix est $x \propto 2$, unde radix prioris fit $x \propto -2$.

Eodem modo si sit $x^3 \propto * 1201x + 14400$, seu $x^3\ 8\ 0xx - 1201x - 14400 \propto 0$, mutatis signis 2^di^ & 4^ti^ loci, fiet æquatio $x^3\ 8\ 0xx - 1201x + 14400 \propto 0$, seu $x^3 \propto * 1201x - 14400$, cujus radices sunt $x \propto 25$, & $x \propto \sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, nec non $x \propto -\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$. Unde radices prioris erunt $x \propto -25$, & $x \propto 12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$, nec non $x \propto 12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Et sic de aliis.

F *Unde si scribamus summam præcedentem, substituendo ubique y pro x, invenietur*

$$
\begin{array}{rrrrr}
y^4 - 12y^3 & + 54yy & - 108y & + 81 & \\
+ 4y^3 & - 36yy & + 108y & - 108 & \\
 & - 19yy & + 114y & - 171 & \\
 & & - 106y & + 318 & \\
 & & & - 120 & \\
\hline
y^4 - 8y^3 & - 1yy & + 8y & * & \propto 0
\end{array}
$$

, vel $y^3 - 8yy - 1y + 8 \propto 0$. *Ubi vera radix, quæ erat 5, jam est 8, propter ternarium*

narium ipsi additum.] Notandum hic est, quòd, dum, augendo ternario veram radicem æquationis propositæ $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0$, in æquationem incidimus, tres tantùm dimensiones habentem, cujus ideo non nisi tres sunt radices, numerus 3, quo vera radix æquationis propositæ est aucta, sit æqualis alicui ex falsis radicibus, ut liquet ex iis, quæ ab Autore p. 72 paulò post explicantur. Ita, quoniam, diminuendo ternario veras radices æquationis $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, incidimus in æquationem $y^4 + 8y^3 - 1yy - 8y * \infty 0$, vel $y^3 + 8yy - 1y - 8 \infty 0$, innotescit, unam ex veris radicibus esse 3. Et sic de aliis.

Nimirum, diminuendo veras radices, quantitate cognitâ secundi termini divisâ per numerum dimensionum primi, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo + & alter signo —.] Vel etiam hoc modo: *Nimirum, diminuendo quantitatem cognitam secundi termini divisam per numerum dimensionum primi, unaquâque verarum radicum, si unus ex hisce duobus terminis notatus fuerit signo + & alter signo —.* Ut ad tollendum secundum terminum Æquationis $x^4 - {}^{2}a x^3 \begin{matrix} + {}^{2}aa \\ - cc \end{matrix} xx - {}^{2}a^3 x + a^4 \infty 0$, divido $2a$ per 4, & provenit $\frac{1}{2}a$: unde faciendo $\frac{1}{2}a - x \infty \zeta$, hoc est, $\frac{1}{2}a - \zeta \infty x$, scribendum est

$+\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{2}a^3\zeta + \frac{3}{2}aa\zeta\zeta - 2a\zeta^3 + \zeta^4$ pro x^4

& $-\frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{2}a^3\zeta - 3aa\zeta\zeta + 2a\zeta^3$ pro $-{}^{2}a\,x^3$

& $+\frac{1}{2}a^4 - 2a^3\zeta + 2aa\zeta\zeta$ pro $+{}^{2}aaxx$

& $-\frac{1}{4}aacc + acc\zeta - cc\zeta\zeta$ pro $-ccxx$

& $-a^4 + {}^{2}a^3\zeta$ pro $-{}^{2}a^3x$

tum $+a^4$, & exsurget

$$\begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 + a^3\zeta + \frac{1}{2}aa\zeta\zeta \\ -\frac{1}{4}aacc + acc \quad - cc \end{matrix} \quad * \quad + \zeta^4 \infty 0,$$ æquatio,

secundo carens termino, & ab illa Autoris differens tantùm in quarto termino, qui hìc per + denotatur, & illìc per —. Unde fit, ut per ea, quæ pag. 70 sunt ostensa, æquationes hæ in eo tantùm inter se differant, quòd falsæ illius æquales sint veris hujus, & contra, atque ita radicum mutua sit reciprocatio. Quod in aliis quoque evenire reperietur.

Ubi porrò operæ pretium est considerare, quòd, tollendo secundum

cundum terminum Æquationis $x^4 + 2ax^3 \begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix} xx - 2accx - aacc \infty 0$, (quæ quidem invenitur, cùm pro linea CE in quæstione pagin. 83 ponitur x) in eandem incidamus Æquationem, quam invenimus tollendo secundum terminum præcedentis $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix} xx - 2a^3 x + a^4 \infty 0$, quæ ab illa omnino est diversa, resultans ex investigatione lineæ DF.

Deinde animadversione dignum est, quòd hâc sublatione secundi termini Æquationes pagin. 6 & 7 in faciliores sic transmutentur, ut earum radices statim se prodant, nec aliâ regulâ ad eas inveniendas opùs esse videatur. Etenim, tollendo secundum terminum æquationis $zz \infty az + bb$ seu $zz - az - bb \infty 0$, si dividatur a per 2, fit $\frac{1}{2}a$, ac ponatur

$z - \frac{1}{2}a \infty x$, sive $z \infty x + \frac{1}{2}a$,

atque pro zz reponatur $xx + ax + \frac{1}{4}aa$,
nec non pro $-az$ $\quad -ax - \frac{1}{2}aa$,
& addatur $\quad - bb$:

resultabit æquatio hæc $xx * - \frac{1}{4}aa - bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa + bb$, cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Unde sequitur radicem prioris æquationis $zz \infty az + bb$ fore $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Quæ radices, cum vera tùm falsa etiam inveniuntur tollendo secundum terminum, hoc pacto: ponatur

$\frac{1}{2}a - z \infty x$, seu $z \infty \frac{1}{2}a - x$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a - x \\ \frac{1}{2}a - x \\ \hline -\frac{1}{2}ax + xx \\ \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ax \qquad \\ \hline \end{array}$$

& scribatur $\frac{1}{4}aa - ax + xx$ pro zz,
atque $-\frac{1}{2}aa + ax$ pro $-az$,
tum $- bb$.

Et emerget Æquatio $-\frac{1}{4}aa - bb * + xx \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa + bb$. eadem quippe, quæ invenitur, ponendo $z \infty \frac{1}{2}a + x$ (quod similiter in reliquis sequentibus quadratis Æquationibus locum habet), & fit, ut supra, $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; ac proinde $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Eodem

Eodem modo, quia auferendo secundum terminum Æquationis $yy \infty -ay+bb$, seu $yy+ay-bb \infty 0$, ponitur $y+\frac{1}{2}a \infty z$, sive $y \infty z-\frac{1}{2}a$,

atque pro yy scribitur $zz-az+\frac{1}{4}aa$,
& pro $-ay$ $+az-\frac{1}{2}aa$,
atque deinde $-bb$:

prodibit æquatio $zz*-\frac{1}{4}aa-bb \infty 0$, vel $zz \infty \frac{1}{4}aa+bb$, cujus radix est $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, vel $z \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$: hinc radix prioris erit $y \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}-\frac{1}{2}a$, vel $y \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}-\frac{1}{2}a$. Quæ quidem falsa & vera radix invenitur quoque tollendo secundum terminum Æquationis hâc ratione: videlicet, supponendo y designare etiam defectum alicujus quantitatis, quæ major sit quàm $\frac{1}{2}a$, Exempli causâ, $y \infty -\frac{1}{2}a-z$,

& substituendo $\frac{1}{4}aa+az+zz$ loco yy,
& $-\frac{1}{2}aa-az$ loco $+ay$,
tum $-bb$:

unde fit Æquatio $-\frac{1}{4}aa-bb*+zz \infty 0$, vel $zz \infty \frac{1}{4}aa+bb$, cujus radix est $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, vel $z \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; atque adeò $y \infty -\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, vel $y \infty -\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$. ut ante. Quem modum, tollendi secundum terminum, tanquam diversum ab eo, qui ab Authore pag. 73 est ostensus, notare potes, cùm primus & secundus terminus eodem signo + vel − sunt adfecti.

Similiter, cum ad tollendum secundum terminum Æquationis $zz \infty az-bb$, vel $zz-az+bb \infty 0$, ponendum sit

$z-\frac{1}{2}a \infty x$, vel $z \infty x+\frac{1}{2}a$,
& scribendum $xx+ax+\frac{1}{4}aa$ pro zz,
& $-ax-\frac{1}{2}aa$ pro $-az$,
& addendum $+bb$:

proveniet Æquatio $xx*-\frac{1}{4}aa+bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa-bb$, cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$. Et fit radix prioris $z \infty \frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$. Quæ radix utraque vera est, & alio item modo inveniri potest, si nimirum ponatur $\frac{1}{2}a-z \infty x$ sive $z \infty \frac{1}{2}a-x$, & substituatur

$\frac{1}{4}aa - ax + xx$ in locum zz,
& $-\frac{1}{2}aa + ax$ in locum $-az$,
& addatur $+bb$:

exsurget æquatio $-\frac{1}{4}aa + bb * + xx \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Et fit prioris radix $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. ut supra.

Denique, quoniam tollendo secundum terminum Æquationis $zz \infty -az - bb$, vel $zz + az + bb \infty 0$, ponendum est $z + \frac{1}{2}a \infty x$ sive $z \infty x - \frac{1}{2}a$, & subrogandum

$xx - ax + \frac{1}{4}aa$ in locum zz,
& $+ax - \frac{1}{2}aa$ in locum $+az$,
atque addendum $+bb$:

producetur æquatio $xx * - \frac{1}{4}aa + bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Unde radix prioris fit $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$, vel $z \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$. Quæ utraque hoc casu est falsa, & hâc etiam viâ inveniri potest, nimirum supponendo z designare quoque defectum alicujus quantitatis, quæ major sit quàm $\frac{1}{2}a$, utpote ponendo $z \infty -\frac{1}{2}a - y$, & substituendo

$+\frac{1}{4}aa + ay + yy$ loco zz,
& $-\frac{1}{2}aa - ay$ loco $+az$,
tum addendo $+bb$,

unde provenit æquatio $-\frac{1}{4}aa + bb * + yy \infty 0$, vel $yy \infty \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix est $y \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $y \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$; atque adeò $z \infty -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. ut ante.

Eâdem ratione tolletur secundus terminus reliquarum Æquationum quadratarum pag. 6 & 7, quæ similiter hâc operatione eò reducentur, ut ad ipsarum radices inveniendas hæc regula sufficere videatur.

Intellige Æquationes, in quibus z^3 æquatur duobus aut

Verùm enimverò animadvertendum est, quòd, sicut Æquatio quælibet Quadrata composita sublatione secundi termini ad aliam reducitur, in qua duo tantùm sunt termini, sic nulla Cubica esse possit, pluribus terminis constans, (ex quibus 13 casus confici pos-

ei possunt) quæ hâc ratione non reducatur semper ad aliquam trium sequentium formularum: *tribus terminis, per +, aut per + & —, simul junctis.*

$$z^3 \infty * - pz + q$$
$$z^3 \infty * + pz + q$$
$$z^3 \infty * + pz - q.$$

Idem de Quadrato-quadratis Æquationibus, quæ ex pluribus terminis sunt compositæ, quarumque 42 diversi modi extare possunt, est intelligendum. Cum enim per regulam pag. 79 expositam ad Cubicas reduci queant, quarum radices duas habent dimensiones & termini omnes sunt completi, sic nulla itidem earum esse potest, quæ hâc sublatione non reducatur ad aliquam trium prædictarum formularum.

Sic postquam Æquatio Quadrato-quadrata $1\,zz + 8\,c - 26\,z - 68\,R - 84 \infty 0$ per dictam regulam reducta est ad Cubicam $x^6 - 100\,x^4 + 2900\,xx - 10000 \infty 0$, in qua omnes termini sunt completi, tollitur secundus terminus, hoc modo: Divisis 100 per 3, fit $33\frac{1}{3}$. Unde ponendo $xx - 33\frac{1}{3} \infty yy$, sive $xx \infty yy + 33\frac{1}{3}$, scribendum est

$y^6 + 100\,y^4 + 3333\frac{1}{3}\,yy + 37037\frac{1}{27}$ pro x^6,
& $- 100\,y^4 - 6666\frac{2}{3}\,yy - 111111\frac{1}{9}$ pro $- 100\,x^4$,
& $+ 2900\,yy + 96666\frac{2}{3}$ pro $2900\,xx$,
tum $- 10000$:

fietque æquatio $y^6 * - 433\frac{1}{3}\,yy + 12592\frac{16}{27} \infty 0$, vel $y^6 \infty * + 433\frac{1}{3}\,yy - 12592\frac{16}{27}$, tertiæ formulæ. Ubi notandum, dimensionum numerum primi termini x^6 tantùm pro 3 haberi, cum non sit x^5, x^3, & x in tota summa. Id quod similiter in sublatione secundi termini æquationum Quadratarum, quarum radices duas dimensiones habent, est notandum. Quòd si verò ponatur $33\frac{1}{3} - xx \infty yy$, hoc est, $xx \infty 33\frac{1}{3} - yy$, prodibit Æquatio $y^6 \infty * + 433\frac{1}{3}\,yy + 12592\frac{16}{27}$, secundæ formulæ, à præcedenti tantùm differens termino quarto, qui ibi signo + adficitur, hic verò signo —. Unde fit, quòd hujus æquationis falsæ radices æquales sint veris illius, & contra.

Ad augendum valorem verarum radicum, & ad faciendum, ut radices omnes veræ evadant, sciendum est, nos uti posse exemplo ab Authore proposito pag. 74: nimirum, $x^6 + n\,x^5 - 6\,nn\,x^4 + 36\,n^3\,x^3 - 216\,n^4\,xx + 1296\,n^5\,x - 7776\,n^6 \infty 0$, tanquam regulâ seu canone, ad quantitatem, quâ veræ radices augendæ H.

 sunt,

ſunt, inveniendam, ſicut annotavit Vir Nobiliſſimus D. Gothofridus ab Haeſtrecht, Mathematum cultor eximius, hujusque ſcientiæ peritiſſimus. Si enim, exempli causâ, propoſita ſit Æquatio $x^6 + ax^5 + bx^4 - cx^3 - dxx + ex + f \infty 0$, oportet, neglectis omnibus terminis, in quibus ſigna + & — diverſa ſunt ab iis, quæ in canone reperiuntur, nempe b, c, & f, conſiderare tantùm omnes reliquos, ut a, d, & e. Utpote $+ ax^5$, quia in canone habetur $+ nx^5$; & $- dxx$, quia in canone $- 216n^4xx$; nec non $+ ex$, quia in canone $+ 1296n^5x$. Qui quidem ſeorſim conſiderandi ſunt, & quærenda quantitas n, quæ non ſit minor quàm a, quia in canone habetur n, ubi in data Æquatione eſt a: & cujus quadrato-quadratum non ſit minus quàm $\frac{1}{216}d$, quia in canone habetur $216n^4$, ubi in data Æquatione eſt d: nec non cujus ſurſolidum non ſit minus quàm $\frac{1}{1296}e$, quia in canone habetur $1296n^5$, ubi in data Æquatione eſt e. Quantitate n ſic inventâ, manifeſtè ex ipſa operatione demonſtratur, ſi ponatur $y - 6n \infty x$, inventum iri Æquationem, in quâ nulla radix falſa eſſe poteſt, ut in exemplo Authoris. Quod Autori tam facilè viſum fuit, ut id explicare neglexerit.

1 Ad multiplicationem radicum alicujus æquationis addatur ſequens exemplum. Proponatur æquatio $y^6 \infty * + 435\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27}$, cujus loco alia invenienda ſit, cujus termini per numeros integros exprimantur. Suppoſito igitur $zz \infty \frac{3}{10}yy$, ſcribatur æquatio, hoc modo:

Et multiplicetur per numeros proportionales $y^6 \; 8 \; 0y^4 - 435\frac{1}{3}yy - 12592\frac{16}{27} \infty 0$.
$1. \quad \frac{3}{10}. \quad \frac{9}{100}. \quad \frac{27}{1000}.$

fietque Æquatio $z^6 \; 8 \; 0z^4 - 39zz - 340 \infty 0$, vel $z^6 \infty * + 39zz + 340$, cujus radix zz ad præcedentis radicem yy eſt, ut 3 ad 10.

Quæ radicum multiplicatio inſervire etiam poteſt inveniendis radicibus proximè veris, cùm ipſæ ſunt irrationales. Ut, ad inveniendam veram radicem æquationis $y^3 \infty 200y + 400$ (quæ irrationalis eſt) quàm proximè, ita ut differentia milleſimâ parte unitatis minor ſit: ſuppoſito $z \infty 1000y$,

ſcribo $y^3 \; 8 \; 0yy - 200y - 400 \infty 0$,
& multiplico per $1. \; 1000. \; 1000000. \; 1000000000.$

& exſurget æquatio $z^3 \; 8 \; 0zz - 200000000z - 400000000000 \infty 0$, vel $z^3 * - 200000000z \infty 400000000000$, cujus radix z præcedentis radicis y eſt millecupla. Quocirca eliciendo radicem

ex hac

ex hac æquatione, methodo à Vieta tradita in tractatu de Numerosa Potestatum resolutione, invenietur z major quàm 15052, & minor quàm 15053. Quibus divisis per 1000 (quia præcedentis radicem multiplicavimus per 1000), fiet y major quàm $15\frac{52}{1000}$, & minor quàm $15\frac{53}{1000}$. adeò ut differentia inter hanc utramque inventam & veram millesimâ parte unitatis minor sit. Quod erat inveniendum. Porrò quoniam æquatio proposita $y^3 \infty 200 y + 400$ duas adhuc admittit falsas radices, quæ similiter sunt irrationales, quia ipsa per $y +$ vel $-$ nullo numero ultimum terminum dividente dividi potest, possunt ex eâdem ratione inveniri, mutato tantùm signo $+$ in $-$. Quarum equidem major excedet $13\frac{10}{1000}$, & minor deficiet à $2\frac{42}{1000}$, componentes simul veram inventam $15\frac{52}{1000}$. Cæterùm, sicut æquationes ope multiplicationis à fractionibus liberantur, atque ad faciliores reducuntur, ita quoque interdum licet ipsas beneficio divisionis, quando tam prolixos numeros continent, ut earum resolutio non nisi operosiorem industriam requirat, in faciliores transmutare. Ut si fuerit æquatio $x^3 \infty * + 203125 x + 23437500$, & ejus loco alia desideretur, quæ minoribus numeris exprimatur, dividenda est ipsa per numeros proportionales 1. 125. 15625. 1953125.

hoc pacto: $\frac{x^3}{1.} \;\; \frac{*\,0\,xx}{125.} \;\; \frac{-\,203125\,x}{15625.} \;\; \frac{-\,23437500 \;\infty\; 0}{1953125.}$,

& prodibit æquatio $y^3 * 0 yy - 13 y - 12 \infty 0$, vel $y^3 \infty * 13 y + 12$, cujus radices sunt $+ 4$, $- 3$, & $- 1$, quibus per 125 multiplicatis (quoniam prioris radices per 125 divisimus) exsurgent radices prioris $+ 500$, $- 375$, & $- 125$.

Ubi porrò notandum, quòd, postquam æquatio quælibet à fractionibus aut surdis numeris est liberata, atque in faciliorem transmutata, fieri non possit, ut ulla ex hujus radicibus, sive falsis, sive veris, sit numerus aliquis fractus. Quemadmodum facilè ex 7mo Elementorum libro demonstrari potest. Adeò ut, si illa deinde sicut pag. 77 est ostensum dividi nequeat, concedendum sit, nullam ex radicibus sive falsis sive veris numero explicari posse, sed omnes esse irrationales.

Quibus ita constitutis, ut pateat quo pacto hæ radices surdis numeris sint exprimendæ, visum fuit ea, quæ ab ingeniosissimo Huddenio nostro circa hæc excogitata sunt, in medium adducere.

Hinc ut investigetur, quo pacto, exempli causâ, radices æquationis

tionis $zz + az - bb \infty 0$, quæ per $z +$ vel $- b \infty 0$ dividi nequit, per surdas quantitates exprimi possint: suppono primùm z esse æqualis simplici alicui quantitati surdæ, utputa, $\sqrt{x}$, & fit, $z - \sqrt{x} \infty 0$. Quam, ut ad æquationem quadratam ejusdem formæ perducam, in qua secundus terminus est rationalis, multiplicare debeo per $z + y + \sqrt{x} \infty 0$. Sed quoniam sic non producitur æquatio, in qua etiam tertius terminus rationalis est, concludo radices æquationis propositæ hoc modo non posse denotari sive exprimi. Idem fit supponendo $z \infty - \sqrt{x}$.

Quocirca statuendo nunc $z \infty y + \sqrt{x}$ seu $z - y - \sqrt{x} \infty 0$, oportet ipsam, ut ad æquationem quadratam ascendat, in qua rursus secundus terminus sit rationalis, multiplicare per $z - y + \sqrt{x} \infty 0$, & fit $zz - 2yz + \begin{matrix} yy \\ -x \end{matrix} \infty 0$. æquatio ejusdem formæ cum allata, & in qua item tertius terminus rationalis est. Hinc comparando secundum terminum unius cum secundo alterius invenio $-2y \infty - a$, hoc est, $y \infty \frac{1}{2}a$. Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat $yy - x \infty - bb$. In qua si in locum yy subrogetur $\frac{1}{4}aa$, habebo $\frac{1}{4}aa + bb \infty x$. Ac proinde cum pro quæsitis radicibus supposuerimus $z \infty y + \sqrt{x}$, & $z \infty y - \sqrt{x}$, erunt ipsæ: $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Eodem modo si investigare velimus, quo pacto radices æquationis indivisibilis $yy + ay - bb \infty 0$ per quantitates surdas exprimi queant, statuatur (neglectâ suppositione ipsius $y \infty 8 \sqrt{x}$) $y \infty - z + \sqrt{x}$ seu $y + z - \sqrt{x} \infty 0$, eaque, ut ad æquationem quadratam assurgat, in qua rursus secundus terminus sit rationalis, multiplicetur per $y + z + \sqrt{x} \infty 0$, & fit $yy + 2zy + \begin{matrix} zz \\ -x \end{matrix} \infty 0$. æquatio ejusdem formæ cum allata, & in qua etiam tertius terminus est rationalis. Unde comparando secundum terminum hujus cum secundo illius invenitur $z \infty \frac{1}{2}a$. Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat $x \infty \frac{1}{4}aa + bb$. Atque adeò, cum pro quæsitis radicibus supposuerimus $y \infty - z + \sqrt{x}$, & $y \infty - z - \sqrt{x}$, erunt ipsæ: $y \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & $y \infty - \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Similiter, investigando num radices æquationis $zz - az + bb \infty 0$, quam per $z +$ vel $- b \infty 0$ dividere non licet, per surdas quan-

quantitates exprimi queant, invenitur z exprimi posse per $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & per $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Eodem modo procedatur in altioribus æquationibus.

E quibus perspicuum fit, hac ratione inveniri quoque simplicissimos surdos numeros, quibus radices hasce exprimere licet, atque ideo hinc etiam constare, quæ circa hæc à D^no^ des Cartes pag. 95 referuntur, nimirum: quòd natura harum radicum non permittat, ut simplicioribus terminis exprimantur.

Ubi tandem etiam est advertendum, quòd, quantò partes è quibus hæ radices componuntur pauciores numero existunt, tantò etiam quæsitum faciliùs obtineri possit, ac proinde in altioribus æquationibus conducere secundum terminum tollere, ita ut deinde, si res bene inspiciatur, perpauci casus superfuturi sint.

Supponendum est $y \propto x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, *deinde verò scribendum* K

$y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \propto 0$.] Etenim positâ $y \propto x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ sive $y \propto \frac{ax}{b}\sqrt{3}$; erit $x \propto \frac{by}{a\sqrt{3}}$, & $xx \propto \frac{bbyy}{3aa}$, & $x^3 \propto \frac{b^3y^3}{3a^3\sqrt{3}}$. Quæ si in æquatione substituantur, habebitur $\frac{b^3y^3}{3a^3\sqrt{3}} * - \frac{b^3y}{a\sqrt{3}} + c^3 \propto 0$; hoc est, communi multiplicatore $3a^3\sqrt{3}$, fiet $b^3y^3 * - 3aab^3y + 3a^3c^3\sqrt{3} \propto 0$: ac proinde communi divisore b^3, erit $y^3 * - 3aay - \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \propto 0$. Quod erat demonstrandum.

Etenim aut quantitas cognita hujus binomii erit radix quæsita; aut Æquatio, per ipsam divisa, ad duas dimensiones erit reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro sunt ostensa, inveniri queat. L] Sic æquatio superior pag. 76: $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$ divisa per binomium $x - 2 \propto 0$ dat æquationem impossibilem $xx - 4x + 5 \propto 0$, & fit radix quæsita 2. Sic æquatio $x^3 \propto 1201x + 14400$ seu $x^3 * 0xx - 1201x - 14400 \propto 0$ divisa per $x + 25 \propto 0$ dat æquationem $xx - 25x - 576 \propto 0$ seu $xx \propto 25x + 576$, quæ juxta præcepta pag. 6 & 7 resoluta ostendit radicem quæsitam esse $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$.

Vide hic post in Appendice de Cubicarum æquationum resolutione.

Huc etiam refer reductionem Æquationum Quadratarum, cùm Problema est Simplex.

Reductio Æquationum Quadratarum, cùm Problema est Simplex.

Ut si, verbi gratiá, habeatur æquatio $xx \infty ax \begin{matrix}+ab\\+bb\end{matrix}$ seu $xx - ax \begin{matrix}-ab\\-bb\end{matrix} \infty 0$, poterit ea, inventis ipsius $ab+bb$ ultimi termini divisoribus 1, b, $a+b$, & $ab+bb$, dividi per binomium $x+b \infty 0$, oriturque $x-a-b \infty 0$. Id quod ostendit, radicem quæsitam esse $\infty a+b$, & Problema, quod ad hanc æquationem reducitur, esse Simplex, hoc est, construi posse ducendo tantùm rectas lineas.

Eodem modo, si fuerit $xx \infty \frac{-aax+aa}{a+1}$ seu $xx+\frac{aax}{a+1}-\frac{aa}{a+1} \infty 0$, quoniam, ad tollendas fractiones, multiplicatâ primùm

$$xx+\frac{aax}{a+1}-\frac{aa}{a+1} \infty 0$$

per quantitates proportionales $1.\quad a+1.\quad aa+2a+1,$

fit æquatio $yy+aay-a^3-aa \infty 0,$

atque hâc, ut ante, divisâ per binomium $y+aa+a \infty 0$, oritur $y-a \infty 0$: liquet, Problema, quod huc pertinet, non præter simplex existere, & y esse ∞a, adeoque $x \infty \frac{a}{a+1}$.

Haud secus Problema simplex erit, si obtineatur æquatio $xx \infty \frac{aax-aac}{a-c}$ seu $xx-\frac{aax}{a-c}+\frac{aac}{a-c} \infty 0$. Multiplicatâ enim eâ per proportionales 1, $a-c$, & $aa-2ac+cc$, fit $yy-aay+a^3c-aacc \infty 0$. Quæ dividi potest per binomium $y-ac \infty 0$, oriturque $y-aa+ac \infty 0$. Unde y invenitur ∞ac, aut etiam $y \infty aa-ac$: ac proinde $x \infty \frac{ac}{a-c}$, aut etiam $x \infty a$. Quorum duorum valorum ipsius x non nisi unus tantùm quæsito Problematis respondet, licèt uterque æquationi propositæ satisfaciat. Quod ipsum ex Problemate non adeò difficile semper est dignoscere.

Cæterùm Problema aliquod non præter simplex existere, vel hinc quoque inferre licet, cùm, operando juxta regulas pag. 6 & 7, quantitas, quæ per $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ aut per $\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$ exprimitur, omnino per extractionem radicis inveniri potest; ita ut ipsa sit rationalis, quemadmodum in allatis exemplis contingit. Ubi porrò observare licèt, quòd, in primo & secundo casu earundem æquationum, postquam ultimus terminus per bb fuerit designatus, aut is inventione mediæ proportionalis (sicut pag. 2 docetur) ad hanc formam fuerit reductus, nil ad ulteriorem ipsarum

rum constructionem faciendum relinquatur, quod non per solarum rectarum linearum ductum absolvatur. Vide Exercitationum nostrarum Mathematicarum librum 2, in quo de Simplicium Problematum constructione ex professo agitur.

Ubi demum observatu dignum, in genere æquationes omnes numericas trium dictarum formularum omnino per solas rectas lineas construi posse, in quibus a & bb non nisi numeros designant sive integros sive fractos; aut etiam eas, in quibus hæ quantitates non per diversas literas denotatæ reperiuntur, etiamsi ipsis integri aut fracti numeri præfigantur.

Ubi notandum, me ipsius y^6 dimensiones tantùm pro tribus dimensionibus habere, cum non reperiatur y^5, nec y^3, nec y in tota summa.] Potest enim pro æquatione M

$$y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \propto 0$$ substitui æquatio hæc:

$$z^3 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} zz \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} z \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \propto 0.$$ nimirum, supponendo $z \propto yy$,

atque subrogando zz in locum y^4, & z^3 in locum y^6; ita ut, postquam innotuerit valor radicis z, opùs tantùm sit, ex hoc invento valore extrahere radicem quadratam, ad habendum valorem radicis y.

Nec aliter operandum, si habeatur $x^4 \propto -axx + bb$. Possumus enim ipsius x^4 dimensiones solummodo pro duabus dimensionibus habere, & scribere $yy \propto -ay + bb$, supponendo $y \propto xx$, & $yy \propto x^4$, eritque radix ejus $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: adeoque radix $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Vide pag. 6.

Quin & si fuerit $z^6 \propto * 39zz + 340$, supponendo $x \propto zz$ potest pro ea reponi $x^3 \propto * 39x + 340$, atque adeò ipsius z^6 dimensiones tantùm pro tribus dimensionibus haberi.

Eodem modo, si fuerit $x^8 \propto * + 10x^4 + 16xx - 9$, atque z supponatur $\propto xx$: poterit ejus loco scribi $z^4 \propto * + 10zz + 16z - 9$, ita ut ipsius x^8 dimensiones tantùm pro 4^or dimensionibus habeantur. Et sic de aliis.

At verò si nullum inveniatur binomium, quod ita totam Æquationis propositæ summam dividere possit, certum est, Problema, quod ab ea dependet, esse solidum.] Sic quoniam æqua- N

 tio

tio $x^3 \propto 300x + 1200$, seu $x^3 \ast 0xx - 300x - 1200 \propto 0$, dividi nequit per x plus vel minus aliquo numero, ultimum terminum 1200 absque fractione dividente, quin aliquid post divisionem supersit, certum est, Problema, quod ad illam reducitur, esse Solidum. Quo autem pacto inveniantur numeri omnes, datum numerum absque fractione dividentes, manifestum fiet, ubi ex Stifelio exposuero rationem, inveniendi omnes cujusque numeri partes aliquotas, quod unum idemque est.

Etenim, si numerus par fuerit, dividendus est per 2, & divisor reservandus; tum rursus, si quotiens est par, dividatur similiter per 2, & divisor reservetur; illudque tam diu continuetur, donec perveniatur ad numerum imparem. Quòd si verò numerus est impar, vel divisione jam factâ ad numerum imparem sit perventum, dividi debet per 3, si fieri potest, idque tam diu continuandum, donec proveniat quotiens, qui per 3 ampliùs dividi non possit. Tum eadem divisio tentanda per 5, 7, 11, 13, 17, 19, aliúmve numerum primum, sive nullam partem aliquotam præter unitatem habentem. Suffecerit autem id tentasse, donec ad dati numeri radicem quadratam, sive veram, sive veræ proximam, perventum fuerit: cum ulteriores divisiones supervacaneæ sint habendæ. Iam verò quomodo ex reservatis numeris partes aliquotæ, seu divisores omnes dati cujusque numeri, inveniantur, sequentia exempla manifestabunt. Etenim ad inveniendos divisores omnes numeri 462, divido 462 per 2, & fiunt 231. Hinc 2 reservo, & 231 divido per 3, fiuntque 77, & 3 reservo. Postea divisis 77 per 7, fiunt 11, & 7 reservo. Denique divido 11 per 11, & fit 1, & 11 reservo. Unde numeri reservati erunt 2, 3, 7, & 11. E quibus divisores omnes seu partes aliquotæ sic inveniantur.

1

2 . 3

6

7. 14. 21. 42.

11. 22. 33. 66. 77. 154. 231. 462.

Primò ducito 2 in 3, & producentur 6. Deinde 7 in 1, 2, 3, & 6, & fient 7, 14, 21, 42. Denique 11 in 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, & 42, fientque 11, 22, 33, 66, 77, 154, 231, 462. Et erunt divisores omnes 1. 2. 3. 6. 7. 14. 21. 42. 11. 22. 33. 66. 77. 154. 231.

&

& 462. Ubi notandum, ex ductu ultimi numeri reservati 11 in ultimum productum inventum 42 produci datum numerum 462; adeò ut, ad inveniendum dati alicujus numeri partes omnes aliquotas, opùs non sit hosce duos numeros in se invicem ducere, si tantùm de illis quæstio fuerit, & non de divisoribus. Eodem modo, numerus 2310 divisores habebit sequentes.

1 / 2310 / 2	11 / 1155 / 3	3 / 385 / 5	77 / 7	11 / 11	1

1

2 . 3

6

5. 10. 15. 30

7. 14. 21. 42. 35. 70. 105. 210

11. 22. 33. 66. 55. 110. 165. 330. 77. 154. 231. 462. 385. 770. 1155. 2310.

Similiter divisores numeri 1200 erunt

1200 / 2	600 / 2	1 / 300 / 2	1 / 150 / 2	1 / 75 / 3	25 / 5	5 / 5	1

1

2 . 2

4

2 . 8

2 . 16

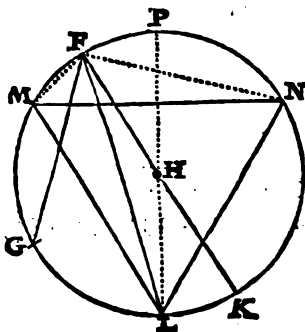
3. 6. 12. 24. 48.

5. 10. 20. 40. 80. 15. 30. 60. 120. 240.

5. 25. 50. 100. 200. 400. 75. 150. 300. 600. 1200.

Verùm enimverò cum allata ratio inveniendi Binomium, per quod Æquationis propositæ summa dividenda est, ad investigandum, utrum Problema, quod ad æquationem illam est perductum, sit Solidum, an verò Planum, & si Planum sit, ipsa ad ejusdem æquationis radices inveniendas valde videatur prolixa; præsertim cùm ultimus terminus plures admittit divisores: sciendum est, quosdam ex iis seligi posse, è quibus si componatur binomium, per quod æquationis divisio non succedat, certi esse possimus Problema ab ea dependens Solidum existere.

Sic cum in ſuperiori æquatione $x^3 \infty * 300\,x + 1200$, vel $x^3\ 8\ 0\,xx - 300\,x - 1200 \infty 0$, triginta ſint numeri, ultimum terminum 1200 abſque fractione dividentes, atque hinc diviſio vel ſexagies eſſet tentanda, antequam certò conſtaret, Problema eſſe Solidum; ſciendum eſt non opùs eſſe niſi tres vel quatuor ex iis conſiderare, ut 4, 15, & 20, atque reliquos inſuper habere. Quemadmodum ex ſequentibus fiet manifeſtum.



Etenim ſi numerus 300 vocetur p, & numerus 1200 vocetur q, & juxta id, quod docetur pag. 93, circulus deſcribatur F G N, cujus radius F H ſit 10, utpote $\infty \sqrt{\frac{1}{3}p}$, & in eo recta inſcribatur F G ∞ 12, quippe $\infty \frac{3q}{p}$, ac deinde ſinguli arcus F M G, F N G, & G L K in tres æquales partes dividantur per rectas F M, F N, & F L: deſignabunt duæ rectæ F M & F N quantitatem utriuſque falſæ radicis, & F L quantitatem veræ. Adeò ut, ad eligendos diviſores, qui ad æquationem dividendam utiles cenſeri poſſunt, opùs tantùm ſit conſiderare eos, qui inventis lineis F M, F N, & F L quàm proximè accedunt, nullâ reliquorum habitâ ratione: adeoque diviſionem tentandam tantùm eſſe per $x + 4 \infty 0$, vel per $x + 15 \infty 0$, vel per $x - 20 \infty 0$. Ac proinde cum tentatâ diviſione aliquid ſuperſit: ſequitur, Problema, quod ad æquationem propoſitam perducitur, eſſe Solidum, nec ullam radicem ſive veram ſive falſam, quæ numero exprimi queat, admittere; ſed omnes eſſe irrationales, earumque valorem eſſe exprimendam per quantitatem linearum dictarum F M, F N, & F L.

Eodem modo ſi habeatur $x^3 \infty * + 300\,x - 1200$, vel $x^3\ 8\ 0\,xx - 300\,x + 1200 \infty 0$: deſcripto rurſus circulo F G N, cujus radius F H ſit 10 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in quo inſcriptâ rectâ F G ∞ 12 ſeu $\frac{3q}{p}$, ſi ſecentur ſinguli arcus F M G, F N G, & G L K in tres æquales partes, deſignabunt F M, F N utramque veram radicem, & F L falſam. Adeò ut, cum diviſio æquationis $x^3\ 8\ 0\,xx - 300\,x$

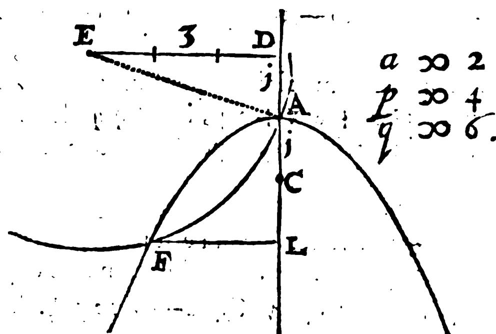
$+ 1200$

$+ 1200 \propto 0$ tentata per $x - 400$, per $x - 1500$, & per $x + 200 \propto 0$ non succedat; concedendum sit illam admittere nullam radicem, nec veram nec falsam, quæ numero exprimi queat; sed omnes esse irrationales: adeoque earum valorem non aliter quàm per quantitatem linearum FM, FN, & FL esse exprimendum, & Problema, unde allata æquatio deducta fuit, Solidum esse.

Sed licet hæc aliter adhuc & quidem generaliùs efficere.

Ut si habeatur Æquatio primæ formulæ $x^3 \propto * - 8x + 24$, cujus investigandæ sint radices. Quoniam igitur ultimus terminus 24 octo admittit divisores, qui sunt 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24: hinc octies fortè divisio tentanda esset antequam radicem propositæ Æquationis sic invenire possemus. Verùm sufficit semel vel bis id experiri, cum certi quidam ex inventis hisce divisoribus seligi possint, per quos si divisio non succedat, certi reddamur radicem esse irrationalem.

Cogitetur Æquatio allata hujus esse formæ $x^3 \propto * - 2, 4x + 4, 6$, eadem nempe quæ $x^3 \propto * - a\,p\,x + a\,a\,q$; in qua a pro unitate assumpta valet 2, p 4, & q 6. Quâ Æquatione juxta regulam pag. 85, 86, 87, & 88 resolutâ, invenitur radicem quæsi-



tam designari per lineam F L. Postea exploretur quisnam ex inventis divisoribus huic lineæ proximè accedat, ut seligantur per quos divisio sit tentanda, neglectis reliquis. Postquam autem compertum fuerit nullum ex ipsis propiùs huic lineæ congruere quàm

quàm divisorem 2, & quidem Æquationem propositam $x^3 \; 8 \; 0 \; xx + 8x - 24 \propto 0$ dividi posse per $x - 2 \propto 0$, & prodire Æquationem impossibilem $xx + 2x + 12 \propto 0$, quæ per $x +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum dividente, ulteriùs dividi nequit: sequitur radicem quæsitam fore 2, neque ullam aliam extare, cum reliquæ duæ in hac formula semper sint imaginariæ.

Nec aliter fit, si fuerit $x^3 \propto * - 8x - 24$, quæ est Æquatio unam habens radicem falsam, nempe 2, & duas imaginarias: cum producatur ex multiplicatione Æquationis impossibilis $xx - 2x + 12 \propto 0$ per $x + 2 \propto 0$. Ubi observandum, quòd, licèt D. des Cartes ejusmodi Æquationis formulam inter Cubicas non reposuerit, sed tantùm eas, in quibus bini posteriores termini per $+$ aut per $+$ & $-$ juncti sunt, ipsa tamen nihilominus eodem modo, quo præcedens, resolvi, atque radix ejus exprimi possit. quod & de æquatione quadrata $zz \propto - az - bb \propto 0$ supra monuimus. Hinc si fuerit $x^3 \propto - 3x - 10$, seu $x^3 \; 8 \; 0 \; xx + 3x + 10 \propto 0$, quæ per $x +$ aliquo numero ultimum terminum dividente dividi nequit: sequitur radicem ejus esse irrationalem, eamque juxta primam Cardani regulam, pagin. 93 descriptam, sic exprimi $x \propto -\sqrt{C.\, \sqrt{26} + 5} + \sqrt{C.\, \sqrt{26} - 5}$. nempe mutatis tantùm signis $+$ & $-$ utriusque partis. Idem intellige de Æquationibus $x^3 \propto - 8$, aut $x^3 \propto - 10$, quarum radices sunt $x \propto - 2$, & $x \propto -\sqrt{C.\, 10}$.

Eodem modo operandum erit in Æquatione primi casus secundæ formulæ, puta $x^3 \propto + 8x + 24$, ubi $\frac{1}{4}qq$ est majus quàm $\frac{1}{27}p^3$. Quoniam enim dividi nequit per $x - 4 \propto 0$, qui divisor ad quantitatem radicis proximè accedit, non opùs est ut ulteriùs progrediamur, siquidem binæ reliquæ radices hujus casus semper sunt imaginariæ. Quare radix quæsita erit irrationalis, quæ juxta secundam Cardani regulam, pag. 93 exhibitam, sic exprimetur: $x \propto \sqrt{C.\, 12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}} + \sqrt{C.\, 12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}}$. Adeò ut dicatur composita ex duabus lineis, quarum una est prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & lineam $12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}$, & altera prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & lineam $12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}$. E quibus perspicua fiunt illa, quæ habentur pag. 92 & 95. Notandum verò, me potuisse quidem accipere a pro 1, ita ut p futura fuisset 8, & q 24:

quo-

quoniam hìc liberum est assumere pro unitate, qualem libuerit, quantitatem; verùm quia praxis aliquo modo accommodatior visa est, si pro a ponatur 2, non 1, malui illam hypothesin huic posthabere.

Ubi porrò advertendum, radicibus Æquationum ita implicatis existentibus, simplicius censendum esse, earundem habitudinem ex sola Æquationum constitutione innuere, quàm ipsas prædicto modo exprimere. Ut in hac ultima $x^3 \propto + 8x + 24$, dicendo x talem esse, ut in se Cubicè ducta tantundem faciat ac si per 8 multiplicetur, ac deinde ei quod fit addatur 24. Quippe sic ejus habitudinem longè simpliciùs concipere valemus, quàm si eandem hoc modo exprimeremus: $x \propto \sqrt{C.\,12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}} + \sqrt{C.\,12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}}$. Id quod similiter de Æquatione $x^3 \propto -3x + 10$ potest intelligi, cujus radix juxta primam Cardani regulam sic exprimitur $x \propto \sqrt{C.\sqrt{26}+5} - \sqrt{C.\sqrt{26}-5}$: cum illius habitudinem, quam ex Æquationis constitutione induit, multò faciliùs concipiamus, prout eandem in se Cubicè ductam idem producere intelligimus, quod 10 minus ipsius triplo. Et sic de aliis.

Porrò si habeatur $x^4 \propto * + 10xx + 40x + 16$; suppositâ $a \propto 2$, erit $aa \propto 4$, & $a^3 \propto 8$, fietque æquatio $x^4 \propto * + z, 5xx + 4, 10x + 8, 2$, ejusdem formæ cum $x^4 \propto * \, a'pxx + a'a'qx + a^{3'}r$, in qua p idem valet quod 5, q idem quod 10, & r idem quod 2. Deinde inventis numeris ultimum terminum 16 dividentibus, utpote 1, 2, 4, 8, & 16, æquationem resolvo juxta regulam ab Authore pag. 85, 86, 87, & 88 ostensam, eritque vera radix FL, & falsa GK. Denique, examinando ordine divisores inventos, explorando quinam ex ipsis ab inventis radicibus FL & GK quàm minimùm discedant; invenio divisionem solummodo tentandam esse per $x - 4 \propto 0$, aut per $x + 1 \propto 0$. Ac proinde cum neutra harum divisionum succedat, concludo, Æquationem propositam, unam admittere veram radicem, & unam falsam, quarum utraque est irrationalis; ac reliquas duas esse imaginarias. *Vide figuram paginâ versâ.*

Haud secus si fuerit æquatio $x^4 \propto * - 60xx + 7400x + 36000$, cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 60, 72,

75, 80, 90, 96, 100, 120, 125, 144, 150, 160, 180, 200, 225, 240, 250, 288, 300, 360, 375, 400, 450, 480, 500, 600, 720, 750, 800, 900, 1000, 1125, 1200, 1140, 1500, 1800, 2000, 2250, 2400, 3000, 3600, 4000, 4500, 6000, 7200, 9000, 12000, 18000, & 36000, fingo a esse 10, ac proinde æquationem propositam esse hanc $x^4 \infty * - 1\text{ø},6\,xx + 1\text{øø},74\,x + 1\text{øøø},36$, hoc est, ipsam esse hujus formæ $x^4 \infty * - a\,p\,xx + a\,a\,q\,x + a^3 r$; ita ut, secto latere recto a in 10 æquales partes, p earundem faciat 6, q 74, & r 36. Quâ deinde juxta regulam pag. 85, 86, 87 & 88 constructâ, invenio ipsam sicut antecedentem non nisi unam veram radicem admittere, utputa FL, & unam falsam, utpote KG, quarum longitudo ad partes lateris recti ceu scalæ relata ostendit divisionem æquationis propositæ solummodo tentandam esse per $x - 20 \infty 0$ aut per $x + 5 \infty 0$. Hinc cum ipsa dividi possit per $x - 20 \infty 0$ & oriatur æquatio $x^3 + 20xx + 460x + 1800 \infty 0$, non autem per $x + 5 \infty 0$ quin aliquid post divisionem relinquatur: concludo veram ejus radicem esse 20, & falsam esse irrationalem, cujus valor seu quantitas, dum per longitudinem

nem

nem solius inventæ rectæ K G accuratè exhibetur, propter hujus cum reliquis asymmetriam, numero tantùm quadantenus ex ipsius ad hasce relatione innotescit. Eodem modo investigari queunt radices æquationum, plures pauciorésve dimensiones habentium.

Cæterùm cum radicum inventio res magni sit momenti, atque eorum, circa quæ Algebra versatur, præcipua: alium modum seligendi divisores, qui ad æquationem dividendam utiles judicari possunt, subjungam, quem communicavit Iacobus à Waessenaer, Ultrajectinus, Geometra peritissimus, atque in hac Cartesiana Methodo versatissimus.

Inveniantur radices æquationis $x^3 - 1xx - 30x + 72 \infty 0$, cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Unde æquatio proposita dividenda est per x 8 1, vel per x 8 2, &c. Verùm cum complures hìc sint divisores, & tantùm tres hìc esse possint, per quos divisio fieri queat: constat, divisionem pluries esse tentandam, antequam fortè incideremus in aliquem, qui quæsito satisfacere posset. Quapropter ut seligantur illi, quorum præ cæteris est ratio habenda: augendæ sunt radices veræ certâ quâdam quantitate, hoc est, transmutanda est æquatio in aliam, cujus veræ radices sint dato numero majores. Commodissimum autem fuerit ad id assumere 1 vel 10: quia cùm multiplicatio alicujus numeri instituitur per 1, vel 10, numerus ille sic non mutatur, sed ipsi tantùm in fine cyphra adjungitur. Unde ponendo $y \infty x + 1$, sive $x \infty y - 1$, exsurget æquatio $y^3 - 4yy - 25y + 100 \infty 0$, cujus veræ radices unitate majores sunt veris prioris & falsæ contra unitate minores falsis. Quia verò in hac æquatione, numeri ultimum terminum 100 dividentes, sunt 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100: ideo dividenda foret per y 8 1, vel per y 8 2, vel per y 8 4, &c. quod cum non minorem quàm in superiori requirat laborem, oportet similiter ex iis quosdam seligere. Atque adeò cum cognoscatur, ad inveniendas veras radices, divisores hujus unitate debere esse majores divisoribus prioris æquationis, facilè constat, si ex inventis 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 aliqui idonei sunt ad posteriorem æquationem dividendam, aliquos etiam inter eosdem unitate diminutos, nempe inter 0, 1', 3', 4, 9', 19, 24', 49, 99, ad priorem æquationem dividendam utiles futuros. Qui ut inveniantur, conferendi sunt iidem divisores

1′, 3′, 4′, 9′, 19, 24′, 49, 99 cum supra inventis 1′, 2, 3′, 4′, 6′, 8, 9′, 12, 18, 24′, 36, 72, sumendique qui sibi invicem respondent, cæteris neglectis. Ac proinde cum hìc quinque sint qui concordant, nempe 1, 3, 4, 9, & 24, oportet, ad inveniendas veras radices, divisionem tentare per $x - 1$, per $x - 3$, per $x - 4$, per $x - 9$, & per $x - 24$; aut, ad obtinendas falsas, quæ quidem hâc auctione in tantum sunt diminutæ, per $x + 2$, per $x + 3$, & per $x + 6$. Quòd si verò id nimis longum videatur, quandoquidem æquatio quælibet tot tantùm radices ad summum habere potest, quot incognita quantitas habet dimensiones, ita ut hìc non ultra tres inveniantur: poterimus veras radices prioris æquationis unitate diminuere, supponendo videlicet $z \infty x - 1$, sive $x \infty z + 1$, & prodibit æquatio $z^3 + 2zz - 29z + 42 \infty 0$. Cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, qui unitate aucti efficiunt divisores 2, 3′, 4′, 7, 8, 15, 22, 43. Iam verò cum ex prioribus quinque 1, 3′, 4′, 9, 24 bini tantùm sint, utpote 3 & 4, qui cum binis horum consentiunt, eò deventum est, ut ad inveniendas veras radices opùs tantùm sit divisionem tentare per $x - 3$, vel per $x - 4$; aut, ad obtinendas falsas, quæ hâc diminutione verarum unitate sunt auctæ, per $x + 2$, & per $x + 6$. Hinc, cum $x^3 - 1xx - 30x + 72 \infty 0$ dividi possit per $x - 3 \infty 0$, atque oriatur $xx + 2x - 24 \infty 0$, cujus radices sunt $+4$, & -6; vel etiam $x^3 - 1xx - 30x + 72 \infty 0$ dividi possit per $x - 4 \infty 0$, & proveniat $xx + 3x - 18 \infty 0$, cujus radices sunt $+3$ & -6; vel denique $x^3 - 1xx - 30x + 72 \infty 0$ dividi possit per $x + 6 \infty 0$, & resultet $xx - 7x + 12 \infty 0$, cujus radices sunt $+4$, & $+3$; sequitur, radices propositæ æquationis esse $+3$, $+4$, & -6. Ubi notandum, in hujusmodi praxi seligendi divisores, non opùs esse totius operationis, quæ ad inveniendas posteriores hasce æquationes requiritur, rationem habere; sed tantùm quatenus ad ultimum terminum inveniendum inservire possit. Ad quem obtinendum, quando prioris radices unitate augentur vel diminuuntur, numeri in æquatione dati solummodo addendi sunt vel subtrahendi, prout signa + & − indicant. At verò cùm per denarium aliúmve numerum augentur vel diminuuntur, tum priùs cyphræ ipsis in fine apponendæ sunt, vel ipsi per datos numeros sunt multiplicandi, antequam addantur vel à se invicem subtrahantur. quod usus edocebit.

Ubi

Ubi tandem notandum, ad seligendos divisores divisionesque superfluas evitandas, spectari etiam posse ea, quæ Vir Clarissimus D. de Beaune de limitibus Æquationis, intra quos ejus radices cadunt, tradidit. Qualia ista in 2do tractatu continentur, qui unà cùm primo de natura & constitutione Æquationum huic editioni nunc accessit.

Unde cognoscitur, valorem ipsius z *esse* $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, *vel* $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.] utpote qui elicitur ex priori æquatione $zz-z\sqrt{aa+cc}+\frac{3}{4}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}\propto 0$. Quæ quidem primi vel tertii casus esse potest æquationum Quadratarum pag. 6 & 7. Primi videlicet, si $\frac{5}{4}aa$ est minus quàm cc, quo casu $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ designabit verum valorem radicis z, & $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, falsum valorem, juxta ea quæ pag. 162 annotavimus. At tertii, si $\frac{5}{4}aa$ majus fuerit quàm cc, quo casu utraque radix est vera. Ubi porrò notandum, æquationem posteriorem $zz+z\sqrt{aa+cc}+\frac{3}{4}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}\propto 0$, postquam $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc$ non fuerit minus quàm $\frac{3}{4}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, sive, quod idem est, cc non minus quàm $8aa$, duas admittere falsas radices, quemadmodum p. 165 monuimus, quæ sunt $-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, & $-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$. Ita ut quatuor sint radices binarum præcedentium æquationum sive æquationis

$$z^4 * \begin{matrix}+\frac{1}{2}aa\\-cc\end{matrix}\,zz\,\begin{matrix}-a^3\\-acc\end{matrix}\,z\,\begin{matrix}+\frac{5}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{matrix}\propto 0,$$

nempe $z\propto \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

$z\propto \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

$z\propto -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

$z\propto -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Et quandoquidem supra feceramus $z+\frac{1}{2}a\propto x$, *innotescit,*

quantitatem x, ad quam cognoscendam omnes hasce operationes instituimus, esse

$+\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.]$

vel $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

vel $\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

vel denique $\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

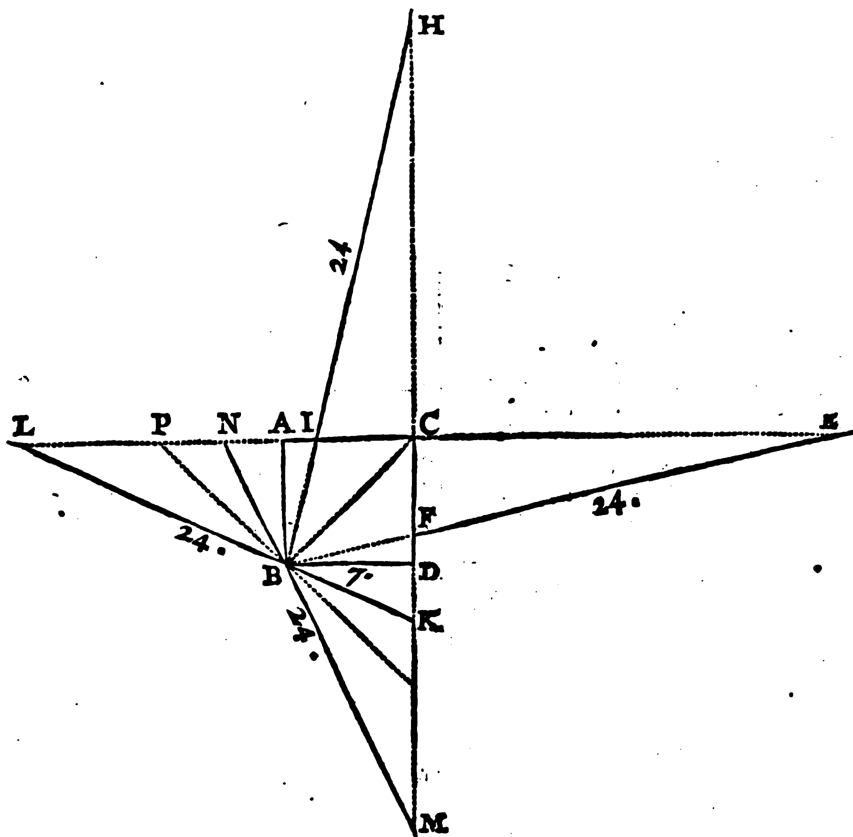
Ut liquet ex iis, quæ proximè annotata sunt.

Q *Vbi per præcedentes regulas cognoscitur, radicem ejus, quæ est longitudo lineæ D F, esse* $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.]$ Ubi patet, quòd ex quatuor radicibus supra expositis, æquationis $x^4-2ax^3\begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix}xx-2a^3x+a^4\infty 0$, quarum binæ priores semper veræ sunt, seu plus quàm o, D. des Cartes eam tantùm sibi delegerit, quæ ad quantitatem lineæ D F, pro qua invenienda x posuerat designandam inservire possit, & reliquam veram $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ neglexerit, eò quòd lineam ipsâ D C majorem exhibeat.

Vide figuram p. 83.

Potest autem hìc eleganter ostendi usus, quem radices tam falsæ quàm veræ alicujus æquationis in Geometria habent, ac quo pacto earum ope ad plenam alicujus Problematis cognitionem perducamur; sic ut nullus casus existat, quem non detegamus, atque ejusdem determinationem non inveniamus. Sciendum enim est, quòd, quemadmodum veræ radices in Arithmetica (ut supra indicavimus) quantitatem aliquam designant, majorem quàm nihil, & falsæ defectum alicujus quantitatis, seu quantò nihilo sunt minores, sic in Geometria veræ radices eas communiter lineas designent, sensu illo, quales inveniendæ proponuntur, at verò falsæ, sensu contrario. Adeò ut si veræ accipiantur in data recta indefinita, à dato puncto versùs aliquod in ea punctum designatum, progrediendo, falsæ in ipsa ab eodem puncto sumi debeant versùs contrarium punctum, regrediendo.

Ut,

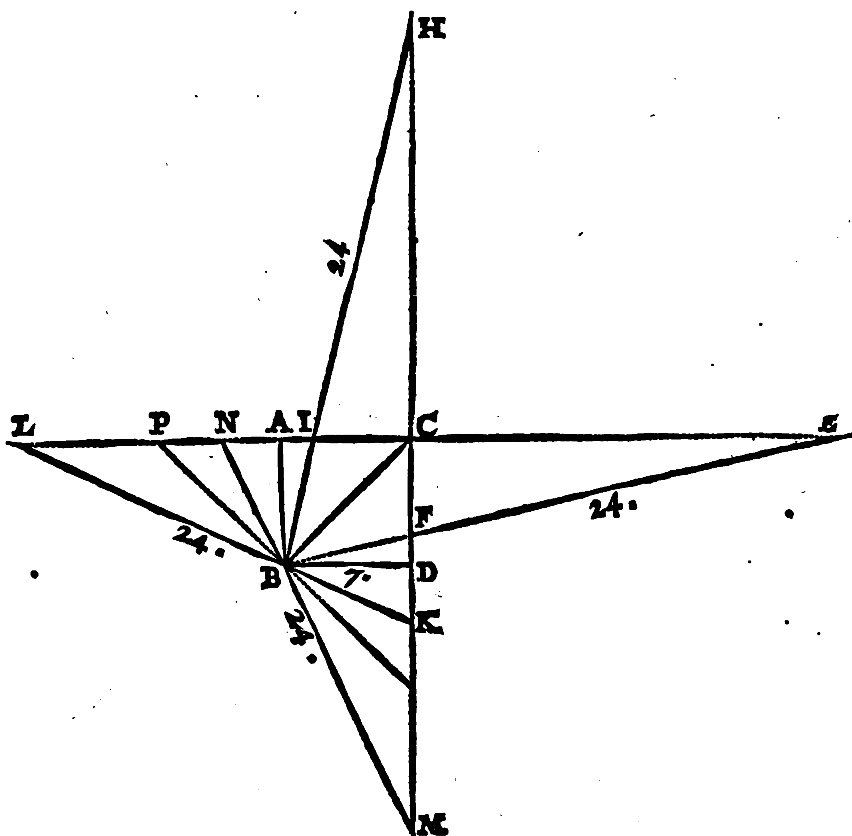


Ut, quoniam in exposito Problemate, ad inveniendam quantitatem lineæ D F ∞ x, sive ad cognoscendum quanta sumi debeat longitudo à puncto D versùs C, ut fiant quæ quæruntur, inventa est æquatio

$x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix} +2aa \\ -cc \end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$, quæ duas admittit veras radices, utpote

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

&



& $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}}$: hinc à puncto D versùs C ſumendæ ſunt duæ lineæ, quarum una eſt æqualis

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}},$$

deſignans lineam D F, & altera æqualis

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}},$$

deſignans lineam D H: deinde à puncto B ad inventa puncta F & H

F & H ducendæ rectæ B F, B H, quarum hæc secet latus A C in I, & illa idem latus productum in E: Eritque quælibet interceptarum F E, I H æqualis datæ c. Porrò, quoniam dicta æquatio duas quoque admittit falsas radices, quæ sunt

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

& $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$: ideo à puncto D, versùs alteram partem, sumendæ sunt duæ lineæ, quarum una est æqualis

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

designans lineam D K, & altera æqualis

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

designans lineam D M. Quibus sic inventis, si ab inventis punctis K & M per punctum B ducantur lineæ occurrentes ipsi A C productæ versùs A: erit similiter unaquæque interceptarum K L, M N ipsi c æqualis.

Unde apparet, quòd, etiamsi de sola D F invenienda quæstio fuerit, nec quicquam de interceptis I H, K L, & M N cogitaverimus, ipsæ tamen ultro post æquationis resolutionem sese offerant. Ita ut constet, per harum radicum cognitionem nos deduci in notitiam uniuscujusque casus, quem Problema propositum potest admittere; nec non, quo pacto quilibet ex ipsis est construendus ac determinandus.

Ut, quoniam, ad explicandas radices æquationis

$zz + z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto 0$, requiritur, ut $\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc$ non sit minus quàm $\tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, sive cc non minus quàm $8\,aa$ (sicut dictum est pag. 309): Sic quoque ad ducendas interceptas K L, M N opùs est, ut cc non sit minus quàm $8\,aa$. Quemadmodum facilè demonstrari potest, ducendo tantùm rectam O P ipsi B C perpendicularem: siquidem recta O P rectarum omnium, quæ per punctum B duci possunt, minima existit. Cujus quadratum cum duplum sit quadrati ex P C, & hoc duplum quadrati ex B C, & hoc rursus quadrati ex B D duplum: erit quadratum ipsius O P quadrati ex B D octuplum. Hæc igitur ad ducendas interceptas K L, M N Problemati præfigenda est determinatio.

Porrò, quod ad reliquas interceptas attinet, ut F E & I H, ex

 sem-

semper sic duci possunt, ut datis rectis sint æquales, nec est Problema eo casu determinationi obnoxium.

In numeris, esto B D $\infty a \infty 7$, E F $\infty c \infty 24$, fietque æquatio quæsita $x^4 - 14x^3 - 478xx - 686x + 2401 \infty 0$. Quæ cum dividi nequeat per $x +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum dividente, tollo secundum ejus terminum, & fit æquatio $z^4 * - 551\frac{1}{2}zz - 4375z - 6305\frac{11}{16} \infty 0$. Quæ ad tres dimensiones reducta dabit æquationem $y^6 - 1103y^4 + 329375yy - 19140625 \infty 0$. Hæc autem cum dividi possit per $yy - 625 \infty 0$, arguitur y esse 25, quâ mediante dividetur æquatio $z^4 * - 551\frac{1}{2}zz - 4375z - 6305\frac{11}{16} \infty 0$ in duas æquationes, $zz - 25z - 50\frac{3}{4} \infty 0$, & $zz + 25z + 124\frac{1}{4} \infty 0$: fientque radices prioris $z \infty 12\frac{1}{2} + \sqrt{207}$, & $z \infty 12\frac{1}{2} - \sqrt{207}$; at posterioris $z \infty -12\frac{1}{2} + \sqrt{32}$, & $z \infty -12\frac{1}{2} - \sqrt{32}$. Verùm quoniam, ad tollendum secundum terminum primæ æquationis, supposita fuit $x \infty z + \frac{1}{2}a$: hinc radices ejus erunt $x \infty 16 + \sqrt{207}$, & $x \infty 16 - \sqrt{207}$, ut & $x \infty -9 + \sqrt{32}$, nec non $x \infty -9 - \sqrt{32}$. Et liquet D F fore $16 - \sqrt{207}$, D H $16 + \sqrt{207}$, D K $9 - \sqrt{32}$, ac denique D M $9 + \sqrt{32}$.

Eodem modo, si B D fuerit 3, & F E 4, invenietur æquatio $x^4 - 6x^3 + 2xx - 54x + 81 \infty 0$, quæ similiter per $x +$ vel $-$ aliquo numero ultimum terminum 81 dividente dividi nequit: unde sublato secundo ejus termino, fiet æquatio $z^4 * - 11\frac{1}{2}zz - 75z - 10\frac{1}{16} \infty 0$. quæ ad tres dimensiones reducta, dabit æquationem $y^6 - 23y^4 + 175yy - 5625 \infty 0$. Hæc, cùm per $yy - 25 \infty 0$ dividi possit, sequitur y fore 5. Unde divisâ æquatione præcedente in duas æquationes $zz - 5z - \frac{3}{4} \infty 0$, & $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \infty 0$, inveniemus $z \infty \sqrt{7} + 2\frac{1}{2}$, vel $z \infty \sqrt{7} - 2\frac{1}{2}$. Quæ binæ tantùm radices ex utraque æquatione erui possunt, cum posterior æquatio $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \infty 0$ sit impossibilis, per ea, quæ p. 165 exposuimus, adeoque nullas admittat radices nec veras nec falsas, sed tantùm imaginarias. Quibus radicibus si addatur $1\frac{1}{2}$ (quoniam ad tollendum secundum terminum primæ æquationis posuimus $x \infty z + 1\frac{1}{2}$), habebitur $x \infty \sqrt{7} + 4$, vel $x \infty \sqrt{7} - 1$. Id quod monstrat lineam D F sumendam esse æqualem $\sqrt{7} - 1$, & lineam D H $\infty \sqrt{7} + 4$. Ex quibus constat, quòd, postquam æquatio inventa $x^4 - 6x^3 + 2xx - 54x - 81 \infty 0$ nullam agnoscat radicem falsam, (quan-

(quandoquidem radices æquationis $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \infty 0$ tantummodo sunt imaginariæ, & æquatio impossibilis) ideo similiter nulla linea, cujus longitudo sit 4, per punctum B duci, atque à rectis C A, C D intercipi possit.

Cæterùm, ne quid ad penitiorem intellectum harum regularum, quibus hìc in reducendis ac dividendis æquationibus usi sumus, deficiat, visum fuit sequentia adjicere.

Hinc si, exempli causâ, æquatio reducenda sit $x^4 * - pxx - qx + r \infty 0$, investigare oportet ex quibus binis æquationibus produci queat æquatio, quæ reducendæ similis existit. Quocirca cum, supponendo $xx + yx + z \infty 0$ ac $xx - yx + v \infty 0$, ex mutua harum duarum multiplicatione producatur

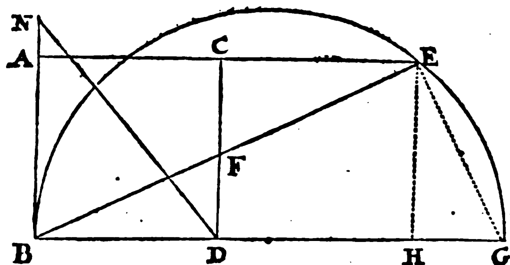
$$x^4 * \begin{matrix} +z \\ -yy \\ +v \end{matrix} xx \begin{matrix} -zy \\ +vy \\ \end{matrix} x + vz \infty 0,$$

æquatio ejusdem formæ cum proposita, elicio inde tres æquationes diversas: nimirum, $z - yy + v \infty - p$, $-zy + vy \infty - q$, & $vz \infty r$. E quibus deinde, si, ad inveniendam quantitatem y, in locum z & v subrogentur earum valores $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ & $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$, emerget æquatio $y^6 - 2py^4 \begin{matrix} +pp \\ -4r \end{matrix} yy - qq \infty 0$. Inventâ autem quantitate y, loco duarum præcedentium æquationum $xx + yx + z \infty 0$ ac $xx - yx + v \infty 0$ scribo hasce duas $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \infty 0$ ac $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$. Et patet quæsitum. Idem pariter de cæteris æquationibus, quorum signa ab allatæ signis sunt diversa, est intelligendum, è quibus omnibus postea inter se collatis dictarum regularum veritas penitùs elucescit. Ubi etiam liquet, si valor ipsius yy per divisionem superioris æquationis Cubicæ inveniri possit, Problema, quod ad æquationem propositam $x^4 * - pxx - qx + r \infty 0$ perducitur, fore omnino Planum; sin minus, illud ipsum tunc esse Solidum.

Denique ex his quoque emanat, quo pacto regula generalis reducendi omnes æquationes altiores, pag. 84 ab Authore adducta, intelligi nec non ad praxin revocari debeat.

Cum aliàs, si pro ea supponeretur DG, multò difficiliùs ad R
Æquationem, sed quæ simplicissima foret, perveniremus. Quod

quidem hìc refero, ut vobis indicem, quòd, cùm Problema propositum non est Solidum, si quærendo illud unâ viâ ad Æquationem deveniatur valde compositam, tum communiter aliâ viâ ad simpliciorem Æquationem perveniri possit.] Modus autem, quo ad Æquationem dictam pervenerim, talis est.

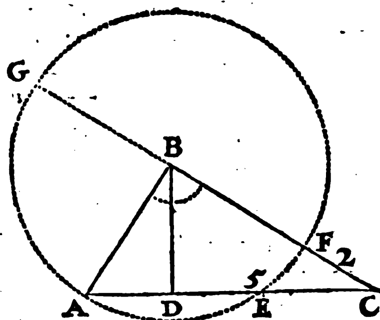


Jungatur EG, ductâque EH parallelâ ipsi CD vel AB, ponatur BD vel DC $\infty\, a$, FE $\infty\, c$, BF $\infty\, y$, & DG $\infty\, x$. Hinc cum EH æqualis sit ipsi CD vel DB, & triangulum EHG simile triangulo BDF: erit & EG æqualis BF, hoc est, $\infty\, y$. Eodem modo similia sunt triangula BGE & BEH: unde erit, ut BG, seu $a+x$, ad GE, seu y; ita BE, seu $y+c$, ad EH, seu a. Ac proinde ductis tum mediis tum extremis in se invicem, fiet æquatio inter $yy+cy$ & $aa+ax$, vel inter yy & $-cy\,{+aa \atop +ax}$. Non secus, triangula BFD & BEH sunt similia: quare, si fiat ut BF, seu y, ad BD, seu a; ita BE seu $y+c$ ad BH; erit BH $\infty\, \frac{ay+ac}{y}$. Subductâ autem BH ex BG seu $a+x$, relinquetur HG $\infty\, \frac{xy-ac}{y}$. Porrò cum BH, HE, & HG tres sint proportionales: hinc si multiplicetur BH per HG, hoc est, $\frac{ay+ac}{y}$ per $\frac{xy-ac}{y}$, erit productum $\frac{axyy+acxy-aacy-aacc}{yy}$ æquale ei, quod fit ex HE in se, hoc est, aa; & per consequens $xyy-ayy\,\infty\,{+ac \atop -cx}\,y+acc$, unde $yy\,\infty\,-cy+\frac{acc}{x-a}$. Cæterùm cum

cum illa, quæ eidem sunt æqualia, inter se quoque sint æqualia, erit $-cy\begin{smallmatrix}+aa\\+ax\end{smallmatrix} \infty -cy + \frac{acc}{x-a}$. Ac proinde ablatis utrinque æqualibus, reliquumque multiplicando per $x-a$, habebitur $axx - a^3 \infty acc$, ideoque $xx \infty aa + cc$. Quod erat ostendendum.

Sed lubet hic aliud exemplum non inelegans afferre, quod mihi à Doctissimo, ac in omni studiorum genere versatissimo D. Marco Meibomio, est suppeditatum, cujus operâ Aristoxenus, Alypius, aliique Veteres Musici pristino nitori sunt restituti.

Datis trianguli rectanguli ABC, minore latere AB, & differentiâ segmentorum basis EC, invenire differentiam laterum FC.



Ponatur AB ∞ a,
EC ∞ b,
FC ∞ x:
eritque GC ∞ $2a+x$.

EC — FC — GC / AC

b —— x —— $2a+x$ / $\frac{2ax+xx}{b}$

$$\begin{array}{r} 2ax + xx \\ 2ax + xx \\ \hline + 2ax^3 + x^4 \\ 4aaxx + 2ax^3 \quad \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{4aaxx + 4ax^3 + x^4}{bb} \infty 2aa + 2ax + xx$$

$$4aaxx + 4ax^3 + x^4 \infty 2aabb + 2abbx + bbxx$$

$$x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix} +4aa \\ -bb \end{smallmatrix} xx - 2abbx - 2aabb \infty 0.$$

Quoniam verò hæc æquatio dividi nequit per $x \, 8 \, a$, vel per $x \, 8 \, b$, vel per $x \, 8 \, 2a$, vel per $x \, 8 \, 2b$, hinc tollendus est secundus terminus, ut reducatur ad aliam tres tantùm dimensiones habentem: quod fiet ponendo $z - a \infty x$

$$\begin{array}{rrrrrcl} z^4 & -4az^3 & +6aazz & -4a^3z & +a^4 & \infty & x^4 \\ & +4az^3 & -12aazz & +12a^3z & -4a^4 & \infty & +4ax^3 \\ & & +4aazz & -8a^3z & +4a^4 & \infty & +4aaxx \\ & & -bbzz & +2abbz & -aabb & \infty & -bbxx \\ & & & -2abbz & +2aabb & \infty & -2abbx \\ & & & & -2aabb & \infty & -2aabb. \\ \hline \end{array}$$

$z^4 \quad * \quad \begin{smallmatrix} -2aa \\ -bb \end{smallmatrix} zz \quad * \quad \begin{smallmatrix} +a^4 \\ -aabb \end{smallmatrix} \infty 0.$ Quia autem hìc post sublationem secundi termini contingit æquationem esse Quadratam, cum in ea desit z^3 & z: non opùs est ulteriùs progredi, cum radix ejus per ea, quæ primo libro sunt ostensa, inveniri possit. Erit enim

$$zz \infty aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb},$$

$$\& \; z \infty \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}}, \text{ ac proinde}$$

$$x \infty -a + \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}}.$$

Ubi notandum, si pro majori latere B C ponatur x, æquationem quæsitam fore quadratam: utpote,

$x^4 * \begin{smallmatrix} -2aa \\ -bb \end{smallmatrix} xx * \begin{smallmatrix} +a^4 \\ -aabb \end{smallmatrix} \infty 0$, sive $x^4 \infty \begin{smallmatrix} +2aa \\ +bb \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} -a^4 \\ +aabb \end{smallmatrix}$, cujus radix est $xx \infty aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}$, hoc est, $x \infty \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}}$. Cujus sanè cum præcedente convenientia ex ipso schemate est perspicua. Quòd si verò pro A E, duplo minori segmento, ponatur x, fiet Æquatio $xx \infty -bx + 2aa$, cujus radix est $x \infty -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + 2aa}$.

Quæ

Quæ loco alterius exempli haberi queunt, quorum nos admonet Author pag. 84.

Non dissimilis erit quæstio, si datis $AB \infty a$, & $DC \infty b$, quæratur $FC \infty x$. Fiet enim æquatio

$x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix}+6aa\\-bb\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+4a^3\\-2abb\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+a^4\\-aabb\end{smallmatrix} \infty 0$. In qua si tollatur secundus terminus, ponendo scilicet $z - a \infty x$, prodibit æquatio $z^4 * - bbzz * - aabb \infty 0$, sive $z^4 \infty bbzz + aabb$, cujus radix est $zz \infty \frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, hoc est,

$z \infty \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$, adeoque $x \infty - a + \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$. Sed si quæratur $BC \infty x$, erit æquatio $xx \infty \frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, cujus radix est $x \infty \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$. Cujus cum præcedente consensus ex figura perspicitur. Denique si quæratur AD, habebitur æquatio $xx \infty - bx + aa$, cujus radix est $x \infty - \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$. Quod similiter superioris moniti non inelegans est exemplum.

His adde sequentem quæstionem, quam olim ab Arithmetico subtilissimo, D. Nicolao Huberti à Persyn, Harlemensi, fautore meo honorando, solvendam accepi.

Invenire quatuor numeros, unitate se invicem excedentes, qui inter se multiplicati faciant 100.

Ponatur primus x, secundus $x + 1$, tertius $x + 2$, & quartus $x + 3$. Fietque æquatio $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x \infty 100$, vel $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x - 100 \infty 0$. cujus ultimus terminus dividi potest per 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, & 100. Divisio verò tentata per $x \mathbin{8} 1$, vel per $x \mathbin{8} 2$, vel per $x \mathbin{8} 4$ &c. non succedit. Hinc sublato secundo termino, prodibit æquatio $z^4 * - 2\frac{1}{2}zz * - 99\frac{7}{16} \infty 0$, vel $z^4 \infty 2\frac{1}{2}zz + 99\frac{7}{16}$, cujus radix est $zz \infty \sqrt{101} + 1\frac{1}{4}$, hoc est, $z \infty \sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}}$. Ac proinde, cum ibi tollendo secundum terminum posuerimus $x \infty z - 1\frac{1}{2}$, fiet $x \infty \sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$. Eritque quæsitorum numerorum, primus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$, secundus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, tertius $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$, & quartus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2}$. Quod facilè probari potest.

Ubi notandum, si cum hujus quæstionis Authore pro primo numero ponamus $x - 1\frac{1}{2}$, pro secundo $x - \frac{1}{2}$, pro tertio $x + \frac{1}{2}$, pro

pro quarto $x + 1\frac{1}{2}$, quæstionem faciliùs solvi posse. Invenitur enim æquatio $x^4 \infty 2\frac{1}{2}xx + 99\frac{7}{16}$, omnino ut præcedens, denominata à radice z; unde quæsiti numeri fiunt ut supra. Verùm difficile satis foret in hasce hypotheses incidere, non secus quàm in superiorem Pappi constructionem, sicut Author innuit pag. 83.

Restat jam exemplum aliquod exhibendum, ubi æquationem ad Quadratam reducere non licet, & Problema Solidum existit. Quale est illud, quod ante annos aliquot sibi ad investigandum proposuit Nobilissimus atque Amplissimus Vir D. Ioannes de Wit, Consiliarius & Pensionarius sive primarius Hollandiæ West-Frisiæque minister, Mathematum peritissimus. à quo insignem tractatum, brevi, si volet Deus, expectare poteris, in quo Planorum atque Solidorum Locorum per artem Analyticam inventionem aliter quàm Cartesius exponit.

Datis in superiori triangulo rectangulo A B C, segmento basis D C ∞a, & differentiâ laterum C F ∞b; invenire A B, latus minus.

Esto A B ∞x, fietque æquatio $x^4 + 4bx^3 \begin{smallmatrix}+6bb\\-2aa\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+4b^3\\-2aab\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+b^4\\-2aabb\end{smallmatrix} \infty 0$. Quæ cum dividi nequeat per x 8 b, tollo secundum ejus terminum, statuendo $z - b \infty x$, unde emergit æquatio $z^4 * - 2aazz + 2aabz - aabb \infty 0$, quippe quæ invenitur, quærendo latus majus B C. Hanc porrò reduco ad aliam, tres tantùm dimensiones habentem, juxta regulam pag. 79, fietque æquatio $y^6 - 4aay^4 \begin{smallmatrix}+4a^4\\+4aabb\end{smallmatrix} yy - 4a^4bb \infty 0$. Quæ cum dividi nequeat per binomium aliquod, constans ex quantitate incognitâ yy 8 quantitate cognitâ, ultimum terminum $4a^4bb$ dividente, indicio est, Problema propositum esse Solidum, adeoque non nisi per Conicas sectiones solvi posse. Neque minus vitium est, solutionem ejus post hæc tentare per lineas rectas & circulos, quàm adhibere Conicas sectiones ad constructionem eorum, quæ per lineas rectas & Circulos construi possunt, ut monet D. des Cartes pag. 79.

In numeris, esto D C ∞ 5, C F ∞ 2, A B ∞ 1 ℞, eritque æquatio 1 ℨℨ + 8 ℭ − 26 ℨ − 68 ℞ − 84 ∞ 0. Quæ cum dividi non possit per 1 ℞ plus vel minus aliquo numero, ultimum terminum 84 dividente, aufero secundum terminum 8 ℭ, & fit, 1 QQ * − 50 Q + 100 N − 100 ∞ 0. Hæc autem ad tres dimen-

mensiones reducta producit $x^6 - 100x^4 + 2900xx - 10000 \propto 0$. quæ cum similiter dividi non possit per $xx +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum dividente: sequitur Problema in datis numeris esse Solidum, lineamque A B per planorum Geometriam sive per regulas primo libro expositas non posse inveniri.

Non dissimilis erit quæstio, si, datis A D $\propto a$, F C $\propto b$, quæratur B C $\propto x$. Invenitur enim æquatio

$$x^4 - 4bx^3 \begin{smallmatrix} +6bb \\ -2aa \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} -4b^3 \\ +4aab \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +b^4 \\ -aabb \end{smallmatrix} \propto 0.$$

Unde ponendo $x \propto z + b$, emerget æquatio $z^4 \ast - 2aazz - 2aabz - aabb \propto 0$. eadem nempe, quæ provenit, quærendo A B $\propto z$.

Porrò, si exemplorum copiam desideres, potes rursus ex iisdem datis quærere E C $\propto x$, & habebis

$$x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix} +4aa \\ -2bb \end{smallmatrix} xx - 8abbx \begin{smallmatrix} -8aabb \\ +b^4 \end{smallmatrix} \propto 0.$$

Cujus secundum terminum si tollas, ponendo $z - a \propto x$, obtinebis $z^4 \ast \begin{smallmatrix} -2aa \\ -2bb \end{smallmatrix} zz - 4abbz \begin{smallmatrix} +a^4 \\ -2aabb \\ +b^4 \end{smallmatrix} \propto 0$, eandem, quam si quæras D C $\propto z$.

Ubi si denique quæras B D, invenies hanc æquationem:

$$x^8 \begin{smallmatrix} -2a^4 \\ -2aabb \end{smallmatrix} x^4 - 4a^4bbxx \begin{smallmatrix} +a^4b^4 \\ +a^8 \\ -2a^6bb \end{smallmatrix} \propto 0.$$

Sed hæc forsan nimia videbuntur.

E quibus colligere licèt: quòd, Problemate aliquo Solido existente, si per viam aliquam perveniatur ad Æquationem valde compositam, communiter etiam per aliam viam ad simpliciorem deveniri possit, veruntamen pauciores quàm tres dimensiones non habentem.

Iam verò postquam compertum est, Problema propositum esse Solidum; sive Æquatio, per quam illud quæritur, ad Quadrato-quadratum adscendat; sive ipsa non altiùs quàm ad Cubum assurgat: potest semper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum sectionum, quæcunque illa tandem sit, &c.] Ex his notandum est, quoties in proposita quæstione data est aliqua Conica sectio, & Æquatio ad 3 vel 4 tantùm dimensiones ascendit, tunc eam semper ope illius datæ Conicæ sectionis per solam regulam & circinum solvi posse. Adeò ut pro Plano Problemate haberi quodammodo possit, etiamsi reverâ sit Solidum, ut etiam ab Authore hic appellatur.

Hujus rei elegans exemplum suggerere potest Problema Apollonii de Parabola, lib. 5 Conicorum, de quo meminit Pappus Alexandrinus in scholio Prop^{nis} 30 libri 4^{ti} Collectionum Mathematicarum. In cujus solutionem eos, qui id per Conica vel Linearia, hoc est, per improprium genus solvere quæsiverunt, dum illud pro Plano Problemate habet, meritò reprehendit. Quoniam autem vir doctissimus ac de Mathematicis studiis perinde meritus Alexander Andersonus in exercitatione sua 5ta dictum Problema non levibus indiciis sequentis argumenti fuisse innuit, seque ibidem scribit Analyticâ suâ duce tandem reperisse absque solida inclinatione (ut Pappus loquitur) non posse definiri: visum fuit id ipsum hic loci, in hoc rationum æquilibrio autoribus istis sic dissentientibus, cuivis inquirendum proponere.

PROBLEMA.

Parabolâ datâ, è puncto, intra vel extra eam dato, rectam lineam ducere, quæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat.

Etenim si in hujus Problematis solutione investiganda, rectam, quæ ad axem è puncto in Parabola, ad quod quæsita recta duci debet, perpendicularis demittitur, pro incognita quantitate accipiamus: incidemus in æquationem Cubicam, quæ nullo modo erit reducibilis, & tamen secundùm regulam generalem p. 85 ope ejusdem datæ Parabolæ quàm facillimè construi poterit, utendo tantùm rectis lineis & circulo. Cujus porrò demonstrationem universalem, quam sibi vulgari modo Geometrarum, continuæ contemplationi figuræ obnoxiam, acutissimus pariter atque eruditissimus noster Chr. Hugenius concinnavit, cum ipsa jam pridem nobis aliisque ab eo communicata fuerit, nec illa etiam hujus loci existat, eandem hìc prætereundam duximus.

T *Atque ita Æquatio reducenda ad hanc formam:* $z^3 \propto * apz . aaq$, *si incognita quantitas tres tantùm dimensiones habeat; aut ad hanc:* $z^4 \propto * apzz . aaqz . a^3 r$. *si quatuor obtineat dimensiones; seu, sumendo a pro unitate, ad hanc:* $z^3 \propto * pz . q$; *aut ad hanc:* $z^4 \propto * pzz . qz . r$.] Ubi apparet, hujus Geo-

Geometriæ Methodum requirere, ut, literæ, quæ in priori æquatione pro unitate est accepta, quadratum reperiatur in ultimo termino; in posteriori verò æquatione, ut literæ, quæ pro unitate in termino zz est accepta, quadratum reperiatur in termino z, ac ejus cubus in termino ultimo. Etenim si habeatur æquatio $z^3 \infty * bbz . c^3$, ac illius loco alia desideretur, cujus penultimus terminus habeat a, ac ultimus aa: Fiat ut a ad b, sic b ad quartam, quæ vocetur p: eritque $ap \infty bb$; Rursus, fiat ut aa ad cc, sic c ad quartam, quæ sit q; sive etiam (quod eòdem redit) ut a ad c, sic c ad tertiam, quæ vocetur d; ac denuò ut a ad d, sic c ad q: eritque $aaq \infty c^3$. Unde pro $z^3 \infty * . bbz . c^3$ scribi poterit $z^3 \infty * apz . aaq$, sive, sumendo a pro unitate: $z^3 \infty * . pz . q$.

Nec aliter fit si habeatur $z^4 \infty * bbzz . c^3 z . d^4$. Substituto enim ap in locum bb, & aaq in locum c^3 (ut ante), faciendum est, ut a ad d, sic d ad quartam, quæ vocetur e, eritque $ae \infty dd$, ideoque $aaee \infty d^4$. Ubi rursus, si fiat, ut a ad e, ita e ad tertiam, quæ vocetur r, erit $ar \infty ee$, ac proinde $a^3 r \infty d^4$. Ita ut pro æquatione propositâ $z^4 \infty * . bbzz . c^3 z . d^4$ reponi possit $z^4 \infty * apzz . aaqz . a^3 r$, sive, sumendo a pro unitate: $z^4 \infty * . pzz . qz . r$. Quod erat ostendendum. Eadem est ratio æquationis pag. 97.

E quibus liquidò constat, quanti sit momenti in Geometria concipere unitatem, cum, præter ejus utilitatem, primo libro ostensam, non solùm ejus beneficio æquationes 3 & 4, ut & 5 & 6 dimensionum ita præparentur, ut hæ juxta unam & illæ juxta aliam regulam resolvi queant; sed ipsæ etiam hoc pacto designatæ ad numeros referri, atque ad ipsarum radices explicandas inservire possint, adeoque, quænam inter Arithmeticam & Geometriam relatio ac convenientia existat, edoceant.

Deinde supponendo Parabolam F A G jam descriptam esse, V
& axem ejus esse A C D K L, latusq́ue rectum a seu 1.] Ubi liquet, quòd, postquam in æquatione resolvenda quantitatem a seu unitatem, ut proximè est explicatum, subrogavimus, eamque juxta regulam pro latere recto Parabolæ F A G assumpsimus, quo pacto Problemata omnia Solida unius ejusdemque Parabolæ ope solvi possint. Cum enim reduci semper queant ad æquationem trium aut quatuor dimensionum, superiorum formularum, & una

eademque quantitas a in earundem æquationum terminis subrogari semper possit, evidens est, ipsam unius ejusdemque Parabolæ ope construi posse. Idem intelligendum quoque est de æquationibus numericis trium quatuórve dimensionum, quarum nulla ex radicibus est rationalis, quarumque valor similiter per sectionem Conicam est determinandus. Ut supra fuit ostensum.

Vide figuram p. 86 vel 89. Cæterùm ut hæc regula cuivis perspecta reddatur, concipiatur Parabola esse descripta FAG, cujus latus rectum sit ∞ a seu 1, & in axe ejus ADKL assumptâ AD ∞ b, fingatur ex D eidem perpendicularis esse erecta DE ∞ c, centroque E intervallo EH ∞ d descriptus circulus FHG, qui Parabolam ab utraque parte axis secet in G & F: oporteatque investigare æquationem, cujus radix sit perpendicularis GK aut FL ∞ z.

Ad quam inveniendam, dividatur zz, quadratum ex GK, per latus rectum seu a, & fit AK ∞ $\frac{zz}{a}$. E qua subductâ AD ∞ b, relinquetur DK seu EM ∞ $\frac{zz}{a} - b$. Deinde, quoniam additis ED, hoc est, MK, & KG, tota MG est ∞ $c + z$; & quadrata ex EM & MG simul addita faciant $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bzz}{a} + bb + cc + 2cz + zz$, quadratum ex EG: erit $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bzz}{a} + bb + cc + 2cz + zz \infty dd$, hoc est, ordinatâ æqualitate, habebitur æquatio

$$z^4 \infty * \begin{array}{l} + 2abzz \\ - aa \end{array} - 2aacz \begin{array}{l} + aadd. \\ - aabb \\ - aacc \end{array}$$

Eadem quippe, quæ invenitur, ponendo FL ∞ $-z$. Hinc si, exempli caussâ, æquatio proposita construenda fuerit $z^4 \infty * + apzz - aaqz + a^3r$: erit, factâ separatim comparatione inter singulos terminos unius & singulos alterius, $b \infty \frac{a+p}{2}$, $c \infty \frac{1}{2}q$, & $d \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar}$. Quod illud ipsum est, quod Authoris regula faciendum præcipit. Eodem modo reliquorum casuum constructio inveniri potest. Idem intellige de constructione æquationis pag^na 97, aliarumque hic sequentium.

VV *Adeò ut hæc regula omnium, quas aliquis exoptare queat, generalissima sit & perfectissima.*] Quoniam autem, quo pacto

Solida

Solida Problemata etiam Hyperbolæ & Circuli beneficio, postquam ad æquationem trium quatuórve dimensionum sunt reducta, construi possint, intelligere non modò jucundum quin imò utile existit: visum fuit hoc loco afferre regulam, ab ingeniosissimò atque integerrimo nostro Huddenio inventam, quâ ejusdem æquationis radices, prout ipsa ad hanc formam $z^4 - pz^3 + qzz - rz + s \propto 0$ aut ad hanc $z^3 - pzz + qz - r \propto 0$ est revocata, ita ut omnes termini per signa + & — se invicem sequantur, inveniri valeant.

CONSTRUCTIO ÆQUATIONIS

$$z^4 - pz^3 + qzz - rz + s \propto 0.$$

Ductis AB, AC, rectum angulum A efficientibus, sumptâque in AB lineâ AD $\propto \frac{1}{2}p$, agatur ex D ipsi AC

parallela DF. Deinde in hac invento puncto E, ita ut id, quod sub AD, DE continetur, sit $\propto \sqrt{s}$, describatur per E circa Asymptotos AB, AC Hyperbola HEh.

 Por-

Porrò assumptâ D F $\infty \frac{r}{2\sqrt{s}}$, jungatur A F; & super A F descripto semicirculo A D F, collocetur in eo A G $\infty \sqrt{q}$, centroque F circulus describatur, transiens per inventum punctum G. Qui quidem Circulus Hyperbolam secabit vel tanget in tot punctis, quot æquatio diversas radices admittet, à quibus si ad lineam A C demittantur perpendiculares H I, h i, & *h i*: erunt ipsæ radices quæsitæ.

Ubi notandum, si A G major inveniretur, quàm ut semicirculo super A F descripto inscribi posset; aut etiam Circulus G H *b* adeò parvus esset, ut Hyperbolam H E *b* in nullo prorsus puncto secaret vel tangeret, nullam itidem tunc fore radicem in æquatione, quæ non esset imaginaria.

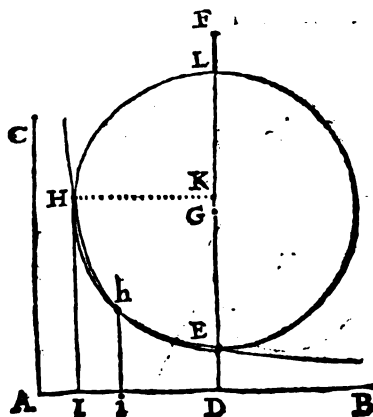
Demonstratio.

Etenim lineâ I H existente ∞z, cum id, quod sub A D, D E vel sub A I, I H continetur, sit $\infty \sqrt{s}$: erit A I seu D K $\infty \frac{\sqrt{s}}{z}$. Unde cum D F & D K à se invicem subductæ relinquant K F, & D F sit $\infty \frac{r}{2\sqrt{s}}$: erit K F $\infty \frac{r}{2\sqrt{s}} - \frac{\sqrt{s}}{z}$ seu $\frac{\sqrt{s}}{z} - \frac{r}{2\sqrt{s}}$, adeoque $\Box$ K F semper $\infty \frac{s}{zz} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4s}$. Est autem K H $\infty z - \frac{1}{2}p$ seu $\frac{1}{2}p - z$, ac proinde $\Box$ K H semper $\infty zz - pz + \frac{1}{4}pp$. Hinc summa utriusque simul, hoc est, $\Box$ F H erit $\infty \frac{s}{zz} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4s} + zz - pz + \frac{1}{4}pp$. Hoc verò cum æquetur $\Box^{to}$ A F $-$ $\Box^{to}$ A G, hoc est, $\infty \frac{1}{4}pp + \frac{rr}{4s} - q$: fiet, ordinatâ æqualitate, $z^4 - pz^3 + qzz - rz + s \infty 0$. Quæ est æquatio proposita. Unde liquet I H esse ∞z.

CON-

CONSTRUCTIO ÆQUATIONIS
$z^3 - pzz + qz - r \infty 0.$

Ductis, ut ante, A B, A C, & in A B assumptâ A D $\infty \sqrt{q}$, agatur ex D ipsi A C parallela D F. Deinde in hac acceptis D E $\infty \frac{r}{q}$, & E F $\infty\, p$, describatur per E circa Asymptotos A B, A C Hyperbola E h H. Porrò sectâ D F bifariam in G, centro G & intervallo G E describatur circulus E H L, qui quidem Hyperbolam in tot punctis præter E secabit vel tanget, quot æquatio diversas radices admittet, è quibus si ad lineam A B demittantur perpendiculares H I, h i, erunt ipsæ radices quæsitæ.



Demonstratio.

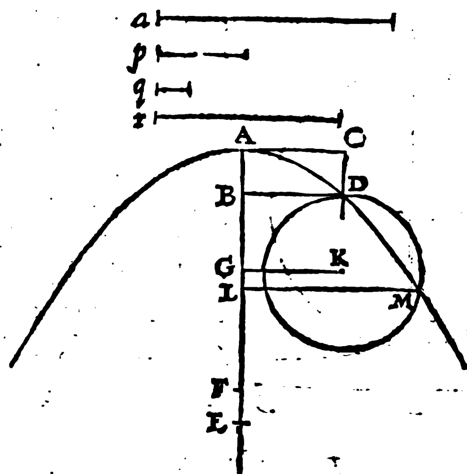
Quoniam, H I existente $\infty\, z$, A I, per supra dicta, est $\infty \frac{r}{qz}\sqrt{q}$, & eadem ab A D subducta relinquit I D vel H K $\infty \sqrt{q} - \frac{r}{qz}\sqrt{q}$: erit □ ex H K $\infty\, q - \frac{2r}{z} + \frac{rr}{qzz}$. Deinde, quoniam D E $\infty \frac{r}{q}$ ablatâ ex D K seu I H $\infty\, z$, relinquitur E K $\infty\, z - \frac{r}{q}$; at verò D K $\infty\, z$ subtractâ ex D L seu E F $\infty\, p$, relinquitur K L $\infty\, p - z$: erit ▭ E K L $\infty\, pz - \frac{pr}{q} - zz + \frac{rz}{q}$. Hinc cum □ ex H K æquetur ▭ E K L, erit $q - \frac{2r}{z} + \frac{rr}{qzz} \infty\, pz - \frac{pr}{q} - zz + \frac{rz}{q}$. Et fit, ordinatâ æqualitate,

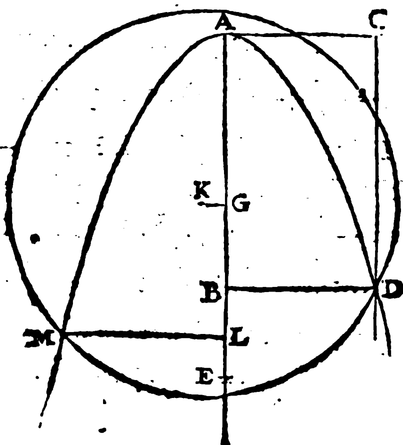
$$z^4 \begin{matrix} -\frac{r}{q} \\ -p \end{matrix} z^3 \begin{matrix} +q \\ +\frac{pr}{q} \end{matrix} zz - 2rz + rr \infty 0.$$

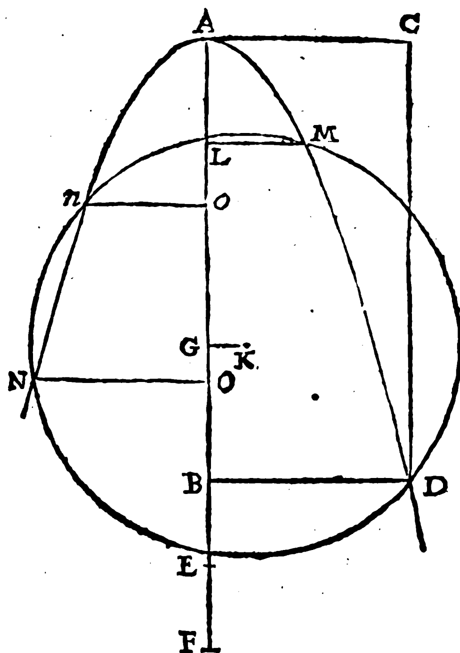
Quæ

Quæ æquatio dividi potest per $z - \frac{r}{q} \infty 0$, & fit $z^3 - pzz + qz - r \infty 0$, æquatio proposita. Unde liquet HI esse ∞z.

His subjunge sequentem regulam, à me inventam, quâ ope Circuli & Parabolæ Æquationes Cubicæ; in quibus 2dus terminus non est sublatus, construi possunt, prout ipsæ ad hanc formam $z^3 \infty pzz . aqz . aar$, aut ad hanc $z^3 \infty pzz * . aar$; sive etiam (sumendo a pro unitate) ad hanc $z^3 \infty pzz . qz . r$, aut ad hanc $z^3 \infty pzz * . r$, sunt reductæ. Ea autem talis est.







Descriptâ Parabolâ NAM, cujus axis sit ABE, & latus rectum ∞ *a* seu 1, erigo ex vertice A, ad dextram Parabolæ, super axe, perpendicularem AC ∞ *p*; & ex C ductâ CD ipsi AB parallelâ, donec Parabolæ occurrat in D, duco ex D ipsi AC parallelam DB, occurrentem axi in B. Dehinc in linea AB, continuatâ versùs B, sumendo BE ∞ 1, oportet facere EF ∞ *q*, eamque ulteriùs in illa versùs hanc eandem partem sumere, si habeatur + *q* in æquatione; sed versùs alteram partem, si habeatur — *q*. Porrò sectâ AF bifariam, aut AE, si *q* sit nulla, in G, si habeatur — *p*, & *q* & *r* diversis signis sint adfectæ; aut etiam si habeatur + *p*, & *q* & *r* iisdem signis denotatæ fuerint, erigenda est ex G per-

 pendi-

pendicularis GK $\infty \frac{r+pq}{2}$, aut $\infty \frac{1}{2} r$, si q nulla sit, eaque ad dextram collocanda, si p & r diversa signa habeant, aut ad sinistram, si eadem. Vel contra, si habeatur $-p$, & q & r iisdem signis adficiantur; aut etiam si habeatur $+p$, & q & r diversis signis designentur, oportet facere GK $\infty \frac{r=pq}{2}$, aut $\infty \frac{1}{2} r$, si q nulla sit, eamque, ut ante, ad dextram sinistrámve collocare, si r sit major quàm pq; vel contra, si r minor sit quàm pq. Quo peracto, si ex K circulus describatur, transiens per punctum D, secabit is vel tanget Parabolam in tot punctis præter D, quot æquatio diversas radices admittet; è quibus si ad axem demittantur perpendiculares, obtinebuntur omnes æquationis radices, tam falsæ, quàm veræ. Quarum quidem veræ, ut ML, ad dextram cadent, & falsæ, ut NO, ad sinistram, si habeatur $-p$ in æquatione. Sed contra, si habeatur ibi $+p$, veræ cadent ad sinistram, & falsæ ad dextram.

Signum = significat differentiam, quæ est inter r & p q.

Cujus quidem demonstrationem, cum eodem modo fieri possit, quo illa Authoris paginæ 89, brevitatis studio hìc omittimus.

Ubi demum advertendum, regulam hanc habere etiam locum in Æquationibus Cubicis, quarum 2dus terminus est sublatus, si tantùm in iis p intelligamus esse ∞ 0, & veras radices ex eadem parte Parabolæ esse sumendas, quâ erecta est perpendicularis GK, & falsas ex altera, cùm habetur $+r$ in æquatione; aut contra, si in ea habetur $-r$.

Cæterùm cum & alias regulas huc afferre possem, quibus hæ eædem æquationes sicut & superiores Quadrato-quadratæ construi queunt: tamen, ne in iis hìc recensendis nimis longus sim (quandoquidem infinitas invenire licet), suffecerit jam allatas, tanquam faciliores exposuisse, cæterasque etiam aliis quærendas reliquisse.

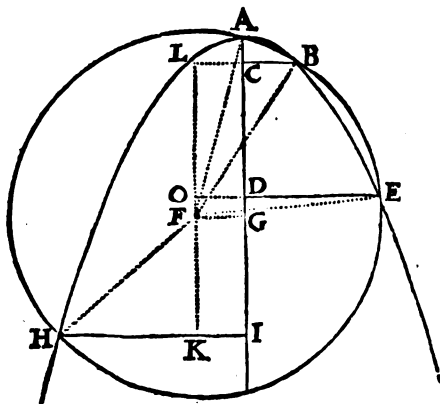
X *Falsa autem FL æqualis est duabus hisce QN & NV simul sumptis, quemadmodum ex calculo facile est videre.*] Veritatem proprietatis Parabolæ, quam hìc obiter adnotat Auctor,

ctor, & ad quam investigandam me ante annos aliquot Parisiis instigavit Doctissimus, ac Mathematum peritiâ, non minùs quàm omnigenâ virtute, ornatissimus vir D. Claudius Mylon, J.C, sicut à me tum inventa fuit, sequenti Theoremate exponam.

THEOREMA.

Si Circulus Parabolam in pluribus punctis secuerit, à quibus ad axem ex utraque parte perpendiculares demittantur: erit ea, quæ ab una parte axis reperitur, æqualis illis, quæ sunt ab altera parte. Quòd si verò ab utraque parte in duobus punctis illam secet: erunt similiter duæ ab una parte æquales duabus ab altera parte.

Sit Parabola H A B E, cujus axis A I, vertex A, Circulus autem ipsam secans H B E. Qui quidem primò transeat per verticem, secetque Parabolam ab una parte in puncto H, & ab altera in punctis B & E. Demissis autem ex punctis H, B, & E in axem



perpendicularibus H I, B C, & E D: ostendendum est, H I æqualem esse ipsis B C & E D simul sumptis.

Esto latus rectum Parabolæ ∞ a, C B ∞ c, D E ∞ d, H I ∞ z, A G ∞ x, & F G ∞ y. Hinc cum, per 11 propositionem 1 libri

 Coni-

Conicorum Apollonii, latus rectum seu a sit ad CB seu c, ut CB seu c ad AC: erit AC $\infty \frac{cc}{a}$. Eâdem ratione cum sit ut latus rectum ad DE, ita DE ad AD: erit AD $\infty \frac{dd}{a}$. Similiter, quoniam latus rectum est ad HI, ut HI ad IA: erit AI $\infty \frac{zz}{a}$. Unde, si auferatur AC $\infty \frac{cc}{a}$ ex AG ∞x, relinquetur CG seu LF $\infty x - \frac{cc}{a}$. Cujus quadratum $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa}$ si addatur quadrato rectæ LB $yy + 2cy + cc$, erit summa $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$, quadratum rectæ FB, per 47 prop. 1mi lib. Elementorum. Sic etiam, si addantur quadrata ipsarum AG & GF, nimirum, xx & yy, erit summa $xx + yy$ quadratum rectæ FA. Quoniam autem in Circulo rectæ lineæ, à centro ad circumferentiam ductæ, sunt æquales; erunt quoque rectæ FB FA æquales, unde & earum quadrata $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$ & $xx + yy$. Quæ quidem æqualitas, si ritè ordinetur, dabit $x \infty \frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$.

Eodem modo auferendo AD $\infty \frac{dd}{a}$ ex AG ∞x, relinquetur

GD

GD seu FO $\infty\ x - \frac{dd}{a}$. Cujus quadrato $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa}$ si addatur quadratum ex EO $dd + 2dy + yy$, erit summa $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ quadratum ex FE. Quod similiter adæquetur quadrato ex FA $xx + yy$, atque æquatio ritè ordinetur, ut inveniatur rursus $x \infty \frac{d^3 + 2aay + aad}{2ad}$.

Quia verò, quæ uni æquantur, illa quoque æqualia sunt inter se, erit $\frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac} \infty \frac{d^3 + 2aay + aad}{2ad}$. In qua æquatione, si multiplicemus per crucem, atque post æqualium ex æqualibus subductionem, ita transferamus quantitates, ut utraque æqualitatis pars dividi possit per $d - c$, orietur $cdd + ccd \infty 2aay$.

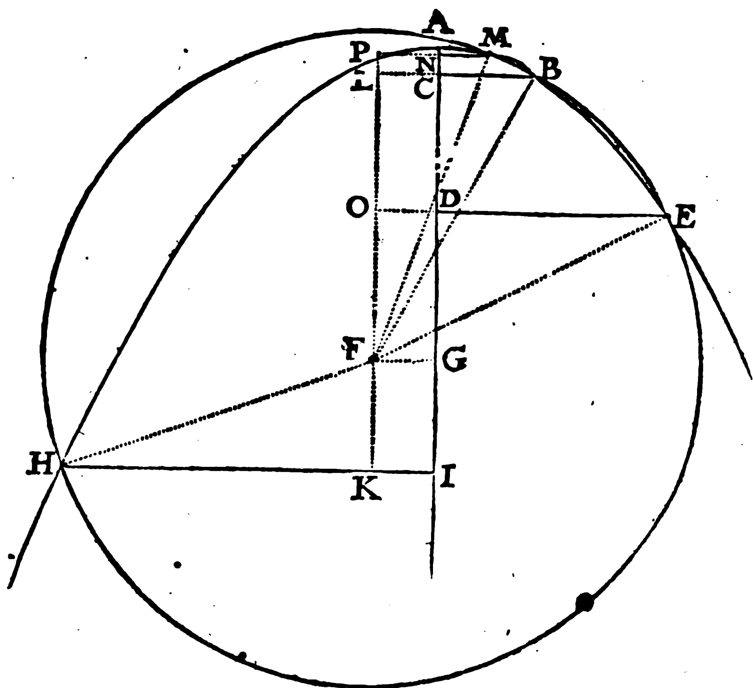
Similiter, si ex AI $\infty \frac{zz}{a}$ auferatur AG $\infty\ x$, relinquetur GI seu FK $\infty \frac{zz}{a} - x$. cujus quadrato $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx$ si addatur quadratum ex HK $zz - 2yz + yy$, erit aggregatum $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2yz + yy$ quadratum ex HF. Quod item ob rationem supradictam quadrato ex FA seu $xx + yy$ erit æquale. Quibus adæquatis, si æquatio ritè ordinetur, constabit tertiò $x \infty \frac{z^3 - 2aay + aaz}{2az}$.

Quoniam autem primò inventa fuit $x \infty \frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$, erunt itidem $\frac{z^3 - 2aay + aaz}{2az}$ & $\frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$ inter se æqualia. Quocirca, si multiplicatio fiat per crucem, atque, post æqualium ex æqualibus ablationem, quantitates transferantur, ut utraque æqualitatis pars dividi possit per $z + c$: orietur $czz - ccz \infty 2aay$.

Cum verò & supra inventum fuerit $2aay \infty cdd + ccd$, erunt itidem $czz - ccz$ & $cdd + ccd$ inter se æquales. Quam æquationem si porrò per c dividamus, atque quantitates unius partis transferamus in aliam sub contrario signo, fiet $zz - cz \begin{smallmatrix} -dd \\ -cd \end{smallmatrix} \infty\ 0$.

Postquam igitur evolvimus atque enodavimus propositionis data, donec tandem pervenerimus ad æquationem $zz - cz \begin{smallmatrix} -dd \\ -cd \end{smallmatrix} \infty\ 0$, restat ut illa quæsito respondeat, atque ejus beneficio propositi

veritas eluceat, modò ex datis elici possit. Ideoque tentatâ divisione ejusdem æquationis per $z - c - d \infty 0$, ut constet, num verum sit, quod intenditur, nempe, z æquari $c + d$: reperitur divisionem fieri posse, & oriri $z + d \infty 0$. Et manifestum fit, z æquari $c + d$, sive H I æqualem esse ipsis B C, E D simul sumptis. Quod erat demonstrandum.



Vnde patet, si Circulus, transiens per verticem Parabolæ, eam in B vel E tangat, hoc est, rectas C B, D E sibi invicem æquales faciat, tunc quidem H I ipsius C B seu D E duplam fore. Si enim in hac ultima æquatione pro d scribatur c, fiet æquatio $zz - cz - 2cc \infty 0$. Quæ dividi poterit per $z - 2c \infty 0$, & orietur $z + c \infty 0$. Id quod arguit z valere $2c$, hoc est, H I ipsius C B seu D E duplam esse.

Sed non transeat circulus H B E per verticem A, verùm secet

Para-

Parabolam ab una parte in puncto H, & ab altera in tribus punctis E, B, & M: Dico similiter H I æqualem esse ipsis E D, B C, & M N simul sumptis.

Positis enim iisdem quæ priùs, esto præterea M N $\infty\, b$. Unde, simili ratione, quâ ante, A N erit $\frac{bb}{a}$. Sublatâ autem A N ex A G $\infty\, x$, relinquitur N G seu P F $\infty\, x - \frac{bb}{a}$. Cujus quadratum $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa}$ si addatur quadrato rectæ M P $\infty\, bb + 2by + yy$, erit summa $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ quadratum rectæ F M.

Quoniam autem in Circulo, ob æqualitatem radiorum, rectæ lineæ F B & F M sunt æquales, erunt quoque eorundem quadrata $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$, & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Unde, si demantur utrinque æquales quantitates & reliquæ multiplicentur per aa, atque quantitates in x ductæ ad unam æquationis partem transferantur, reliquæ verò ad alteram, fiet $c^4 - b^4 + 2aacy - 2aaby + aacc - aabb \infty\, 2accx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $c - b$, & orietur $c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab \infty\, 2acx + 2abx$. Rursus dividatur utrinque per $2ac + 2ab$, & orietur $x \infty\, \frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$.

Eodem modo, cum rectæ F E & F M sint æquales, erunt etiam earum quadrata, nempe, $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Quare demptis utrobique æqualibus, reliquisque ductis in aa, transeant porrò quantitates in x ductæ ad unam partem, & reliquæ ad alteram, fietque $d^4 - b^4 + 2aady - 2aaby + aadd - aabb \infty\, 2addx - 2abbx$. Dividatur utraque pars per $d - b$, orieturque $d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab \infty\, 2adx + 2abx$. Rursus dividatur utrinque per $2ad + 2ab$, & habebitur $x \infty\, \frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$.

Jam verò, quoniam, quæ uni æqualia sunt, illa quoque inter se sunt

sunt æqualia, erit $\frac{d^3+bdd+bbd+b^3+2aay+aad+aab}{2ad+2ab}$ ∞ $\frac{c^3+bcc+bbc+b^3+2aay+aac+aab}{2ac+2ab}$.

Brevitatis verò causâ pro $b^3+2aay+aab$ scribatur $+e^3$, ductâque utrâque æqualitatis parte in $2a$, seu (quod idem est) diviso utriusque denominatore per $2a$, instituatur porrò multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cd^3+bd^3+bcdd+bbdd+bbcd+b^3d+aacd+aabd+ce^3+be^3 \infty c^3d+c^3b+bccd+bbcc+bbcd+b^3c+aacd+aabc+de^3+be^3$. Et, deletis utrinque æqualibus, restituatur valor quantitatis assumptæ e^3, habebiturque $cd^3+bd^3+bcdd+bbdd+b^3d+aabd+b^3c+2aacy+aabc \infty c^3d+c^3b+bccd+bbcc+b^3c+aabc+b^3d+aady+aabd$. Rursus demptis utrobique æqualibus, transferantur quantitates in y ductæ ad unam partem, reliquæ verò ad alteram, & divisio tandem instituatur per $d-c$, orieturque $cdd+ccd+bdd+2bcd+bbd+bbc+bcc \infty 2aay$.

Similiter, cum rectæ HF & FM sint æquales, erunt pariter earum quadrata $\frac{z^4}{aa}-\frac{2zzx}{a}+xx+zz-2zy+yy$, & $xx-\frac{2bbx}{a}+\frac{b^4}{aa}+bb+2by+yy$ æqualia. Unde sublatis utrinque æqualibus, reliquisque per aa multiplicatis, si transferantur porrò quantitates, ita ut, quæ in x ductæ sunt, unam faciant æquationis partem, reliquæ verò alteram, fiet $z^4-b^4-2aazy-2aaby+aazz-aabb \infty 2azzx-2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $z+b$, orieturque $z^3-bzz+bbz-b^3-2aay+aaz-aab \infty 2azx-2abx$. Et rursus utrinque per $2az-2ab$, fietque

$$x \infty \frac{z^3-bzz+bbz-b^3-2aay+aaz-aab.}{2az-2ab}$$

Quoniam verò superiùs inventa fuit quantitas x æqualis $\frac{c^3+bcc+bbc+b^3+2aay+aac+aab}{2ac+2ab}$, hinc $\frac{z^3-bzz+bbz-b^3-2aay+aaz-aab}{2az-2ab}$ & $\frac{c^3+bcc+bbc+b^3+2aay+aac+aab}{2ac+2ab}$ erunt quoque inter se æqualia.

Bre-

Brevitatis autem causâ rursus pro $+b^3+2aay+aab$ scribatur $+e^3$, & $-e^3$ pro $-b^3-2aay-aab$. Deinde, multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, seu (quod idem est), diviso utriusque denominatore per $2a$, fiat multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cz^3+bz^3-bczz-bbzz+bbcz+b^3z+aacz+aabz-ce^3-be^3 \infty c^3z-bc^3+bccz-bbcc+bbcz-b^3c+aacz-aabc+ze^3-be^3$. Postea auferantur utrinque æquales quantitates, & restituatur valor quantitatis assumptæ e^3, & fit $cz^3+bz^3-bczz-bbzz+b^3z+aabz-b^3c-2aacy-aabc \infty c^3z-bc^3+bccz-bbcc-b^3c-aabc+b^3z+2aayz+aabz$. Denique deletis rursus utrobique æqualibus, & revocatis quantitatibus in y ductis ad unam partem æquationis, reliquis verò ad alteram, instituatur divisio per $z+c$, & orietur $2aay \infty czz-ccz+bzz-2bcz+bcc-bbz+bbc$.

Verùm cum & supra inventum fuerit $cdd+ccd+bdd+2bcd+bbd+bbc+bcc \infty 2aay$, &, quæ eidem sunt æqualia, ea quoque inter se sint æqualia, erit $czz-ccz+bzz-2bcz+bcc-bbz+bbc \infty cdd+ccd+bdd+2bcd+bbd+bbc+bcc$. Deleantur jam utrinque æqualia, & quantitates in zz ductæ unam partem æquationis constituant, reliquæ verò alteram, fietque

$$\begin{array}{llll} c\,zz & \infty + ccz & + cdd. \\ +b & +2bc & +ccd \\ & +bb & +bdd \\ & & +2bcd \\ & & +bbd \end{array}$$

Deinde dividatur utrobique per $c+b$, ut oriatur

$$\begin{array}{lll} zz \infty & +bz & +dd, \\ & +c & +bd \\ & & +cd \end{array}$$

sive translatis omnibus ad unam partem:

$$\begin{array}{lll} zz & -bz & -dd \infty 0. \\ & -c & -bd \\ & & -cd \end{array}$$

Postquam igitur percurrimus data propositionis, eaque sic enodavimus, ut difficultas omnis sit translata ad æquationem

$$zz \begin{array}{l}-b\\-c\end{array} z \begin{array}{l}-dd\\-bd\\-cd\end{array} \infty 0,$$

superest ut ostendamus eam quæsito propositionis satisfacere, quantum quidem ex suppositis datis deduci

sunt æqualia, erit $\frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$ ∞ $\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$.

Brevitatis verò causâ pro $b^3 + 2aay + aab$ scribatur $+ e^3$, ductâque utrâque æqualitatis parte in $2a$, seu (quod idem est) diviso utriusque denominatore per $2a$, instituatur porrò multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cd^3 + bd^3 + bcdd + bbdd + bbcd + b^3d + aacd + aabd + ce^3 + be^3 \infty c^3d + c^3b + bccd + bbcc + bbcd + b^3c + aacd + aabc + de^3 + be^3$. Et, deletis utrinque æqualibus, restituatur valor quantitatis assumptæ e^3, habebiturque $cd^3 + bd^3 + bcdd + bbdd + b^3d + aabd + b^3c + 2aacy + aabc \infty c^3d + c^3b + bccd + bbcc + b^3c + aabc + b^3d + aady + aabd$. Rursus demptis utrobique æqualibus, transferantur quantitates in y ductæ ad unam partem, reliquæ verò ad alteram, & divisio tandem instituatur per $d - c$, orieturque $cdd + ccd + bdd + 2bcd + bbd + bbc + bcc \infty 2aay$.

Similiter, cum rectæ HF & FM sint æquales, erunt pariter earum quadrata $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2zy + yy$, & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Unde sublatis utrinque æqualibus, reliquisque per aa multiplicatis, si transferantur porrò quantitates, ita ut, quæ in x ductæ sunt, unam faciant æquationis partem, reliquæ verò alteram, fiet $z^4 - b^4 - 2aazy - 2aaby + aazz - aabb \infty 2azzx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $z + b$, orieturque $z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab \infty 2azx - 2abx$. Et rursus utrinque per $2az - 2ab$, fietque

$$x \infty \frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab}.$$

Quoniam verò superiùs inventa fuit quantitas x æqualis $\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$, hinc $\frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab}$ & $\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$ erunt quoque inter se æqualia.

Brevitatis autem causâ rursus pro $+b^3+2aay+aab$ scribatur $+e^3$, & $-e^3$ pro $-b^3-2aay-aab$. Deinde, multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, seu (quod idem est), diviso utriusque denominatore per $2a$, fiat multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cz^3+bz^3-bczz-bbzz+bbcz+b^3z+aacz+aabz-ce^3-be^3 \infty c^3z-bc^3+bccz-bbcc+bbcz-b^3c+aacz-aabc+ze^3-be^3$. Postea auferantur utrinque æquales quantitates, & restituatur valor quantitatis assumptæ e^3, & fit $cz^3+bz^3-bczz-bbzz+b^3z+aabz-b^3c-2aacy-aabc \infty c^3z-bc^3+bccz-bbcc-b^3c-aabc+b^3z+2aayz+aabz$. Denique deletis rursus utrobique æqualibus, & revocatis quantitatibus in y ductis ad unam partem æquationis, reliquis verò ad alteram, instituatur divisio per $z+c$, & orietur $2aay \infty czz-ccz+bzz-2bcz+bcc-bbz+bbc$.

Verùm cum & supra inventum fuerit $cdd+ccd+bdd+2bcd+bbd+bbc+bcc \infty 2aay$, &, quæ eidem sunt æqualia, ea quoque inter se sint æqualia, erit $czz-ccz+bzz-2bcz+bcc-bbz+bbc \infty cdd+ccd+bdd+2bcd+bbd+bbc+bcc$. Deleantur jam utrinque æqualia, & quantitates in zz ductæ unam partem æquationis constituant, reliquæ verò alteram, fietque

$$\begin{matrix} czz \\ +b \end{matrix} \infty \begin{matrix} +cc\,z \\ +2bc \\ +bb \end{matrix} \begin{matrix} +cdd \\ +ccd \\ +bdd \\ +2bcd \\ +bbd \end{matrix}$$

Deinde dividatur utrobique per $c+b$, ut oriatur

$$zz \infty \begin{matrix} +b\,z \\ +c \end{matrix} \begin{matrix} +dd \\ +bd \\ +cd \end{matrix}$$

sive translatis omnibus ad unam partem:

$$zz \begin{matrix} -b\,z \\ -c \end{matrix} \begin{matrix} -dd \\ -bd \\ -cd \end{matrix} \infty 0.$$

Postquam igitur percurrimus data propositionis, eaque sic enodavimus, ut difficultas omnis sit translata ad æquationem

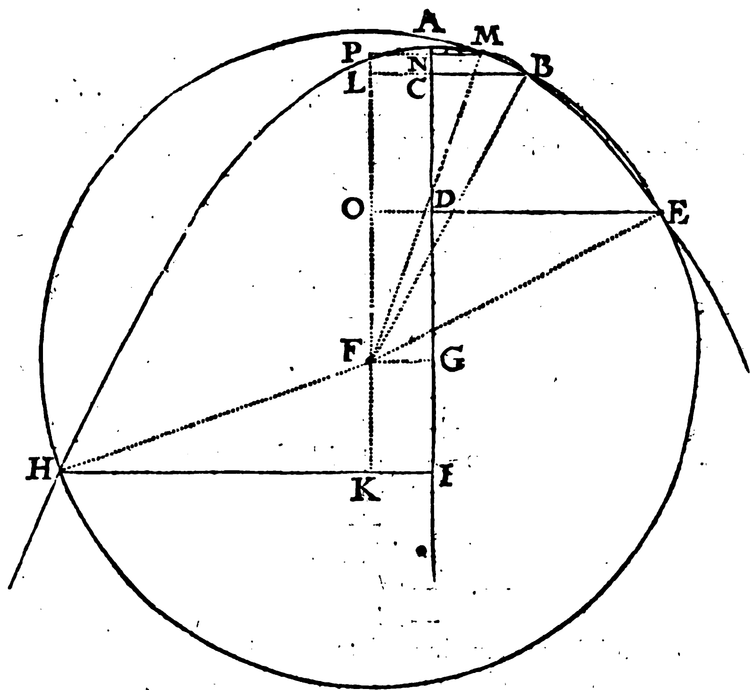
$$zz \begin{matrix} -b \\ -c \end{matrix} z \begin{matrix} -dd \\ -bd \\ -cd \end{matrix} \infty 0,$$

superest ut ostendamus eam quæsito propositionis satisfacere, quantùm quidem ex suppositis datis deduci

 duci

duci potest. Hunc in finem tentanda erit divisio æquationis per $z + b - c - d \propto 0$, ut constet num verum sit, quod intenditur. Quare cum tentatâ divisione reperiatur divisionem fieri posse, atque oriri $z + d \propto 0$, sequitur quoque quæsitum propositionis esse verum, hoc est, z æquari $b + c + d$, sive HI æqualem esse ipsis MN, BC, & ED simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

Unde liquet, si circulus non transiens per verticem Parabolæ eam tangat in M vel B, hoc est, rectas NM, CB sibi invicem æquales faciat, tunc HI æqualem fore ipsi DE, unà cum dupla ipsius NM vel CB. Si enim in hac ultima æquatione pro c scribatur b,



fiet æquatio $\begin{array}{l} zz - 2bz - dd \\ \quad\quad\quad\;\; - 2bd \end{array} \propto 0$, quæ dividi poterit per $z - d - 2b \propto 0$, & orietur $z + d \propto 0$. Id quod arguit z valere $d + 2b$,

$d + 2b$, hoc est, H I æqualem esse compositæ ex D E & dupla N M seu C B.

Præterea hinc constat, (quod sanè animadversione dignum) si recta tangens Parabolam in aliquo puncto extra verticem ipsa ibidem quoque tangatur à Circulo non per verticem transeunte, quique Parabolam in eodem puncto secet, hoc est, ut rectæ N M, C B, & D E omnes tres sint inter se æquales: quòd tunc quidem H I ipsius N M, C B, vel D E tripla sit futura. Quippe considerando N M vel C B bis sumendam esse, propter hujus rectæ contactum in M vel B, ac deinde adhuc semel, propter Circuli & Parabolæ in eodem puncto intersectionem. Vel etiam in æquatione inventa

$$\begin{array}{lll} zz & -bz & -dd \;\infty\; 0 \\ & -c & -bd \\ & & -cd \end{array}$$

pro c & d scribendo b, ac deinde $zz - 2bz - 3bb \infty 0$ dividendo per $z - 3b \infty 0$. oritur namque $z + b \infty 0$. Id quod arguit z valere $3b$, hoc est, H I triplæ ipsius N M, C B, vel D E esse æqualem.

Denique secet Circulus H B E Parabolam extra verticem A, ab utraque parte axis in duobus punctis; hinc quidem in H & M; istinc verò in B & E. Dico itidem H I, M N simul sumptas ipsis B C, E D simul sumptis esse æquales.

Positis enim iisdem quæ priùs, invenietur similiter, sicut ante ostendimus, quadratum ex F M esse $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$. Et quoniam per definitionem Circuli rectæ lineæ F B & F M sunt æquales, erunt quoque earum quadrata æqualia: $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$. Unde deletis utrinque æqualibus, & reliquis per aa multiplicatis, si transferantur porrò quantitates in x ductæ, ut unam partem æquationis efficiant, reliquæ verò alteram, fiet $c^4 - b^4 + 2aacy + 2aaby + aacc - aabb \infty 2accx - 2abbx$. Divisâ autem utrâque parte per $c + b$, orietur $c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab \infty 2acx - 2abx$. Ubi rursus si utrinque dividatur per $2ac - 2ab$, orietur $x \infty \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$.

Eodem modo, cum rectæ F E & F M sint æquales, erunt etiam earum quadrata $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ &

 $xx -$

$xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$ æqualia. Quare si demantur utrobique æquales, & reliquæ ducantur in aa, nec non quantitates in x ductæ disponantur ad unam, reliquæ verò ad alteram æquationis partem constituendam, fiet $d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \infty 2addx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $d + b$, & proveniet $d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab \infty 2adx - 2abx$, & rursus utrinque per $2ad - 2ab$, orieturque $x \infty \frac{d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab}{2ad - 2ab}$.

Quia verò quæ uni æquantur, illa quoque æqualia sunt inter se, erit $\frac{d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab}{2ad - 2ab}$ $\infty \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$. Brevitatis autem causâ pro $- b^3 + 2aay - aab$ scribatur, propter earundem quantitatum amphiboliam, $8\, e^3$, & multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, seu, quod idem est, diviso utriusque denominatore per $2a$, instituatur porrò multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cd^3 - bd^3 - bcdd + bbdd + bbcd - b^3d + aacd - aabd \, 8 \, ce^3 \, 8 \, be^3 \infty c^3d - c^3b - bccd + bbcc + bbcd - b^3c + aacd - aabc \, 8 \, de^3 \, 8 \, be^3$. Et, deletis

Signum 8 significat + vel —.

Signum 8 significat + vel — sensu contrario

tis utrinque æqualibus, restitutoque valore quantitatis assumptæ $8\,e^3$, fiet $cd^3 - bd^3 - bcdd + bbdd - b^3d - aabd - b^3c + 2aacy - aabc \infty c^3d - c^3b - bccd + bbcc - b^3c - aabc - b^3d + 2aady - aabd$. Ubi si demum demantur utrobique æquales quantitates, & quæ in y ductæ sunt transferantur, ut unam faciant æquationis partem, reliquæ autem alteram, ac tandem divisio instituatur per $d - c$, orietur $cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc \infty 2aay$.

prioris signi, h. e., cùm per signum 8 intelligitur +, tum per signum 8 intelligitur —; aut cùm per signum 8 intelligitur —, tum per signum 8 intelligitur +.

Similiter, cum rectæ HF & FM æquales sint, erunt quoque earum quadrata $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2zy + yy$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$ æqualia. Unde ablatis utrinque æqualibus, reliquisque multiplicatis per aa, adhibeatur porrò translatio, ut quantitates in x ductæ unam teneant æquationis partem, reliquæ verò alteram, fietque $z^4 - b^4 + 2aaby - 2aazy + aazz - aabb \infty 2azzx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $z - b$, & orietur $z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab \infty 2azx + 2abx$. Rursus dividatur utrinque per $2az + 2ab$, & habebitur $x \infty \frac{z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab}{2az + 2ab}$.

Quia verò & supra quantitas x inventa fuit $\infty \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$, erunt $\frac{z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab}{2az + 2ab}$ & $\frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$ inter se æqualia. Brevitatis caussâ, scribatur rursus $8\,e^3$ pro $-b^3 + 2aay - aab$, & $8\,e^3$ pro $+b^3 - 2aay + aab$, & multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, seu, quod idem est, diviso utriusque denominatore per $2a$, instituatur multiplicatio per crucem, ut fractiones evanescant, fietque $cz^3 - bz^3 + bczz - bbzz + bbcz - b^3z + aacz - aabz\; 8\,ce^3\; 8\,be^3 \infty c^3z + bc^3 - bccz - bbcc + aacz + b^3c + bbcz + aabc\; 8\,ze^3\; 8\,be^3$. Ablatis porrò utrinque æqualibus, restitutisque valoribus quantitatum assumptarum $8\,e^3$ & $8\,e^3$, fiet $cz^3 - bz^3 + bczz - bbzz - b^3z - aabz + b^3c - 2aacy + aabc \infty c^3z + bc^3 - bccz - bbcc + b^3c + aabc - b^3z + 2aazy - aabz$. Ubi si rursus utrobique demantur æquales, & quantitates in y ductæ ad unam

 partem

partem revocentur, reliquæ verò ad alteram, ac demum utraque pars æqualitatis dividatur per $z + c$, orietur $czz - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \infty 2aay$.

Cum verò & supra inventum fuerit $cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc \infty 2aay$, &, quæ eidem æquantur, inter se quoque sint æqualia, erit $czz - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \infty cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc$. Deleantur utrinque æqualia, & quantitates in zz ductæ unam partem æquationis constituant, reliquæ verò alteram, habebiturque

$$\begin{array}{llll} +czz & \infty & +ccz & +cdd \\ -b & & -2bc & +ccd \\ & & +bb & -bdd \\ & & & -2bcd \\ & & & +bbd \end{array}$$

Ubi tandem si utrobique dividatur per $c - b$, orietur

$$\begin{array}{llll} zz & \infty & cz & +dd \\ & & -b & +cd \\ & & & -bd \end{array}$$

Hoc est, si collocentur quantitates omnes ad unam partem, erit

$$\begin{array}{llll} zz & -cz & -dd & \infty\, 0. \\ & +b & -cd & \\ & & +bd & \end{array}$$

Quare postquam percurrimus omnia propositionis data, eaque sic enodavimus, ut difficultas omnis reducta sit ad æquationem

$$\begin{array}{llll} zz & -cz & -dd & \infty\, 0: \\ & +b & -cd & \\ & & +bd & \end{array}$$

superest ut ipsa contineat quæsitum propositionis, modò sit verum atque ex datis deduci possit. Ad quod explorandum, videri debet, num æquatio inventa dividi possit per $z - c - d + b \infty 0$. Quare cum reperiatur divisionem fieri posse, atque oriri $z + d \infty 0$, sequitur quæsitum propositionis esse verum, hoc est, $z + b$ æquari $c + d$, sive H I & M N simul sumptas æquales esse ipsis B C & E D simul sumptis. Quod erat demonstrandum.

Unde liquet, si Circulus non transiens per verticem Parabolæ eam tangat in B vel E, hoc est, rectas C B, D E sibi invicem æquales faciat, tunc H I, M N simul sumptas ipsius C B vel D E duplas fore.

Si enim in hac ultima æquatione pro d scribatur c, erit æquatio

tio talis: $\begin{array}{l} zz - cz - 2cc \infty 0 \\ \quad\;\; + bz + bc \end{array}$, quæ dividi potest per $z - 2c + b \infty 0$, & oritur $z + c \infty 0$. Id quod arguit, z valere $2c - b$, sive $z + b$ esse $\infty 2c$, hoc est, H I & M N simul sumptas æquales esse ipsi C B seu D E bis sumptæ.

Quare constat Theorematis veritas.

Si autem habeatur $z^3 \infty * - pz + q$, regula, cujus inventionem Cardanus &c.] Quò ea, quæ de exprimendis radicibus Æquationum Cubicarum Autor hìc breviter perstrinxit, cuivis manifestiora fiant: visum fuit post sequentis loci illustrationem afferre huc Appendicem, quam de Cubicarum Æquationum resolutione anno 1646 simul cum Organica Conicarum Sectionum descriptione in lucem emisimus, & nunc emendato hìc illìc sensu cum additione quorundam subjungimus. Y

Hanc autem curvam in 6 diversis punctis secare potest, ita ut hìc sex diversæ radices in Æquatione haberi queant. Atque cùm illam in paucioribus secat, hoc indicio est, quasdam ex hisce radicibus inter se æquales esse, aut ipsarum aliquas esse tantùm imaginarias.] Quoniam hìc nonnulli scrupulum sibi ipsis injiciunt, concipiendi, quì fieri possit, ut circulus aliquis hanc curvam in 6 diversis punctis secet: haud abs re fore credidi, si hoc loco exemplum, quod sibi jam pridem ingeniosissimus Huddenius, ad difficultatem hujus rei è medio tollendam, subjecit, adducerem. Z

Quocirca sumendo ad hoc æquationem $y^6 - 21y^5 + 169y^4 - 675y^3 + 1414yy - 1464y + 576 \infty 0$, cujus radices, ut, 1, 2, 3, 3, 4, & 8, sunt omnes veræ ac rationales, & ex his duæ, ut 3 & 3, ad calculi prolixitatem evitandam, inter se æquales: oportet, ad curvæ hujus descriptionem, assumere A B $\infty \frac{1}{2}p \infty 10\frac{1}{2}$,

$p \infty$	21
$q \infty$	169
$r \infty$	675
$s \infty$	1414
$t \infty$	1464
$v \infty$	576

B K $\infty \sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$ seu $n \infty \sqrt{\frac{479}{4}}$, & E D vel T V $\infty \frac{2\sqrt{v}}{pn} \infty \sqrt{\frac{9216}{211239}}$. Deinde, ut inveniatur circulus P C N, oportet, acceptâ B L æquali E D $\infty \sqrt{\frac{9216}{211239}}$, assumere L H $\infty \frac{t}{2n\sqrt{v}} \infty \sqrt{\frac{3721}{479}}$; & ex puncto H erectâ perpendiculari H I $\infty \frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$ *Vide figuras pag. 98 & 100.*

(id quod brevitatis causâ vocetur $\frac{m}{nn}$) $\infty \frac{2727}{479}$, in circulo cujus

diame-

diameter IL inscribere LP $\infty \sqrt{\frac{s+p\sqrt{v}}{nn}} \infty \sqrt{\frac{7672}{479}}$: eritque IP radius quæsiti circuli $\infty \sqrt{\frac{mm}{n^4} + \frac{tt}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn}} \infty \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$.

Jam ut constet, circulum hunc ex I intervallo invento IP descriptum secare vel tangere curvam ACN in tot diversis punctis, quot æquatio inæquales habet radices, hoc est, hic in 5 diversis punctis, cum propter duas æquales 3 & 3 circulus hanc curvam ibidem non secet sed tangat: considerandum est, lineam IM esse $\infty \frac{m}{nn} - y$ vel $y - \frac{m}{nn}$, adeoque quadratum ex IM semper esse $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$, & lineam GH vel CM semper $\infty \frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{ty}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}$. Ac proinde, si, tribuendo radici y unumquemque ex supra dictis valoribus, ex lineis hisce, per 47 primi Elem. Eucl., quæramus lineam IC, eamque singulis vicibus æqualem reperiamus radio ante invento IP $\infty \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$: certum est, quòd circulus PCN eandem curvam ACN, quemadmodum indicatum fuit, sit secturus vel tacturus.

Hinc,

si ponatur $y \infty 1$, erit $\begin{cases} \square \text{IM}.\ \frac{5053504}{229441} \\ \square \text{CM}.\ \frac{490496}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ IC. $\frac{5544000}{229441}$.

$y \infty 2$, erit $\begin{cases} \square \text{IM}.\ \frac{3129361}{229441} \\ \square \text{CM}.\ \frac{2414639}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ IC. $\frac{5544000}{229441}$.

$y \infty 3$, erit $\begin{cases} \square \text{IM}.\ \frac{1664100}{229441} \\ \square \text{CM}.\ \frac{3879900}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ IC. $\frac{5544000}{229441}$.

$y \infty 4$, erit $\begin{cases} \square \text{IM}.\ \frac{657721}{229441} \\ \square \text{CM}.\ \frac{4886279}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ IC. $\frac{5544000}{229441}$.

$y \infty 8$, erit $\begin{cases} \square \text{IM}.\ \frac{1221025}{229441} \\ \square \text{CM}.\ \frac{4322975}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ IC. $\frac{5544000}{229441}$.

Ex quibus igitur apparet, quòd, assumptâ qualibet ex radicibus, linea IC semper ipsi IP inveniatur æqualis, hoc est, quòd circulus, qui ex I intervallo IP describitur, curvam ACN in 5 diversis punctis secet vel tangat, in tot videlicet, quot æquatio proposita diversos admittit radicis valores. Quod erat ostendendum.

Eodem modo liquet, si æquatio proposita 6 radices inæquales habuerit, quòd tunc quoque circulus PCN curvam ACN in 6 diversis punctis secet.

A P-

APPENDIX,

DE

CVBICARVM

ÆQVATIONVM RESOLVTIONE.



Æquationes Cubicæ omnes, & Quadrato-quadratæ, * quæ quidem & ad Cubicas reducuntur, quarum radix duarum est dimensionum, semper ad aliquam trium sequentium formularum reduci possunt.

** Vide quæ habentur pag. 92. à lin. 11 usque ad finem ejusdem paginæ.*

$$z^3 \propto * -pz+q.$$
$$z^3 \propto * +pz+q.$$
$$z^3 \propto * +pz-q.$$

In priori autem formulâ, ubi z^3 æquatur $-pz+q$, regula Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferrèo tribuit, nos docet radicem esse $\sqrt{C.\,+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}-\sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$.

Quemadmodum etiam si habeatur $z^3 \propto +pz+q$, in qua quadratum semissis ultimi termini sit majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi termini, similis regula ostendit radicem fore $\sqrt{C.\,+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\,+\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}$.

Unde liquet in omnibus Problematibus, quorum difficultates ad æquationem hujus vel illius formulæ reducuntur, ejus æquationis radices, aliàs numero non explicabiles, semper hoc modo juxta Cardani regulas per latera cuborum quorundam, quorum contentum cognoscitur, exprimi posse.

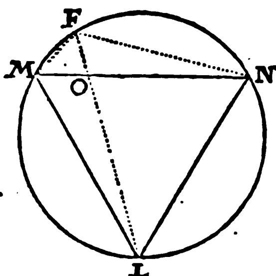
Deinde verò si habeatur $z^3 \propto +pz+q$, ubi $\tfrac{1}{4}qq$ sit minus quàm $\tfrac{1}{27}p^3$, ibi prædicta regula non habet locum, nec ejusdem beneficio radix ullo modo intelligibili explicari potest, sicut inferiùs ostendemus. Quæ quidem res olim multæ fuit caliginis, & ut scribit Albertus Girardus in libello cui titulus: *Invention nouvelle en l'Algebre*, qui anno 1629 prodiit: *hoc est, in quo Autores hactenus fuerunt valde intricati, & ut verum fatear in re quàm maximè difficili.*

Hinc, quæ hùc spectant subobscura, aut neglectâ demonstra-

tione apud prædictos Autores invenimus, ea illustrare nobis visum fuit: præmittentes ad hoc sequentia Theoremata demonstrata.

THEOREMA I.

Si fuerit triangulum æquilaterum M N L circulo inscriptum, atque ex L educta utcunque recta L F usque ad circumferentiam in F, quæ secet M N in O, junctæque rectæ M F, F N: Dico F L æqualem esse ipsis M F, F N simul sumptis.



Triangula enim L N O & L N F similia sunt, cum habeant angulum ad L communem, & angulum L N O, hoc est, L M N ipsi L F N [1] æqualem, unde & tertius L O N tertio L N F [2] æqualis est. Quocirca [3] erit ut N O ad L N, ita F N ad L F. Eodem modo cum similia sint triangula L M O & L F M, erit ut M O ad L M seu L N, ita F M ad L F. Igitur [4] erit, ut N O, M O simul ad L N, ita F N, F M simul ad L F. Æquales autem sunt N O, M O simul sumptæ ipsi L N, æquales ergo quoque erunt F N, F M simul sumptæ ipsi L F. Quod erat ostendendum.

[1] per 21 prop. tertii Elem.
[2] per 32 primi Elem.
[3] per 4tam sexti Elem.
[4] per 24 quinti Elem.

THEOREMA II.

Iisdem positis, ductâ diametro F H K, sumatur arcus G L K triplus arcûs L K, jungaturque G F: Dico similiter arcum G M F arcus M F, nec non arcum G N F arcûs N F triplum esse.

Ducatur enim diameter L H P. Hæc namque secabit arcum M F N bifariam in P. Quoniam autem propter triangulum æquilaterum M N L circumferentia circuli dividitur in tres partes æqua-

æquales, ac ipsa tripla est arcus M P N, erit & semicircumferentia F M K tripla arcus M P. Quocirca cum eadem ratio sit arcus F M K ad arcum M P, totius ad totum, quæ arcus G L K ad arcum L K seu F P, ablati ad ablatum, erit quoque reliqui arcus G M F ad reliquum arcum M F eadem ratio, quæ totius ad totum *. Triplus autem est arcus F M K arcus M P. Triplus ergo etiam est arcus G M F arcus M F. Quod erat demonstrandum.

* *per 19 quinti Elem.*

Eodem modo ostenditur arcum G N F arcus N F triplum esse.

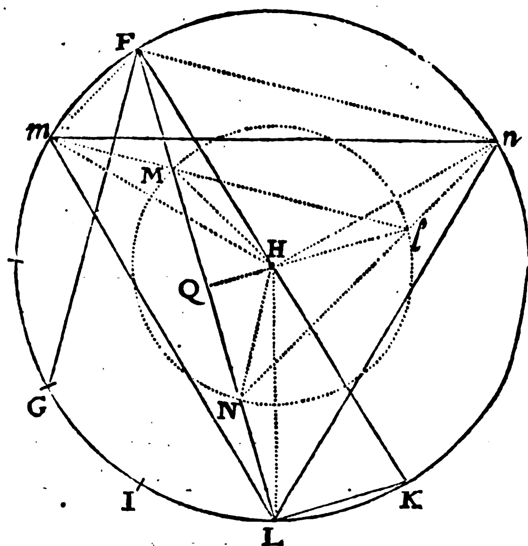
THEOREMA III.

Iisdem positis, ducatur recta *n* N parallela F *m*, occurrens rectæ F L in N; itemque *m* M *l* parallela F *n*, secans quidem rectam F L in M, occurrens autem ductæ *n* N in *l*: Dico si ducantur H *l*, H N, & H M ipsas inter se æquales esse, unamquamque verò æqualem rectæ L K.

Quoniam enim anguli *m* F M & N F *n* singuli circumferentiæ tertiæ parti insistunt, & ob parallelas ductas angulus F M *m* angulo N F *n* æquatur, at angulus F N *n* angulo *m* F M: erunt triangula *m* F M & N F *n*, quemadmodum etiam triangulum N M *l* æquiangula, ac proinde æquilatera. Porrò cum F L æquetur ipsis *m* F, F *n* simul sumptis (ut supra ostensum fuit); atque ablata F M ipsi *m* F, erit reliqua M L ipsi F *n* æqualis: cumque F N æquetur ipsi *m l*, erunt quoque M L & *m l*, atque adeò omnes tres *m l*, *n* N, & M L inter se æquales. Unde si ab his æqualibus rectis auferantur rectæ inter se æquales M *l*, N *l*, & M N, remanebunt similiter *m* M, *n l*, & N L inter se æquales. Præterea cum *m n*, *n* L, & L *m* tres rectæ sint inter se æquales, liquet triangula *m n l*, *n* L N, & L *m* M

 inter

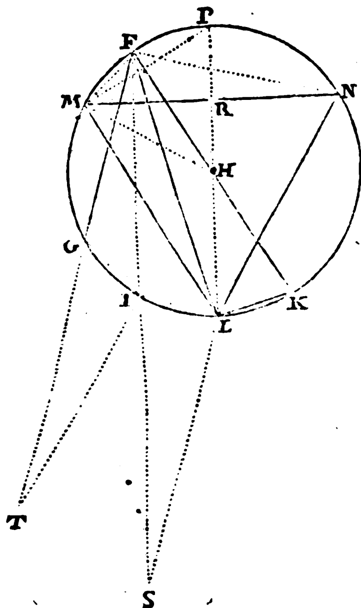
inter se constare ex æqualibus lateribus, ipsaque ob hoc & angulos singulos singulis æquales habere, hoc est, æquales inter se erunt anguli *m n l*, *n* L N, & L *m* M. Quia autem & anguli *m n* H, *n* L H, & L *m* H inter se æquales sunt, patet, si hi ex prædictis æqualibus inter se angulis demantur, reliquos itidem angulos H *n l*, H L N, & H *m* M inter se æquales fore. Denique, propter æqualitatem radiorum H *n*, H L, & H *m*, perspicuum est, triangula H *n l*, H N L,



& H *m* M habere inter se duo latera duobus lateribus, utrumque utrique æqualia; ac insuper angulum angulo, inter æqualia latera contentum: unde & basin basi æqualem habebunt, atque adeò æquales inter se erunt rectæ H *l*, H N, & H M. Quòd autem præterea unaquæque ex ipsis æquetur rectæ L K, consequenter sic ostenditur. Producatur *l* H ut secet F L in Q. Hæc igitur ad rectos angulos cadet in F L, atque eam bifariam secabit in Q. Quia porrò, propter similitudinem triangulorum F L K & F Q H, F L est ad L K, ut F Q ad Q H; & permutando F L ad F Q, ut L K ad Q H, atque F L ipsius F Q est dupla: erit quoque L K ipsius

QH dupla. Dupla autem etiam est Hl ipsius QH, siquidem æquilaterum est triangulum MlN: quare & Hl nec non HM, HN ipsi LK æquales erunt. Quod erat ostendendum.

Ex his perspicua sunt ea, quæ ab Alberto Girardo afferuntur in libello supra citato, ubi docet quo pacto radix æquationis 1 ③ ∞ 13 ① + 12, in qua cubus trientis numeri radicum major est quadrato semissis numeri absoluti, sit exprimenda.



Ut autem pateat MN esse $\sqrt{13}$, ob 13 ① in æquatione, sciendum est ductis rectis HM, MP triangulum HMP esse æquilaterum, ac proinde quadratum MR triplum esse quadrati HR. Quocirca cum eadem sit ratio duplæ MR, hoc est, ipsius MN ad duplam HR, hoc est, HP, quàm simplæ MR ad simplam HR: erit quoque quadratum MN quadrati HP triplum. Unde si statuamus radium circuli æqualem radici quadratæ ex triente numeri radicum 13, hoc est, ∞ $\sqrt{4\frac{1}{3}}$, liquet MN tunc fore $\sqrt{13}$. Sicut proponebatur.

Lubet autem propositum ipsius ulteriùs inquirere, atque rem omnem paucis patefacere.

In quem finem ejusmodi quæstionem proponimus.

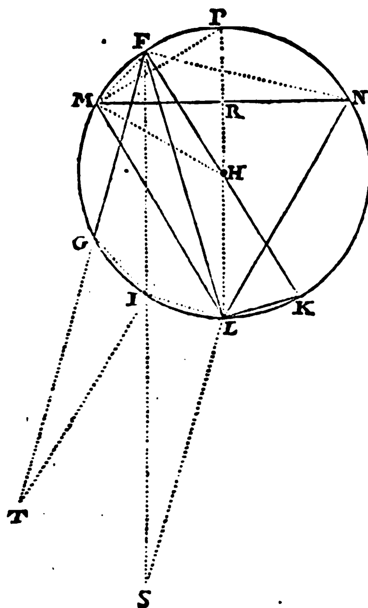
Circulo existente FGK, *cujus diameter* FK, *in eoq; inscriptâ* FG, *trifariam secetur arcus* GK, *à diametro & inscriptâ interceptus, in punctis* I *&* L, *& recta connectatur* FL; *datâ*

 autem

autem F H *seu* H K ∞ *a*, *&* F G ∞ *b*, *oporteat invenire* F L ∞ *x*.

Jungantur K L, L I, & I G, ductâque F I producatur ad S, donec angulus F S L æquetur angulo I F L: eritque S L æqualis L F, & S I æqualis F L. Æqualis enim est S L ipsi L F [1], & S I ipsi F K, propter triangula I L S & K L F, quorum duo anguli L I S & S unius singuli sunt æquales duobus L K F & L F K alterius [2], ac præterea latus I L lateri L K [3]. Eodem modo, productâ F G donec angulus F T I æquetur angulo G F I; erit similiter T I æqualis I F, atque T G ipsi L F. Porrò cum similia sint triangula F H L, F L S, & F I T: erit ut H F ad F L, ita L F ad F S. Unde cum H F sit ∞ *a*, & F L ∞ *x*, erit F S ∞ $\frac{xx}{a}$, è quâ si auferatur S I seu K F ∞ $2a$, relinquetur I F ∞ $\frac{xx}{a} - 2a$. Eâdem ratione, cum sit ut H F ad F L, ita I F ad F T, erit F T ∞ $\frac{x^3}{aa} - 2x$, è quâ si tollatur T G seu F L ∞ *x*, remanebit G F ∞ $\frac{x^3}{aa} - 3x$. Restat igitur, ut $\frac{x^3}{aa} - 3x$ adæquetur ipsi G F datæ ∞ *b*. Quare æqualitate ordinatâ, x^3 æquabitur $3aax + aab$. Quæ æquatio secundæ formulæ est, in quâ quadratum semissis ultimi termini est minus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi: majus enim est a^6 quàm $\frac{1}{4}a^4bb$. Nam si utrobique dividamus per a^4, fit aa majus quàm $\frac{1}{4}bb$, cum, utrinque extrahendo radicem, *a* fiat majus quàm $\frac{1}{2}b$, seu $2a$ majus quàm *b*. Ut est manifestum, cum $2a$ dia-

[1] per 6 primi Elem.
[2] per 21 & 22 tertii Elem. nec non 13 primi Elem.
[3] per 29 tertii Elem.



a diametrum circuli referat, b autem in eodem inscriptam G F, atque diameter omnium rectarum circulo inscriptarum [1] sit maxima. Unde si a^6 æquetur $\frac{1}{4} a^4 bb$, tunc quoque inscripta G F æqualis erit diametro F K: ita ut eo casu duæ hæ lineæ coincidant, ac eadem fiat quæstio ac si semicircumferentia F G K in tres æquales partes secanda foret. Quo quidem casu radix quæsita F L fit latus trianguli æquilateri, eodem circulo inscripti.

[1] per 15 tertii Elem.

E quibus plana fiunt illa, quæ ad explicationem radicis supradictæ æquationis 1 ③ ∞ 13 ① + 12 Albertus Girardus in medium affert. Ubi inter $4\frac{1}{3}$ (tertiam partem ipsius 13) & unitatem, mediam proportionalem invenit $\sqrt{4\frac{1}{3}}$, eamque semidiametrum circuli statuit F H, quâ ut radio ipsum describit, ac in eo deinde lineam F G adaptat æqualem $2\frac{10}{13}$, (quotienti videlicet divisionis 12 per $4\frac{1}{3}$). In quo porrò trifariam secando arcum G K in punctis I & L, jungendoque F L, ait F L esse valorem radicis quæsitæ 1 ① æquationis propositæ. Dicens præterea alios duos valores ipsius ①, per — expressos, designari per rectas F M, F N, eosque duobus modis inveniri. Juxta priorem quidem, si [2] centro H & intervallo L K arcus describatur M N, secans F L in M & N; Juxta posteriorem verò, [3] describendo in circulo à puncto L triangulum æquilaterum L M N, jungendoque F M & F N. Illas enim utroque modo easdem inveniri, ex supra demonstratis manifestum est.

[2] ut in fig. pag. 348.

[3] ut in fig. pag. 347.

Ubi præterea notat in æquatione 1 ③ ∞ 13 ① — 12 ostensos valores prioris æquationis radici quæsitæ propositæ æquationis satisfacere, si tantùm eorum signa + & — immutaverimus, eaque denotaverimus per — F L, + F M, & + F N. Sed hoc ex sequentibus perspicuum fiet. Quemadmodum etiam illud, quod spectat ad æquationes secundæ formulæ, quas inquit neminem ad suum usque tempus resolvere scivisse, quæ secundùm Analysin speciosam Vietæ ita denotantur:

$$\text{A cubus æqualis} \left.\begin{matrix} +\text{BB} \\ +\text{BC} \\ +\text{CC} \end{matrix}\right\} \text{in A} \left.\begin{matrix} +\text{B} \\ +\text{C} \end{matrix}\right\} \text{in BC}.$$

Quòd eodem recidit ac si earundem constitutionem sic agnosceres, conciperesque è duobus lateribus, puta B & C, facta esse tria proportionalia plana B B, B C & C C, quorum aggregatum sit B B + B C + C C, seu quantitas p; & quod fit ex medio plano

plano in aggregatum eorundem laterum fit $\overline{B+C}$ in BC, seu quantitas q. Quod quidem ultimum factum sic quoque interpretari poteris, dicendo illud produci ex multiplicatione duorum priorum planorum in latus secundum; vel etiam ex summa duorum posteriorum planorum in latus primum: cum tria illa solida inter se æqualia sint, ut experienti constabit.

Ut autem penitiùs hæc introspiciamus, atque æquationum harum constitutionem agnoscamus, ponamus $x \propto d$ seu $x - d \propto 0$, & rursus $x \propto - b$ seu $x + b \propto 0$, ac denuo $x \propto - c$ seu $x + c \propto 0$, ducamusque $x - d \propto 0$ in $x + b \propto 0$, tum verò quod inde fit in $x + c \propto 0$, & prodibit æquatio:

$$\begin{array}{llll} x^3 - dxx & - bdx & - bcd \propto 0, \text{ vel } x^3 \propto & + dxx \quad + bdx + bcd. \\ \quad + b & - cd & & - b \qquad + cd \\ \quad + c & + bc & & - c \qquad - bc \end{array}$$

In qua si ponatur d, verus valor radicis x, æqualis $b + c$, duobus falsis valoribus ipsius x simul sumptis, tunc quidem $+ d$ destruet $- b - c$, fietque $0\,xx$, hoc est, evanescet adfectio sub quadrato, nec ampliùs sese destruent. Nam cùm ex hypothesi d æquatur $b + c$, communi multiplicatore d, fiet quoque dd æquale $bd + cd$. At verò dd majus est quàm bc, quandoquidem idem valet quod $bb + 2bc + cc$, quadratum videlicet à $b + c$. Quare & $bd + cd$ majus erit quàm bc, manebitque adfectio sub latere cum signo $+$. Ita ut, si $+ bd + cd - bc$ interpreteris per $+ p$, & $+ bcd$ per $+ q$, æquatio hanc recipiat formam: $x^3 \propto * + px + q$. Quam itaque constat tres admittere diversos radicis valores, unum quidem verum seu $+$ quàm 0, & alios duos falsos seu $-$ quàm 0, qui simul sumpti ipsi vero sunt æquales.

Porrò, ut hæc æquatio tres semper ejusmodi radicis valores recipiat, requiritur, ut in illâ $\frac{2}{3}p \sqrt{\frac{1}{3}p}$ non sit minus quàm q, seu quod idem est, ut $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non sit minus quàm $\frac{3q}{p}$, sive etiam $\frac{1}{27}p^3$ non minus quàm $\frac{1}{4}qq$. Quandoquidem, si p planum in tria plana dividitur proportionalia, maximum solidum, quod fit ex ductu summæ duorum priorum vel duorum posteriorum in latus secundum vel primum, est illud, quod fit, cùm p planum in tria plana æqualia dividitur.

Aliàs enim radix ejusdem æquationis de unico tantùm valore explicabilis est, utpote verò, cum æquatio tunc non producatur ex du-

ex ductu trium ejusmodi laterum in se invicem, nisi duo sumantur fictitia seu non existentia, quæ & impossibilia appellantur. Quemadmodum in exemplum afferre licet æquationem $1\,C \infty 6\,N + 40$, ubi $1\,N$ valet $+ 4$, cum $1\,C \pm 0\,Q - 6\,N - 40 \infty 0$ dividatur per $1\,N - 4 \infty 0$, oriaturque æquatio impossibilis $1\,Q + 4\,N + 10 \infty 0$, quæ nullas omnino admittit radices. Nisi velis illas, quarum sanè valor nullo modo comprehendi potest, utcunque tamen exprimere, ut scribendo $1\,N \infty -2 + \sqrt{-6}$, nec non $1\,N \infty -2 - \sqrt{-6}$. Ita ut verus valor ipsius $1\,N$ realis existat & sit 4, & duo falsi fictitii sint $-2 + \sqrt{-6}$, & $-2 - \sqrt{-6}$. Signum $\pm$ significat + vel —.

Quòd si verò proponatur æquatio 1 ℭ ∞ 6 ꝛ + 6, seu 1 ℭ ± 0 ʒ — 6 ꝛ — 6 ∞ 0, quæ per 1 ꝛ + vel — aliquo numero, ultimum terminum 6 dividente, dividi nequit, poterit neque radix ejus 1 ꝛ per ullum numerum absolutum vel fractum designari; sed verum valorem admittet, qui est irrationalis, quique juxta secundam Cardani regulam (hìc ante expositam) sic exprimitur: 1 ꝛ ∞ $\sqrt{}$ℭ 4 + $\sqrt{}$ℭ 2.

In quo porrò sensu æquatio prioris formulæ accipi debet, quæ nullæ determinationi est obnoxia. Nam si, verbi gratiâ, proponatur $1\,C \infty -3\,N + 14$, poterit $1\,C \pm 0\,Q + 3\,N - 14 \infty 0$ dividi per $1\,N - 2$, & orietur æquatio impossibilis $1\,Q + 2\,N + 7 \infty 0$. Unde liquet $1\,N$ valere tantùm 2, nec ullos alios valores admittere; nisi eos sic velis exprimere $-1 + \sqrt{-6}$, & $-1 - \sqrt{-6}$.

Sin autem æquatio ejusdem formulæ sit 1 ℭ ∞ — 3 ꝛ + 10 seu 1 ℭ ± 0 ʒ + 3 ꝛ — 10 ∞ 0, quæ per 1 N — aliquo numero, ultimum terminum 10 dividente, dividi nequit, valor quoque verus radicis nullo numero absoluto vel fracto designari poterit. Quo igitur casu explicabitur secundùm priorem Cardani regulam, hoc modo: 1 ꝛ ∞ $\sqrt{}$ℭ. $\sqrt{26} + 5$ — $\sqrt{}$ℭ. $\sqrt{26} - 5$.

Sed hæc mittentes veniamus ad ea, quibus secundæ formulæ æquationis usum detegamus. Proponentes in eum finem hoc quod sequitur

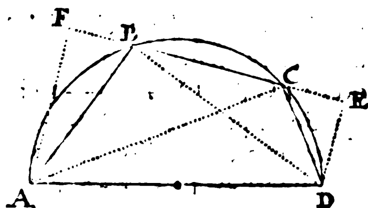
PROBLEMA.

In semicirculo supra diametrum A D *descripto quadrilatero* A B C D, *cognita sint tria ejus latera* A B, B C, *&* C D: *Oporteatque invenire diametrum seu quartum latus* A D.

Esto A B ∞ a, B C ∞ b, C D ∞ c, diameter verò A D ∞ x; ducaturque recta B D, atque in B C productam perpendicularis demittatur D E

[1] per 31 tertii Elem.
[2] per 47 primi Elem.
[3] per 12 secundi Elem.

Quia itaque [1] triangulum A B D est rectangulum, ideoque [2] quadratum A D æquale duobus quadratis A B, B D: si à quadrato A D ∞ xx subducatur quadratum A B ∞ aa, relinquetur quadratum B D ∞ $xx - aa$. Porrò quoniam obtusangulum est triangulum B D C, atque [3] quadratum B D majus quadratis B C, C D simul sumptis, duplo rectangulo B C E; si à quadrato B D ∞ $xx - aa$ subducamus aggregatum quadratorum B C, C D ∞ $bb + cc$, restabit duplum rectangulum B C E ∞ $xx - aa - bb - cc$. Denique cum similia sint triangula A B D & C E D, siquidem ipsa rectangula sunt, ac angulos præterea A & D C E [4] æquales habent: erit ut D A ad A B, ita D C ad C E. Unde cum A D sit ∞ x, A B ∞ a, & D C ∞ c: erit C E ∞ $\frac{ac}{x}$.



[4] per 22 tertii & 13 primi Elem.

Quæ si ducatur in duplam B C ∞ $2b$, fiet duplum rectangulum B C E ∞ $\frac{2abc}{x}$. Æquandum propterea duplo rectangulo B C E ante invento ∞ $xx - aa - bb - cc$. Quare $\frac{2abc}{x}$ æquabitur $xx - aa - bb - cc$. Hoc est ordinatâ æqualitate, erit

$$x^3 \infty \begin{array}{l} + aax + 2abc. \\ + bb \\ + cc \end{array}$$

Unde cum hæc æquatio sit cubica secundæ formulæ, videndum deinceps an quadratum semissis ultimi termini sit majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi, an verò ipsi æquale, an eo

eo minus. In quem finem quæro tam hunc cubum quàm illud quadratum. Triens autem quantitatis cognitæ penultimi termini est $\frac{aa+bb+cc}{3}$, ejus cubus

$$\frac{a^6+3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6}{27}.$$

Quadratum autem semissis ultimi termini est $aabbcc$. Oportet itaque horum utriusque relationem indagare. In quem finem productas quantitates $a^6+3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6$ & $27aabbcc$ inter se confero, ut sequitur.

$3a^4bb$. $3aabbcc$. $3bbc^4$. sunt tres proportionales in ratione aa ad cc, unde $3a^4bb+3bbc^4$ majus erit quàm $6aabbcc$, per 25 quinti Elementorum.

Sic $3aab^4$. $3aabbcc$. $3aac^4$. sunt tres proportionales in ratione bb ad cc, unde $3aab^4+3aac^4$ majus erit quàm $6aabbcc$.

Ut & $3a^4cc$. $3aabbcc$. $3b^4cc$. sunt tres proportionales in ratione aa ad bb, unde $3a^4cc+3b^4cc$ majus erit quàm $6aabbcc$.

Quare & omnes simul omnibus simul erunt majores, hoc est, erit $3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+3bbc^4+3aac^4+3b^4cc$ majus quàm $18aabbcc$.

Unde & illius subtriplum $a^4bb+aab^4+a^4cc+bbc^4+aac^4+b^4cc$ majus quàm hujus subtriplum $6aabbcc$.

Rursus quoniam a^6. a^4bb. aab^4. b^6. sunt proportionales continuè in ratione aa ad bb, erit a^6+b^6 majus quàm $a^4bb+aab^4$.

Sic etiam quia b^6. b^4cc. bbc^4. c^6. sunt proportionales continuè in ratione bb ad cc, erit b^6+c^6 majus quàm $b^4cc+bbc^4$.

Similiter cum a^6. a^4cc. aac^4. c^6. sint proportionales continuè in ratione aa ad cc, erit a^6+c^6 majus quàm $a^4cc+aac^4$.

Quare & simul omnes simul omnibus erunt majores, hoc est, erit $2a^6+2b^6+2c^6$ majus quàm $a^4bb+aab^4+b^4cc+bbc^4+a^4cc+aac^4$. Quia autem hoc ipsum majus est quàm $6aabbcc$, ut supra ostendimus, erit $2a^6+2b^6+2c^6$ majus quàm $6aabbcc$. Unde & semissis $a^6+b^6+c^6$ majus quàm $3aabbcc$.

Quocirca cum $3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+3bbc^4+3aac^4+3b^4cc$ majus sit quàm $18aabbcc$.
ac ipsi addatur $a^6+b^6+c^6$ —— —— —— quod majus est quàm $3aabbcc$.
& adhuc utrobique $6aabbcc$ —— —— —— —— —— $6aabbcc$.

Fiet quoque $a^6+3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+b^6+6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6$ majus quàm $27aabbcc$.

 E qui-

E quibus liquet cubum trientis quantitatis cognitæ penultimi termini majorem esse quadrato semissis ultimi, ac propterea radicem æquationis juxta regulam Cardani inveniri non posse.

Notandum autem porrò est, Problema propositum solidum esse, si tria latera data A B, B C, & C D inter se inæqualia statuantur, cum ad æquationem cubicam reducatur, quæ divisione ad quadratam reduci nequit. Cùm verò duo quælibet ex dictis lateribus sunt æqualia, tunc quidem æquatio reducitur ad quadratam. Ut si b & c æqualia fuerint, devenietur ad æquationem: $x^3 \begin{smallmatrix}-aa\\-2bb\end{smallmatrix} x - 2abb \propto 0$, quæ dividi poterit per $x + a \propto 0$, quâ ratione ipsa reducetur ad quadratam: $xx - ax - 2bb \propto 0$, quæ ulteriùs dividi nequit.

Sin autem tria latera æqualia ponantur, tunc quidem æquatio hanc accipiet formam; $x^3 - 3aax - 2a^3 \propto 0$, eaque dividi poterit per $x - 2a \propto 0$, orietur namque æquatio: $xx + 2ax + aa \propto 0$, duas admittens falsas radices, quæ sibi invicem sunt æquales. Unde sequitur verum valorem radicis x eo casu fore $2a$, & duos falsos valores esse $-a$ & $-a$. Hoc enim manifestum est, quoniam, si tria latera A B, B C, & C D æqualia inter se extiterint, figura A B C D fit semi-hexagonum regulare, in quo latus quodlibet semidiametro est æquale.

Porrò si velimus idem Problema per numeros resolvere, esto A B seu $a \propto 24$, B C seu $b \propto 20$, C D seu $c \propto 15$, & quæratur A D $\propto x$. Hinc, cum $aa + bb + cc$ inveniatur $\propto 1201$, & $2abc \propto 14400$, exurget ejusmodi æquatio: $x^3 \propto 1201x + 14400$, seu $x^3 * 0xx - 1201x - 14400 \propto 0$. Quæ dividi potest per $x + 25 \propto 0$, oritur namque æquatio $xx - 25x - 576 \propto 0$, seu $xx \propto 25x + 576$, cujus radix x duos admittit valores, ut, $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$ & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Ita ut radix prædictæ æquationis $x^3 \propto 1201x + 14400$ seu diameter quæsita A D tres recipiat diversos valores, unum verum seu + quàm 0, ut $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$; atque duos falsos seu − quàm 0, ut -25 & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Qui quidem simul sumpti ipsi vero sunt æquales.

Quòd si verò æquatio supra dicta $x^3 * 0xx - 1201x - 14400 \propto 0$ dividi non potuisset per quantitatem incognitam $x +$ vel − aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, arguisset id ipsum & neque ullam ex radicibus tam veram quàm falsam

sam ullo numero exprimi potuisse, sed eam hoc casu denotandam esse per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra ostendetur.

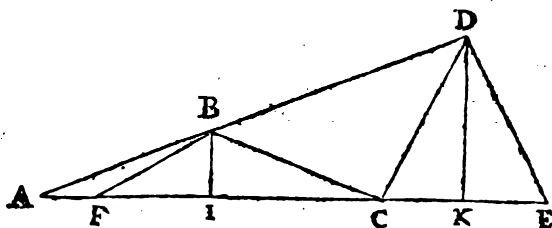
Ut si, exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^3 \infty 243x + 1215$, seu $x^3 * 0xx - 243x - 1215 \infty 0$, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit neque ulla ex radicibus tam vera quàm falsa ullis numeris exprimi, nec minùs per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoscitur, ut docet Cardani regula. Quandoquidem ad illam revocare non licet, cum hìc cubus trientis numeri radicum major sit quàm quadratum semissis numeri absoluti. Adeò ut radix ejus per sectionem anguli in tres æquales partes sit denotanda, quemadmodum innuit Albertus Girardus. Nimirum describendo circulum cujus radius FH seu HK sit 9 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque adaptando rectam FG æqualem 15 seu $\frac{3q}{p}$, atque trifariam porrò secando arcum GK seu angulum GFK per rectam FL, quam ait veram quantitatem ipsius radicis x exprimere. Ubi præterea, si centro H intervallo rectæ LK arcum descripserimus secantem ipsam FL in M & N [1], vel quod idem est à puncto L triangulum æquilaterum circulo inscripserimus LMN [2], rectæ FM & FN utramque falsam quantitatem radicis x designabunt.

Quod idem cum D. des Cartes in eundem ferè modum licebit exsequi. Videlicet, si, [3] intervallo rectæ FH vel HK ∞ 9 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ describatur circulus, in quo, inscriptâ rectâ FG ∞ 15 seu $\frac{3q}{p}$, arcus FMG & FNG trifariam porrò secentur, per rectas FM & FN, quas inquit simul sumptas radici quæsitæ esse æquales.

[1] ut in fig. pag. 349.
[2] ut in fig. pag. 350.
[3] ut in fig. pag. 350.

Sin autem ejusdem æquationis radicem juxta modum Vietæ exponere lubeat, Oportebit duo triangula æquicrura concipere, cruribus alterum alteri æqualia, quorum secundi angulus, qui est ad basin, triplus sit anguli, qui est ad basin primi, & intelligere basin quidem secundi esse $7\frac{1}{2}$ seu $\frac{3q}{2p}$, crus verò esse 9 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. x autem, de qua quæritur, esse basin primi.

Quod ut cuivis obvium sit, supponamus triangula illa esse ABC, & CDE, quorum crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE sit ∞a, & basis secundi CE ∞b: Oporteatque invenire basin primi AC ∞x.



Quia itaque demissis ad hoc perpendicularibus B I, D K, in triangulo rectangulo A B I, quadratum ex A I $\infty \frac{1}{4} xx$ subductum à quadrato ex A B ∞ aa, relinquit quadratum ex B I [1]: erit quadratum ex B I ∞ $aa - \frac{1}{4} xx$.

[1] per 47 primi Elem.

Eodem modo, in triangulo rectangulo C D K, quadrato ex C K $\infty \frac{1}{4} bb$ subducto à quadrato ex C D ∞ aa, relinquetur $aa - \frac{1}{4} bb$, pro quadrato ex D K.

Porrò quoniam, propter similitudinem triangulorum A B I & A D K [2], A I est ad I B, sicut A K ad K D: erit quoque ut $\frac{1}{4} xx$, quad. ex A I, ad $aa - \frac{1}{4} xx$, quad. ex I B; sic $xx + bx + \frac{1}{4} bb$, quad. ex A K, ad $aa - \frac{1}{4} bb$, quad. ex K D. Unde multiplicando extrema, invenietur productum $\frac{1}{4} aaxx - \frac{1}{16} bbxx$ æquale $aaxx + aabx + \frac{1}{4} aabb - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{4} bx^3 - \frac{1}{16} bbxx$, producto sub mediis. Hoc est, demptis utrinque æqualibus, & terminis omnibus per 4 ductis, si ipsi deinde ad unam partem transferantur, habebitur $x^4 + bx^3 - 3aaxx - 4aabx - aabb \infty 0$. Quæ summa si porrò per $x + b \infty 0$ dividatur, obtinebitur æquatio $x^3 - 3aax - aab \infty 0$, seu $x^3 \infty * + 3aax + aab$. eadem nempe quæ superior pag. 350, in qua cubus trientis quantitatis cognitæ penultimi termini excedit quadratum semissis ultimi termini, cujusque æquationis vera radix illic per rectam F L, hic autem per rectam A C designatur.

[2] per 4 Sexti Elem.

Cæterùm quòd angulus secundi trianguli D C E, qui est ad basin, triplus sit anguli A, qui est ad basin primi, ita patet: Æquales enim sunt anguli A & B C A [3], propter æqualia crura A B, B C; & ob id [4] externus C B D alterutrius hujus duplus. Est autem hic C B D æqualis ipsi C D B [5], propter æqualitatem linearum C B, C D. Quare & C D B, id est, C D A ipsius A duplus est. Atqui [6] binis hisce A & C D A æqualis est externus

[3] per 5 primi Elem.
[4] per 32 primi Elem.
[5] per 5 primi Elem.
[6] per 32 primi Elem.

D C E.

DCE. Hinc, qualium partium angulus A eſt 1, talium angulus CDA erit 2, & DCE 3, hoc eſt, triplus erit angulus DCE anguli A. Quemadmodum fuit propoſitum.

Denique quoniam omnes ſimiles æquationes ad æquationem præcedentis Problematis revocari queunt, poterimus quoque radicem x æquationis propoſitæ $x^3 \infty 243\, x + 1215$ ſic interpretari: dicentes eam eſſe diametrum ſemicirculi, ſupra quam deſcripto quadrilatero inæqualium laterum, tria ſuperiora in ſe invicem ducta faciant $607\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{1}{2} q$; at verò ſumma quadratorum ex ipſis faciat 243 ſeu p.

Ubi præterea notandum, æquationem numericam 1 ③ ∞ 13 ① + 12, à Girardo allatam, non indigere ut radix ejus hoc modo exprimatur, cum in illa 1 ① valeat + 4, — 3, & — 1; ac ipſa æquatio 1 ③ 8 0 ② — 13 ① — 12 ∞ 0 per 1 ① — 4 ∞ 0, & per 1 ① + 3 ∞ 0, atque etiam per 1 ① + 1 ∞ 0 dividi queat. Ita ut tantùm radices earum æquationum ſecundæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opus ſit exprimere, in quibus conſtat ipſas nec numero, nec Cardani regulâ exprimi poſſe.

Sed jam tempus eſt ut ad tertiam æquationum Cubicarum formulam accedamus, ubi z^3 æquatur $* + p z - q$.

Hæc autem æquatio tres diverſos radicis valores admittit, duos nempe veros & unum falſum, æqualem veris illis ſimul ſumptis, ſicut ex ejuſdem æquationis conſtitutione agnoſcere licet. Nam ſi ponamus $x \infty b$ ſeu $x - b \infty 0$, & $x \infty c$ ſeu $x - c \infty 0$, atque etiam $x \infty - d$ ſeu $x + d \infty 0$, & multiplicemus $x - b \infty 0$ per $x - c \infty 0$, ac denuo quod inde fit per $x + d \infty 0$, proveniet æquatio:

$$\begin{array}{llll} x^3 + d\,xx & - b\,d\,x + b\,c\,d \infty 0, \text{ vel } x^3 \infty - d\,xx & + b\,d\,x & - b\,c\,d. \\ \quad\; - b & - c\,d & + b & + c\,d \\ \quad\; - c & + b\,c & + c & - b\,c \end{array}$$

In qua ſi ponatur d, valor falſus radicis x, æqualis $b + c$, duobus veris valoribus ipſius x ſimul ſumptis, tunc quidem $b + c$ deſtruet $- d$, fietque $0\, x x$, hoc eſt, evaneſcet adfectio ſub $x x$, nec ampliùs ſeſe deſtruent. Nam cùm ex hypotheſi $b + c$ æquatur d, multiplicando utrinque per d, fiet quoque $b\,d + c\,d$ æquale $d\,d$. At verò $d\,d$ majus eſt quàm $b\,c$, quandoquidem tantundem valet ac $bb + 2\,bc + cc$, quadratum videlicet à $b + c$. Quare & $b\,d + c\,d$ majus erit quàm $b\,c$, manebitque adfectio ſub x cum ſigno —.

Ita ut, si $+bd+cd-bc$ interpreteris per $+p$, & $-bcd$ per $+q$, æquatio hanc induat formam: $x^3 \infty * + px - q$. Quam constat tres admittere differentes valores radicis x, duos quidem veros seu + quàm o, unum autem falsum seu — quàm o, æqualem veris illis simul sumptis.

Porrò ut hæc æquatio recipiat semper tres ejusmodi radicis valores, requiritur ut in illa $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non sit minus quàm q, seu $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non minus quàm $\frac{3q}{p}$, sive etiam $\frac{1}{27}p^3$ non minus quàm $\frac{1}{4}qq$. Ob rationem supra dictam.

Aliàs enim duo veri valores non nisi fictitii forent, nec ullus realis extaret præter falsum, qui juxta Cardani regulam sic exprimeretur: $x \infty \sqrt{C.\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}$.

Vt in exemplum afferre licet æquationem: 1 ℭ ∞ 6 ℞ — 40, in qua 1 ℞ valet — 4, cum 1 ℭ 8 0 ℨ — 6 ℞ + 40 ∞ 0 dividi queat per 1 ℞ + 4 ∞ 0, oriaturque æquatio impossibilis 1 ℨ — 4 ℞ + 10 ∞ 0, seu 1 ℨ ∞ 4 ℞ — 10, cujus valores radicis nullo modo comprehendi possunt, nisi eos sic exprimere velimus: 1 ℞ ∞ $2+\sqrt{-6}$, & 1 ℞ ∞ $2-\sqrt{-6}$. Adeò ut duo veri valores ipsius 1 ℞ sint tantùm fictitii $2+\sqrt{-6}$ & $2-\sqrt{-6}$, & falsus realis sit ∞ — 4.

E quibus patet tertiæ hujus atque secundæ formulæ æquationum convenientia mutuaque radicum suarum reciprocatio.

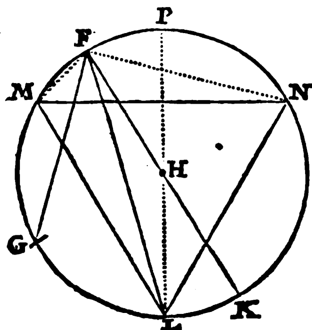
Lubet autem in usum æquationis hujus tertiæ formulæ unum aut alterum Problema adducere, ut sequentia manifestiora fiant.

PROBLEMA.

Circulo dato FMGN, *in eoq; inscriptâ* FG, *trifariam secetur arcus uterque* FMG *&* FNG *in* M *&* N: *Oporteatq; invenire* FM *subtensam trientis unius, &* FN *subtensam trientis alterius.*

Esto FH seu HK ∞ a, FG ∞ b, & FM ∞ x, quæraturque ex HF & FM ceu datis juxta modum paginæ 91 hujus Geometriæ inscripta FG, perinde atque ipsa esset incognita: quæ ideo erit $3x-\frac{x^3}{aa}$. Jam verò cum ipsa detur ∞ b, erit $3x-\frac{x^3}{aa} \infty b$. Vnde æqualitate ordinatâ, x^3 æquabitur $3aax-aab$.

Eodem



Eodem modo, si pro F N ponatur x, atque ex H F & F N quæramus F G, incidemus in eandem æquationem. E quibus sequitur utramlibet subtensam F M vel F N quæsitæ quantitati radicis x æqualem esse. Hinc cum 1 ③ æquetur 13 ① — 12, seu 1 ③ 8 0 ② — 13 ① + 12 æquetur 0, ac ipsa æquatio dividi possit per 1 ① — 1 ∞ 0, & per 1 ① — 3 ∞ 0, nec non per 1 ① + 4 ∞ 0: arguit id ipsum F M fore 1, at verò F N 3. Porrò quoniam æquationes hujus tertiæ formulæ æquè ac secundæ formulæ tres admittunt differentes valores radicis, quorum quidem duo simul sumpti tertio sunt æquales, ita & addendo duos veros 1 & 3, fiet falsus — 4, seu quantitas lineæ F L. quæ ipsis M F & F N simul sumptis ostensa est æqualis.

Unde perspicua fiunt ea, quæ ab Alberto Girardo in libello supra citato allata sunt ad æquationum radices hujus tertiæ formulæ inveniendas. Ubi docet, illas ad secundum casum secundæ formulæ revocandas esse, convertendo tantùm signum — numeri absoluti in signum +: cum in iis sicut hìc cubus trientis numeri radicum non minor requiratur quàm quadratum semissis numeri absoluti. Ac proinde inventis tribus valoribus radicis quæsitæ, sicut in secunda formula explicuimus, oportet tantùm illos ex 0 auferre seu eorum signa immutare, ut habeantur tres quæsiti hujus, in qua duo semper veri sunt seu + quàm 0, & tertius est falsus seu — quàm 0, quemadmodum est ostensum.

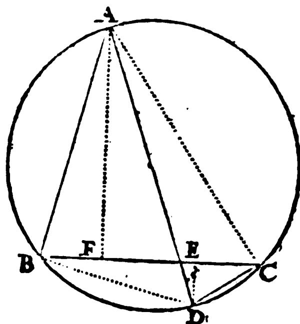
Aliud Problema.

In circulo, cujus diameter A D, *inscriptis tribus inæqualibus rectis lineis* A B, B C, *&* C D, *sibi invicem contiguis, quarum quidem extremæ prodeunt ex diametri terminis* A *&* D: *Oportet ex iisdem cognitis invenire diametrum* A D.

Ponatur ad hoc A B ∞ a, B C ∞ b, C D ∞ c, & A D ∞ x. jun-

ganturque A C, B D, & in B C, productam, si opùs sit, perpendicularis demittatur D E.

Duplex autem hìc occurrit casus considerandus, juxta quem hæ inscriptæ diversimodè in circulo positæ intelligi possunt; primus, in quo rectæ A B & C D è diametri terminis prodeunt ad diversas partes; & secundus, in quo ipsæ ex iisdem terminis eductæ sunt ad eandem partem, se mutuò intersecantes. In priori igitur positione si quadratum B D $\infty\ xx - aa$ subducatur ex ag-



[1] per 13 secundi Elem. gregato quadratorum B C, C D $\infty\ bb + cc$, relinquetur [1] duplum rectangulum B C E $\infty\ bb + cc - xx + aa$. Deinde, quoniam triangula A B D & C E D similia sunt, cum anguli ad B & E sint recti, & B A D, E C D æquales [2], utpote eidem peripheriæ B D insistentes: erit ut D A $\infty\ x$ ad A B $\infty\ a$, ita D C $\infty\ c$ ad C E $\infty\ \frac{ac}{x}$. Hæc autem ducta in duplam B C $\infty\ 2b$ dat duplum rectangulum B C E $\infty\ \frac{2abc}{x}$, æquale $bb + cc - xx + aa$, duplo videlicet rectangulo B C E, ante invento. Unde ordinatâ æquatione invenitur:

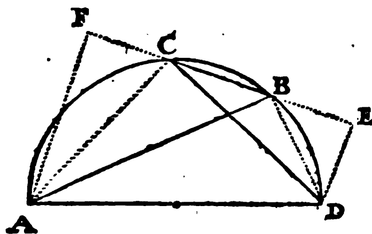
[2] per 21 tertii Elem.

$$x^3 \infty \begin{array}{l} + aa \\ + bb \\ + cc \end{array} x - 2abc,$$

æquatio cubica tertiæ formulæ, in qua quadratum semissis ultimi termini est minus cubo quantitatis cognitæ penultimi termini, ut constat ex præmisso Problemate paginæ 354.

In secunda autem positione, si à quadrato D C $\infty\ cc$ auferantur

[3] per 12 secundi Elem. quadrata D B, B C $\infty\ xx - aa + bb$, relinquetur [3] duplum rectangulum C B E $\infty\ cc - xx + aa - bb$. Cæterùm, quoniam rursus



rursus propter similitudinem triangulorum A B D & C E D, A D $\propto x$ est ad A B $\propto a$, sicut D C $\propto c$ ad C E: erit C E $\propto \frac{ac}{x}$. E quâ subductâ C B $\propto b$, remanebit B E $\propto \frac{ac}{x} - b$. Hæc autem si multiplicetur per duplam C B, proveniet duplum rectangulum C B E $\propto \frac{2abc}{x} - 2bb$: æquale duplo rectangulo C B E ante invento $\propto cc - xx + aa - bb$. Unde addito utrinque bb, ordinatâque secundùm artem æquatione, obtinebitur eadem atque superior: $x^3 \propto \begin{matrix} +aa \\ +bb \\ +cc \end{matrix} x - 2abc$.

Quocirca cum utroque casu in eandem incidamus æquationem, cujus radix diametrum referat A D, sequitur quoque eam differentem sortiri quantitatem, & ex eisdem datis inscriptis pro diversa earum positione dupliciter inveniri.

Ubi præterea notandum est, Problema propositum esse solidum, si tres inscriptæ A B, B C, & C D inæquales inter se fuerint: siquidem ad cubicam æquationem adscendit, quæ divisione ad quadratam reduci nequit. Quum verò duæ quælibet ex inscriptis æquales ponuntur, tunc quidem æquatio inventa reducetur ad quadratam, & Problema erit planum. Statuendo enim b & c æqualia, exsurget æquatio talis: $x^3 \begin{matrix} -aa \\ -2bb \end{matrix} x + 2abb \propto 0$, quæ dividi poterit per $x - a \propto 0$, & orietur æquatio quadrata $xx + ax - 2bb \propto 0$, quæ ulteriùs non est reducibilis.

Si autem juxta alterutram positionem omnes hæ tres inscriptæ æquales fingantur, ita ut inde deducatur æquatio $x^3 - 3aax + 2a^3 \propto 0$, poterit hæc ipsa dividi per $x + 2a \propto 0$, orieturque æquatio $xx - 2ax + aa \propto 0$, quæ porrò dividi poterit per $x - a \propto 0$, & orietur $x - a \propto 0$. Quoniam verò hoc casu inscriptæ cum diametro coïncidere intelliguntur ac ipsi diametro esse æquales, constat æquationis radicem x, hoc est, diametrum A D duos in eo

admittere veros valores sibi invicem æquales, qui singuli per unamquamque ex illis inscriptis designantur; ac præterea falsum, alterutrius illius duplum.

Cæterùm si desideremus propositum Problema per numeros resolvere, esto A B $\propto a \propto 24$, B C $\propto b \propto 20$, C D $\propto c \propto 15$, & quæratur A D $\propto x$. Hinc cum $aa + bb + cc$ sit 1201, & $2abc \propto 14400$, invenietur æquatio talis: $x^3 \propto 1201x - 14400$, seu $x^3 * 0xx - 1201x + 14400 \propto 0$. Quæ dividi potest per $x - 25 \propto 0$, oritur namque æquatio $xx + 25x - 576 \propto 0$, seu $xx \propto -25x + 576$. Cujus porrò vera radix est $\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, & falsa $-\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$. Ita ut diameter quæsita A D, hoc est, x radix prædictæ æquationis $x^3 \propto 1201x - 14400$, tres ferat differentes valores, duos scilicet veros seu $+$ quàm 0, nimirum $+25$ majorem, & $\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$ minorem, & unum falsum seu $-$ quàm 0, nimirum $-\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, qui veris istis simul sumptis est æqualis. Quocirca cum tres superioris æquationis $x^3 \propto 1201x + 14400$ radices inventæ sint -25, $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$, & $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$, patet eas tantùm ex 0 esse auferendas, seu earum signa esse immutanda, ad habendas tres radices hujus posterioris æquationis.

Quòd si verò hæc ipsa æquatio $x^3 * 0xx - 1201x + 14400 \propto 0$ dividi non potuisset per quantitatem incognitam $x +$ vel $-$ aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, argumentum fuisset quòd & nulla radicum tam vera quàm falsa ullo numero fuisset explicabilis, sed eam tunc designandam esse per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra ostendetur.

Ut si in exemplum proponatur æquatio $x^3 \propto 2700x - 32400$, seu $x^3 * 0xx - 2700x + 32400 \propto 0$, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit quoque valor radicis x, sive is verus sive falsus fuerit, nullis numeris exprimi, nec per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoscitur, ut docent Cardani regulæ. Quippe illum ad has non revocare licet, cum ipsæ exigant ut cubus trientis numeri radicum à quadrato semissis numeri absoluti auferatur, qui quidem cubus hîc major datur. Adeò ut radices ejus per rectas subtendentes trientem anguli vel arcus dati sint denotandæ, ut vult D. des Cartes, atque ut etiam Albertus Girardus innuit. Scilicet describendo circulum cujus radius

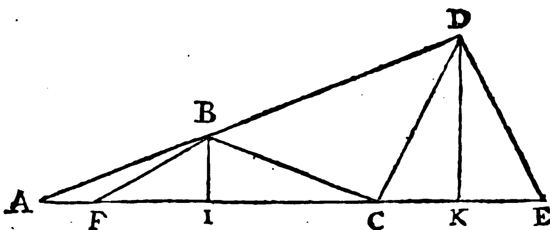
FH

FH seu HK sit 30 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque accommodando rectam FG ∞ 36 seu $\frac{3q}{p}$, atque deinde trifariam secando utrumque arcum FMG & FNG per rectas FM & FN. Nam uti circulus, cujus radius 30 per inscriptam 36 in duos inæquales arcus dispescitur, ita quoque incognita quantitas x duplicem verum valorem sortitur, sitque alterutra è subtensis FM vel FN, tam trientis FM minoris arcus FMG, quàm trientis FN majoris FNG: Falsus autem ejusdem valor æqualis est veris illis simul sumptis, atque per rectam FL designatur.

Quos binos radicis valores cum Vieta aliâ porrò ratione explicare licet, ut sequitur.

Duo intelligantur triangula æquicrura, cruribus alterum alteri æqualia, quorum secundi angulus, qui est ad basin, sit triplus anguli, qui est ad basin primi, & basis secundi intelligatur esse 18 seu $\frac{3q}{2p}$, crus verò 30 seu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. x autem de qua quæritur, esse basin dimidiam primi, multatam continuatámve longitudine ejus rectæ, cujus quadratum est æquale triplo quadrato altitudinis primi.

Quod ut perspicuum fiat, fingantur triangula illa esse ABC & CDE, quorum (ut ante) crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE sit ∞ a, & basis secundi CE sit ∞ b. Demissis autem in iis perpendicularibus BI, DK, sumatur BF æqualis duplæ BI: eritque FI recta, cujus quadratum est æquale triplo quadrato altitudinis primi.



Quibus ita positis, ut inveniatur AF, liquet, si pro ea ponamus y, & pro AC, ut ante, ponamus x, quadratum ex BI fore ∞ $aa - \frac{1}{4}xx$, adeoque quadratum ex FI ∞ $3aa - \frac{3}{4}xx$. Quoniam verò ex AI ∞ $\frac{1}{2}x$ sublatâ AF ∞ y, relinquitur FI ∞ $\frac{1}{2}x - y$, cujus quadratum est $\frac{1}{4}xx - xy + yy$: erit $\frac{1}{4}xx - xy + yy$ ∞ $3aa - \frac{3}{4}xx$. Hoc

Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur $xx \propto yx + 3aa - yy$. Unde extractâ radice, fit $x \propto \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$. Hinc, si in æquatione olim inventa $x^3 \propto * + 3aax + aab$ in locum x substituatur valor inventus $\frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$, & in locum x^3 ejus cubus, qui est $\frac{9}{2}aay - y^3 \pm 3aa\sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$, obtinebimus æquationem $y^3 \propto * + 3aay - aab$. Cujus ideo vera radix erit linea A F.

Eodem modo ad inveniendam F C, si pro ea ponamus z, atque ab ipsa tollamus I C $\propto \frac{1}{2}x$, remanebit F I $\propto z - \frac{1}{2}x$. Unde cum quadratum ejus sit $zz - xz + \frac{1}{4}xx$: erit itidem $zz - xz + \frac{1}{4}xx \propto 3aa - \frac{3}{4}xx$. Hoc est, ordinatâ æquatione, habebitur $xx \propto zx + 3aa - zz$. Et fit, extractâ radice $x \propto \frac{1}{2}z \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$.

Hinc si rursus in æquatione olim inventa $x^3 \propto * + 3aax + aab$ in locum x subrogetur valor inventus $\frac{1}{2}z \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$, & in locum x^3 ejus cubus $\frac{9}{2}aaz - z^3 \pm 3aa\sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$, obtinebimus æquationem $z^3 \propto * + 3aaz - aab$. Cujus ideo vera radix est linea F C.

Ex quibus colligitur, si æquatio proposita fuerit $x^3 \propto * + 3aax - aab$, eandem duas admittere veras radices, quarum minor A F obtinetur, si ex A I vel I C dimidia base primi trianguli A B C auferatur recta F I, cujus quadratum sit æquale triplo quadrato ejusdem altitudinis B I; & major, si ad A I vel I C ipsa F I addatur. Omnino ut fuit propositum.

Ubi porrò advertendum, quòd, in eadem æquatione $x^3 \propto * + 3aax - aab$, ob mutuam radicum æquationis hujus tertiæ ac secundæ formulæ reciprocationem, tertia radix sit falsa, quæ per A C, basin primi trianguli A B C, designatur, quæque ipsis veris A F, F C simul sumptis est æqualis. Et contra si æquatio fuerit $x^3 \propto * + 3aax + aab$, quòd præter veram, quæ per A C exhibetur, aliæ duæ extent falsæ, quarum minor est A F, & major F C, quæ similiter simul sumptæ ipsi veræ A C sunt æquales.

Denique quoniam omnes similes æquationes ad æquationem posterioris Problematis revocari queunt, poterimus quoque propositæ æquationis $x^3 \propto 2700x - 32400$ valores radicis x sic exprimere: Dicentes eos per diametrum circuli A D designari, in quo si inscribantur tres rectæ lineæ inæquales A B, B C, & C D, sibi

Vide figuras pag. 362. & 363.

ſibi invicem contiguæ, quarum extremæ prodeunt è diametri terminis A & D, ſolidum ex ipſis tribus ſit $\propto$ 16200 ſeu $\frac{1}{2}q$, & ſumma quadratorum earundem ſit $\propto$ 2700 ſeu p. Nam quemadmodum hæ tres inſcriptæ cum diametro duobus modis girgillum referunt, & utrâque poſitione diameter duplicem quantitatem ſortitur, ita quoque ipſa in hac vel illa poſitione veram ſemper radicem deſignat. Falſa autem, ipſis veris adæquans, exhibetur per diametrum ſemicirculi, in quo deſcripto ſupra diametrum quadrilatero, tria hujus reliqua latera dictis inſcriptis ſumpta ſint æqualia. Ut ex ſuperioribus manifeſtum eſt.

Ubi advertendum inſuper reſtat, æquationem numericam 1 ③ $\propto$ 13 ① — 12, à Girardo propoſitam, non requirere ut radices ejus hoc modo exprimantur: cum in illa 1 ① valeat — 4, + 1, & + 3, ac ipſa æquatio 1 ③ 8 0 ② — 13 ① + 12 $\propto$ 0 per 1 ① + 4 $\propto$ 0, & per 1 ① — 1 $\propto$ 0, nec non per 1 ① — 3 $\propto$ 0 dividi poſſit. Ita ut duntaxat radices earum æquationum tertiæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opùs ſit exprimere, in quibus conſtat ipſas nec numero, nec Cardani regula explicari poſſe.

Unde demum cum D. des Cartes concludere licet, valorem radicum æquè facilè, immo quidem faciliùs concipi, cùm ipſe per ſubtenſas arcuum deſignatur, quorum triplum eſt datum, quàm cùm per latera certorum cuborum exprimitur, quorum non niſi contentum cognoſcitur. Præterquam quòd ad illas ſubtenſas non magis indigeamus aliquo charactere peculiari, quàm $\surd$ C. ad exprimenda latera cubica, & $\surd$ ad quadrata. Adeò ut cubicarum æquationum valores radicum, qui nec numerò nec per Cardani regulas exprimi queunt, allatis quidem modis clarè ac diſtinctè explicari poſſint.

Cæterùm ne quid hìc deſideretur, ſed etiam appareat, quo pacto hæ Cardani regulæ fuerint inventæ, lubet hoc loco afferre ea, quæ circa hanc rem acutiſſimus noſter Huddenius olim adinvenit, mihiqúe coram communicavit.

Proponatur æquatio $z^3 \propto * - pz + q$, & ſit z quantitas, quàm invenire oportet.

Ponatur ad hoc $z \propto x - y$. Eritqúe $z^3 \propto x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$. Unde cum & z^3 æquetur $- pz + q$: erit ſimiliter $- pz + q \propto x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$.

Divi-

Dividamus jam hanc æquationem in duas, nempe $-pz \propto -3xxy + 3xyy$, & $q \propto x^3 - y^3$. Quarum prima divisa per $z \propto x - y$ dat $-p \propto -3xy$, seu $p \propto 3xy$; & fit $x \propto \frac{\frac{1}{3}p}{y}$. Unde, si in secunda in locum x subrogetur valor inventus $\frac{\frac{1}{3}p}{y}$, & in locum x^3 hujus cubus $\frac{\frac{1}{27}p^3}{y^3}$, obtinebitur $q \propto \frac{\frac{1}{27}p^3}{y^3} - y^3$. Hoc est, multiplicando utrinque per y^3, & ordinando æquationem, habebitur $y^6 \propto -qy^3 + \frac{1}{27}p^3$. Cujus radix, juxta pag. 6, est $y^3 \propto -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Et fit $y \propto \sqrt{C.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Adeoque $x \propto \frac{\frac{1}{3}p}{y}$

$\propto \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}}$ Posueramus autem $z \propto x - y$. Erit

itaque $z \propto \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}} - \sqrt{C.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Qui sanè valor eo Cardani simplicior censeri potest, siquidem ad hunc obtinendum radix cubica semel tantùm est extrahenda. Quòd si verò ipsius z valor cum Cardano sit exhibendus, ita porrò operari licebit. videlicet in æquatione jam dictâ $q \propto x^3 - y^3$ in locum y^3 substituendo valorem inventum $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$: habebiturque $q \propto x^3 + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, seu $x^3 \propto +\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Et fit $x \propto \sqrt{C.\, +\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Hinc cum z sit $\propto x - y$: erit $z \propto \sqrt{C.\, +\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.\, -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Haud dissimili modo procedendum in æquatione $z^3 \propto * + pz + q$, ubi z valet $\sqrt{C.\, +\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\, +\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. ponendo nempe $z \propto x + y$.

Notandum verò, in his z æqualem supponi $x +$ vel $-y$, non autem pluribus incognitis quantitatibus, ex eo quòd plures duabus diversis æquationibus institui nequeunt; ut & $-pz$ supponi $\propto -3xxy + 3xyy$, ex eo quòd tunc æquationem hanc dividere licet per $z \propto x - y$, atque sic deinde ipsarum x, y, & z valores in simplicissimis terminis invenire. Idem quoque aliter fieri potest, ad modum paginæ 296.

Hæc autem de Cubicarum Æquationum Resolutione dicta sufficiant.

A D-

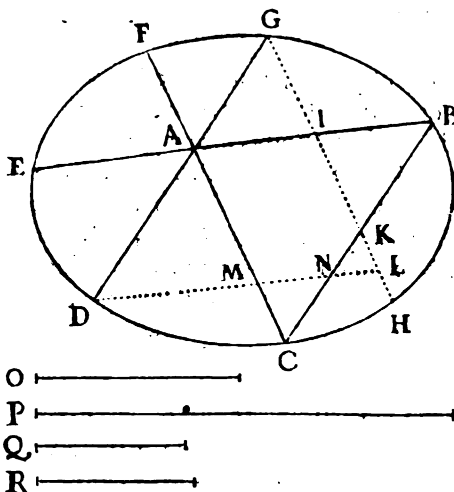
ADDITAMENTUM.

CÆterùm ut pateat, non facilè Problema aliquod datum iri, quod hanc Geometriam effugiat; aut ejusdem Methodo solvi non possit, subjungam in ejus specimen solutionem artificiosissimam Problematis, quod habetur in libello ingeniosissimo, qui operâ Jacobi à Waessenaer Anno 1640 sub titulo: *Den onwissen VVis-konstenaer*, *I. I. Stampioenius*, in lucem prodiit. Verùm enimverò quoniam ad ejus solutionem, ibi traditam, quædam admittuntur ut concessa, quæ demonstrare operæ pretium duxi, visum fuit ea sequenti Theoremate demonstrata exhibere.

THEOREMA.

Alicubi terrarum in Zonis frigidis, cùm Sol non occidit, defixis ad plumbum supra planum horizontale tribus baculis in punctis A, B, & C, ita se habentibus, ut, postquam eodem die extremitas umbræ baculi A transire deprehensa fuerit per B & C, reperta item sit extremitas umbræ baculi B transiisse per C & A, nec non ejus qui in C per A: Demonstrandum est eandem transiisse pariter per B.

Quod ut fiat, sciendum primò est umbram baculi A descripsisse Ellipsin vel Circulum, transeuntem per puncta B & C, prout videlicet hæc observata ponantur in Sphæra obliqua vel parallela. Deinde junctis CA, AB, BC, productisque BA, AC donec ejus circumferentiæ occurrant in punctis E & F, ductâque per A rectâ DG ipsi BC parallelâ, & utrinque peripheriæ occurrente in punctis D & G: evidens est, quòd, postquam umbra baculi B finiit in A, eodem puncto temporis umbra baculi A finierit quoque in E; ita ut BA ad AE, rationem, quæ est inter baculum B & baculum A, designet. Eodem modo, postquam umbra baculi C pertigit ad A, pertigit etiam umbra baculi A ad F; ita ut CA ad AF sit, sicut baculus C ad baculum A. Similiter, dum umbra ipsius B pervenit ad C, pervenit etiam umbra ipsius A ad D; ita ut BC sit ad AD, sicut baculus B ad baculum A. Quibus sic intelle-



tellectis, ut constet, umbram baculi C transiisse item per B, ostendendum est, cùm umbra baculi A incidit in G, umbram ipsius C incidisse similiter in B, hoc est, baculum C ad baculum A, vel C A ad A F esse, sicut C B ad A G.

Quod ipsum igitur ut fiat manifestum, inveniendus nobis est valor lineæ A G. Quocirca ad hoc ductâ G H parallelâ A C, secante A B, B C in I & K, & Ellipsis vel Circuli circumferentiæ occurrente in H, ponatur A B $\infty\, a$, B C $\infty\, b$, C A $\infty\, c$, A F $\infty\, d$, A E $\infty\, e$, H K $\infty\, x$, & A G vel C K $\infty\, z$: eritque K B $\infty\, b - z$.

Deinde, ut innotescat A D, quoniam baculus B est ad baculum A, ut B A ad A E; itemque B baculus ad A baculum, ut B C ad A D: erit ut B A ad A E, vel a ad e, sic B C vel b ad A D. quæ ideo erit $\frac{be}{a}$. Cum autem hæc multiplicata per A G seu z producat $\frac{bez}{a}$ rectangulum D A G, similiterque A G vel C K seu z multiplicata per K B seu $b - z$ producat $bz - zz$ rectangulum C K B; & quidem, juxta 17 prop. 3[tii] libri Conicorum Apollonii, $\frac{bez}{a}$ ad $bz - zz$ fit, vel $\frac{be}{a}$ ad $b - z$, sicut ▭ F A C ad ▭ G K H seu

cd ad

zd ad cx, vel d ad x: fiet, multiplicando medios tum extremos, $db - dz = \frac{bex}{a}$, vel $adb - adz = bex$.

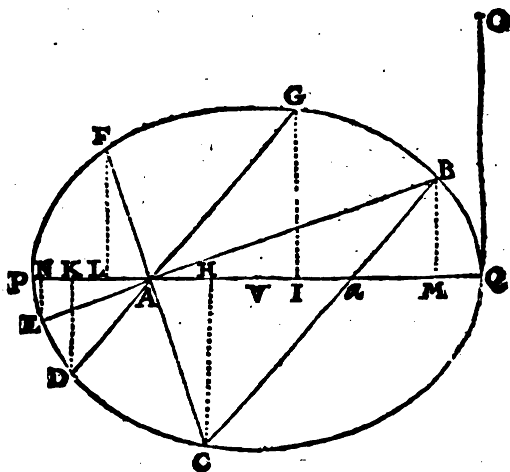
Jam, ut habeatur KI, fiat, propter similitudinem triangulorum BCA & BKI, ut BC $= b$ ad CA $= c$, ita BK $= b - z$ ad KI $= \frac{cb - cz}{b}$. quæ ad HK seu x addita dat HI $= \frac{cb - cz + bx}{b}$; at verò ex KG vel CA seu c subducta relinquit IG $= \frac{cz}{b}$. ex quarum ductu unius in alteram invenitur ▭ GIH $= \frac{ccbz - cczz + cbxz}{bb}$.

Porrò, ut obtineatur AI, fiat, propter similitudinem triangulorum AGI & BCA, ut BC $= b$ ad BA $= a$, ita AG $= z$ ad AI $= \frac{az}{b}$. quæ ad AE seu e addita dat EI $= \frac{az + eb}{b}$; at verò ex AB $= a$ subducta relinquit IB $= \frac{ab - az}{b}$. ex quarum mutua multiplicatione exurgit ▭ EIB $= \frac{aabz + abbe - aazz - abez}{bb}$. Jam cum, ut ante, per 17. 3^{tii} Con. Apoll., ▭ FAC seu cd sit ad ▭ GIH seu $\frac{ccbz - cczz + cbxz}{bb}$, sive d ad $\frac{cbz - czz + bxz}{bb}$, sicut ▭ EAB seu ea ad ▭ EIB seu $\frac{aabz + abbe - aazz - abez}{bb}$, sive e ad $\frac{abz + bbe - azz - bez}{bb}$: fiet, multiplicando extremos tum medios, omisso priùs communi denominatore bb, $abdz + bbed - adzz - bedz = cbez - cezz + bexz$. Quoniam autem supra inventum fuit $adb - adz = bex$, hoc est, multiplicando utrinque per z, $abdz - adzz = bexz$: obtinebitur, subducendo unam æquationem ex altera, $bbed - bedz = cbez - cezz$, vel $bbd - bdz = cbz - czz$. Hoc est, æqualitate ritè ordinatâ, erit $zz = \frac{cb + db}{c}$ in $z - \frac{bbd}{c}$. Quæ æquatio juxta regulam pag. 7 resoluta dat $z = b$, ut & $z = \frac{db}{c}$. Cum verò horum duorum valorum ipsius z duntaxat $\frac{db}{c}$ quæsitæ AG respondeat, hicque nos doceat c esse ad d, sicut b ad z: patet, CA ad AF esse, sicut CB ad AG. Quod erat ostendendum.

Sequitur Problema, ejusque solutio.

PROBLEMA.

TEmpore verno erectis alicubi terrarum ad perpendiculum tribus baculis in plano Horizontali in punctis A, B, & C, quorum is qui in A sit 6 pedum, qui in B 18 pedum, & qui in C 8 pedum, existente lineâ AB 33 pedum: Contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A transire per puncta B & C, baculi autem B per puncta A & C, & baculi C per punctum A, unde fit ut etiam per punctum B sit transitura. Quæritur jam quo terræ loco atque anni die hæc evenerint?



Solutio.

Ut hoc Problema solverem, primò consideravi, Solem, baculi cujusque umbrâ, eo die quo hæc observata sunt, descripsisse Ellipsin, Hyperbolam, aut Parabolam.

Deinde etiam facilè perspexi, umbram illam non Hyperbolam, nec Parabolam, sed Ellipsin descripsisse, eamque observationem, quæ prima recensetur, non matutino tempore, sed ante mediam

mediam noctem factam fuisse. Quibus brevitatis causâ suppositis, ad Problematis solutionem ita procedo.

Sit P G Q C Ellipsis, quam descripsit umbra baculi A, ejusque maxima diameter sit P Q, repræsentans lineam meridianam: liquet, cùm umbra baculi A pertigit ad Q, fuisse mediam noctem, & cùm à Q per C transiens pervenit ad P fuisse meridiem, & denique à P per G decurrens usque in Q rursus ad mediam noctem fuisse perventum. Deinde, cùm umbra baculi B incidit in A, tum quoque umbra baculi A incidit in E; ita ut A B sit ad A E, ut 3 ad 1. Porrò, cùm umbra baculi C pertigit ad A, pertigit etiam umbra baculi A ad F; ita ut C A ad A F sit, ut 4 ad 3. Denique, cùm umbra baculi B terminabatur in C, terminabatur quoque umbra baculi A in D; ita ut G A ad A D sit, ut 9 ad 4. Quibus A
rationibus in Ellipsi sic explicatis, demittantur perpendiculares B M, E N, C H, F L, G I, & D K.

Deinde, in secunda figura supponendo P R Q esse Conum, in quo P Q designet majorem prædictæ Ellipseos diametrum, A R baculum A, R S axem Coni, angulus A S R altitudinem Poli, & angulus R P Y distantiam inter æquatorem & locum Solis in Ecliptica: fiat in Ellipsi P Q $\infty\, q$, latus rectum Q O $\infty\, r$, A Q $\infty\, p$, M Q $\infty\, x$, H Q $\infty\, y$, & K Q $\infty\, z$: eritque A M $\infty\, p - x$, A N $\infty\, \frac{1}{3}p - \frac{1}{3}x$, N Q $\infty\, \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}x$, A H $\infty\, p - y$, A L $\infty\, \frac{3}{4}p - \frac{3}{4}y$, L Q $\infty\, \frac{7}{4}p - \frac{3}{4}y$, & K A $\infty\, z - p$; In Cono verò, A R $\infty\, c$, seu 6, P Q $\infty\, q$, A V $\infty\, qu$, S V $\infty\, fuq$: eritque A S $\infty\, qu - fuq$, B
& P S $\infty\, \frac{1}{2}q - fuq$.

 His

His positis, quæro primùm rationem, quam inter se habent M Q, H Q, & K Q, ut &, B M, H C, & D K; & invenio B M + H C æquari 3 D K: cum B C & A D parallelæ existentes inter
C se sint, sicut baculus B ad baculum A, hoc est, ut 3 ad 1: ac pro-
D inde B M + H C ∞ 3 D K. E quibus porrò invenitur P A ad A Q esse, ut $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, hoc est, ut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Deinde beneficio A M & A B quæro perpendicularem B M, quæ etiam in aliis terminis inveniri potest. unde innotescit latus rectum r, quod postea quoque aliter beneficio Coni invenitur.

Ex duplicibus terminis quantitati r æqualibus quæro f, tum q, ac postea etiam u.

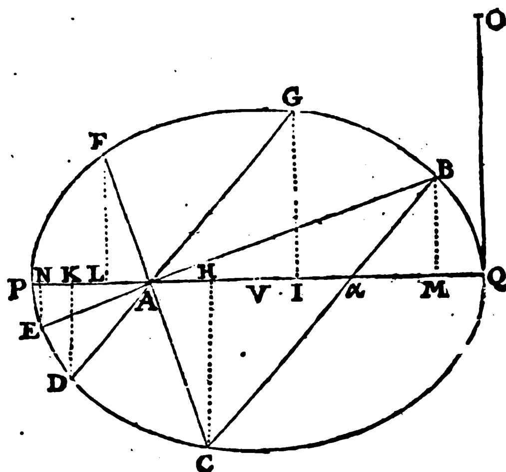
Cognitis autem f, q, & u, quæritur ratio A S ad A R, ostendens Poli elevationem.

Denique investigatur ratio, quæ est inter T X & T R, hoc est, inter P Y & Y R, & inde innotescit distantia inter Æquatorem & locum Solis in Ecliptica.

Primò igitur M Q sic investigatur: Ut P Q seu q ad Q O seu r, ita quadratum M Q seu xx ad $\frac{rxx}{q}$, quod subductum ab rx, rectangulo M Q O, relinquit $rx - \frac{rxx}{q}$, pro quadrato ex B M, adeoque $\sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$ pro B M. Rursus, ut q ad r, ita quadratum N Q $\frac{16}{9}pp - \frac{8}{9}px + \frac{1}{9}xx$ ad $\frac{\frac{16}{9}ppr - \frac{8}{9}prx + \frac{1}{9}rxx}{q}$. quod si subtrahatur à $\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx$, rectangulo N Q O, & ex reliquo extrahatur radix quadrata, fiet $\sqrt{\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx \frac{-16ppr + 8prx - rxx}{9q}}$
E pro N E, $\infty \sqrt{\frac{rx}{9} - \frac{rxx}{9q}}$, tertiæ videlicet parti ipsius B M. Quæ æquatio si reducatur, invenietur $x \infty \frac{4pp - 3pq}{2p - q}$, pro M Q.

Deinde, ad inveniendam H Q, investigetur priùs eodem modo H C, $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$. Tum fiat, ut C A ad A F, seu 4 ad 3, ita $\sqrt{rx - \frac{ryy}{q}}$ ad $\sqrt{\frac{9}{16}ry - \frac{9ryy}{16q}}$, seu L F. Porrò, ut q ad r, ita quadratum L Q $\frac{49pp}{16} - \frac{21py}{8} + \frac{9yy}{16}$ ad $\frac{49ppr}{16q} - \frac{21pry}{8q} + \frac{9ryy}{16q}$.

Quod



Quod si auferatur à $\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4}$, rectangulo L Q O, & ex reliquo extrahatur radix, fiet $\sqrt{\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4} - \frac{49ppr}{16q} + \frac{21prx}{8q} - \frac{9ryy}{16q}}$ pro L F ∞ $\sqrt{\frac{9ry}{16} - \frac{9ryy}{16q}}$, ante inventâ. Quæ æquatio reducta dat $y \infty \frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$, pro H Q.

Porrò, ad inveniendam K Q, investigetur ut priùs K D $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$. Deinde fiat ut A D ad A G, seu 4 ad 9, ita $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$ ad $\sqrt{\frac{81rz}{16} - \frac{81rzz}{16q}}$, seu G I. Rursus, ut 4 ad 9, ita A K $z - p$ ad $\frac{9z - 9p}{4}$, seu A I. quæ ex A Q sublata relinquit I Q $\frac{13p}{4} - \frac{9z}{4}$. Porrò ut q ad r, ita quadratum Q I $\frac{169pp}{16} - \frac{117pz}{8} + \frac{81zz}{16}$ ad $\frac{169ppr}{16q} - \frac{117rpz}{8q} + \frac{81rzz}{16q}$. Quod si auferatur à $\frac{13pr}{4} - \frac{9rz}{4}$, rectangulo I Q O, & ex reliquo extrahatur radix, proveniet $\sqrt{\frac{13pr}{4} - \frac{9rz}{4} - \frac{169ppr}{16q} + \frac{117rpz}{8q} - \frac{81rzz}{16q}}$, pro

G I

$GI \propto \sqrt{\frac{81rz}{16} - \frac{81rzz}{16q}}$, ante inventæ. Quæ æquatio si reducatur, habebitur $z \propto \frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}$.

Atque ita inventæ sunt

$$MQ \text{ seu } x \propto \frac{4pp - 3pq}{2p - q}.$$

$$HQ \text{ seu } y \propto \frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}.$$

$$KQ \text{ seu } z \propto \frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}.$$

Ad inveniendas jam BM, HC, & DK, quoniam ante inventa est BM $\sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$, loco x substituatur $\frac{4pp - 3pq}{2p - q}$, & $\frac{16p^4 - 24p^3q + 9ppqq}{4pp - 4pq + qq}$ loco xx, fietque BM

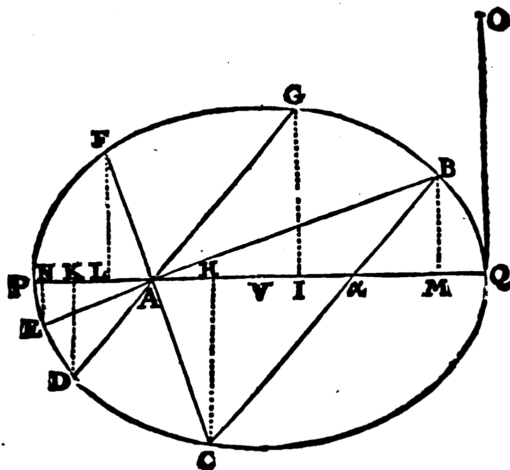
$$\sqrt{\frac{-16p^4r + 32p^3qr - 19ppqqr + 3pq^3r}{4ppq - 4pqq + q^3}}.$$

Eodem modo, quoniam HC inventa est $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$, loco y scribatur $\frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$, & $\frac{49p^4 - 56qp^3 + 16ppqq}{36pp - 36pq + 9qq}$ loco yy, eritque HC $\sqrt{\frac{-49p^4r + 98p^3qr - 61ppqqr + 12pq^3r}{36ppq - 36pqq + 9q^3}}$.

Similiter, quoniam DK inventa est $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$, loco z ponatur $\frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}$, & $\frac{169p^4 - 104p^3q + 16ppqq}{324pp - 324pq + 81qq}$ loco zz, fietque DK $\sqrt{\frac{-169pr + 338p^3qr - 205ppqqr + 36pq^3r}{324ppq - 324pqq + 81q^3}}$.

Quibus inventis, facile est invenire rationem ipsius PA ad AQ. Cum enim 3 DK æquetur BM + HC, ut supra dictum est: hinc inventos terminos ad eandem denominationem reduco, utpote ipsius HC, multiplicando tam numeratorem, quàm denominatorem ipsius BM per $\sqrt{9}$, & denominatorem ipsius DK dividendo per 3, fietque omisso communi denominatore, pro BM $\sqrt{-144p^4r + 288p^3qr - 171ppqqr + 27pq^3r}$,

pro



pro HC $\sqrt{-49p^4r+98p^3qr-61ppqqr+12pq^3r}$, &
pro tripla DK $\sqrt{-169p^4r+338p^3qr-205ppqqr+36pq^3r}$.
Qui singuli si per pr dividantur, fiet pro BM
$\sqrt{-144p^3+288ppq-171pqq+27q^3}$, pro HC
$\sqrt{-49p^3+98ppq-61pqq+12q^3}$, & pro tripla DK
$\sqrt{-169p^3+338ppq-205pqq+36q^3}$; & hi rursus di- F
visi per $-p+q$, dant pro BM $\sqrt{-144pp+144pq-27qq}$,
pro HC $\sqrt{-49pp+49pq-12qq}$, & pro tripla DK
$\sqrt{-169pp+169pq-36qq}$. Ubi porrò, si supponatur G
$-p+q \infty n$, habebitur $\sqrt{+144pn-27qq}$ pro BM,
$\sqrt{+49pn-12qq}$ pro HC, & $\sqrt{+169pn-36qq}$ pro
tripla DK, adeoque $\sqrt{144pn-27qq}+\sqrt{49pn-12qq}$
$\infty \sqrt{169pn-36qq}$. Quæ æquatio reducta dabit $ppnn \infty +$
$\frac{335qq}{768}pn-\frac{143q^4}{3072}$. Et fit $pn \infty \frac{1}{4}qq$, nec non $pn \infty \frac{143}{768}qq$.

Ubi sciendum, accipiendam esse tantùm radicem $pn \infty \frac{143}{768}qq$: cum reliqua radix $pn \infty \frac{1}{4}qq$, restituendo valorem ipsius n, producat hanc æquationem $pp \infty qp - \frac{1}{4}qq$, cujus radix est $p \infty \frac{1}{2}q$; ostendens baculum A in medio ipsius PQ fuisse constitutum.

 Quod

Quod sanè fieri non potest, quandoquidem umbræ baculi A utrinque non sunt æquales. Hinc, cum pn, hoc est, $\frac{143}{768}qq$, sit $\infty - pp + pq$, seu $pp \infty qp - \frac{143}{768}qq$, cujus radix est $p \infty \frac{1}{2}q -$
H $\frac{7q}{16\sqrt{3}}$, nec non $p \infty \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$: fiet pro P A $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & $\frac{1}{2}q +$
I $\frac{7q}{16\sqrt{3}}$ pro A Q. Unde porro innotescit P A esse ad A Q, sicut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Quo pacto cognoscatur primam observationem matutino tempore non fuisse factam.

Jam si in Ellipsi primam observationem matutino tempore ponamus factam esse, & P Q, ut ante, lineam meridianam designare, atque baculi A umbram, motum Solis insequentem, à P per F transiisse usque ad Q (quo tempore Sol humillimus existens mediam noctem efficit): erit B ex eadem parte sumendum qua punctum C, non autem qua punctum F. Quo posito, si per modum præcedentem quæratur æquatio, fiet $ppnn \infty \frac{67qq}{160}pn - \frac{143q^4}{3200}$: in qua numerus absolutus major est quadrato semissis numeri radicum. Unde, cum nulla sit linea, quæ Æquationis hujus radix esse possit: liquet, primam observationem matutino tempore non contigisse, sed ante mediam noctem. Sicut initio fuit suppositum.

Quâ ratione innotescat umbram non descripsisse Hyperbolam, aut Parabolam.

Deinde, si ponatur, umbram baculi A descripsisse Hyperbolam, invenietur æquatio $ppnn \infty - \frac{335qq}{768}pn - \frac{143q^4}{3072}$. Quæ cum nullam admittat radicem, quæ proposito convenire possit, indicio est, umbram non descripsisse Hyperbolam. Eodem modo ostenditur ipsam non descripsisse Parabolam.

Quomodo inveniatur latus rectum per Ellipsin.

Postea ad inveniendum r, latus rectum Ellipseos, quæratur A M, ut sequitur. Quoniam subducendo M Q ex A Q, hoc est, $\frac{4pp - 3pq}{2p - q}$ ex p, relinquitur $\frac{-2pp + 2pq}{2p - q}$, pro A M: hinc si loco p substituatur $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, ante inventum, & $\frac{1}{4}qq + \frac{7qq}{16\sqrt{3}} + \frac{49qq}{768}$ loco pp; fiet $\frac{143q}{112\sqrt{3}}$ pro A M. Porrò, posito baculo A ∞ 6 ∞ c, erit A B ∞ 33 $\infty \frac{11c}{2}$. (est enim ut 6 ad 33, seu 2 ad 11, sic c ad $\frac{11c}{2}$), à cujus quadrato $\frac{121cc}{4}$ si auferatur

143

$\frac{143,143,qq}{112,112,3}$, quadratum ex A M; relinquetur $\frac{121cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$, pro quadrato ex B M. Subductâ autem A M $\frac{143q}{112\sqrt{3}}$ ex A Q $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, remanet $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$ pro M Q seu x. Jam cum quadratum ex B M, primò inventum, sit $rx - \frac{rxx}{q}$, subrogato $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$ in locum x, & $\frac{1}{4}qq - \frac{47qq}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qq}{56,56,3}$ in locum xx; K
habebitur $\frac{143qr}{56,56,3}$, pro quadrato ex B M. Ac proinde, cum paulò ante pro quadrato ex B M inventum quoque sit $\frac{121cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$: erit $\frac{143qr}{56,56,3} \propto \frac{121cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$. Quæ æquatio si reducatur, proveniet $r \propto \frac{11,14,56,3cc}{13q} - \frac{143q}{4}$.

Quomodo latus rectum inveniatur per Conum.

Præterea, ad investigandum latus rectum r in aliis terminis, addatur quadratum ex A S, $qqvv - 2fvvqq + ffvvqq$, ad quadratum ex A R, cc; & habebitur $cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq$, pro quadrato ex R S: adeoque $\sqrt{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq}$, pro R S. quæ brevitatis causâ nominetur n. Deinde, quoniam, propter similitudinem triangulorum A R S, T S V, & P Y S, R S seu n est ad A R seu c, sicut S V seu fvq ad T V, & P S seu $\frac{1}{2}q - fvq$ ad P Y; invenietur $\frac{fvqc}{n}$ pro T V, & $\frac{\frac{1}{2}qc - fvqc}{n}$, pro P Y, quæ additæ efficiunt $\frac{\frac{1}{2}qc}{n}$, pro T X. Rursus, quia, propter eandem triangulorum si- L
militudinem, R S, seu n, est ad A S seu $qv - fvq$, sicut S V seu fvq ad S T, & P S seu $\frac{1}{2}q - fvq$ ad S Y; fiet pro S T $\frac{qqvvf - ffvvqq}{n}$, & $\frac{\frac{1}{2}qqv - fvvqq - \frac{1}{2}fvqq + ffvvqq}{n}$, pro S Y. quæ ab R S $\frac{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq}{n}$ subducta, relinquit $\frac{cc + qqvv - fvvqq + \frac{1}{2}fvqq - \frac{1}{2}qqv}{n}$, pro R Y. Additis autem R S & S T, habebitur $\frac{cc + qqvv - fvvqq}{n}$ pro R T.

Jam cum, ob quatuor lineas proportionales R T, R Y, T X, & P Y, R T multiplicata per P Y tantundem producat atque R Y per T X: proveniet $\frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}qqvv - \frac{1}{2}fvvqq - ccfv - fqqv^3 + ffv^3qq \infty \frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}qqvv - \frac{1}{2}fvvqq + \frac{1}{4}fvqq - \frac{1}{4}qqv$, adeoque $cc \infty fvvqq - qqvv\frac{+\frac{1}{4}qq}{f} - \frac{1}{4}qq$. Porrò subducto quadrato ex T V à quadrato ex T X vel T Z, relinquetur $\frac{\frac{1}{4}qqcc - ffvvqqcc}{nn}$ pro quadrato ex Z V, $\infty \frac{1}{4}qr$. Unde r sic invenitur. Restituatur valor ipsius nn, & fit $\frac{\frac{1}{4}ccqq - ffvvqqcc}{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq} \infty \frac{1}{4}qr$, vel $ccq - ccr - 4ffvvqcc \infty qqvvr - 2fvvqqr + ffvvqqr$: itemque loco cc valor ejus jam modò inventus, & habebitur, qq utrobique exemptis, $fvvq - 4f^3v^4q - vvq + 4ffv^4q - \frac{1}{4}q + \frac{1}{4}r + ffvvq - fvvq\frac{+\frac{1}{4}q - \frac{1}{4}r}{f} \infty - fvvr + ffvvr$. Quibus demum per f multiplicatis, si quantitates in r ductæ ad unam partem transferantur, obtinebitur, utramque partem per $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}f - ffvv + f^3vv$ dividendo, $r \infty q - 4fvvq$.

Quâ ratione, ex duplici terminorum genere ipsius r, inveniatur f.

Postquam igitur inventa est $r \infty \frac{11,14,56,3,cc}{13q} - \frac{143q}{4}$, nec non $r \infty q - 4fvvq$, erit $\frac{11,14,56,3,cc}{13q} - \frac{143q}{4} \infty q - 4fvvq$.

$4fvvq$. Ex qua æquatione quæro f, hoc modo: pro $\frac{11,14,56,3}{13}$ scribatur brevitatis causâ d, eritque $\frac{dcc}{q} - \frac{143q}{4} \infty q - 4fvvq$. Rursus pro $\frac{143}{4}$ scribatur b, & erit $\frac{dcc}{q} - bq \infty q - 4fvvq$, hoc est, subrogato $fvvqq - qqvv + \frac{\frac{1}{4}qq}{f} - \frac{1}{4}qq$ in locum cc, habebitur $dfvvq - dvvq + \frac{\frac{1}{4}dq}{f} - \frac{1}{4}dq - bq \infty q - 4fvvq$. Unde, dividendo utrinque per q, & multiplicando per f, invenietur, quantitatibus in ff ductis ad unam partem translatis, $dvvff + 4vvff \infty f + bf + \frac{1}{4}df + dvvf - \frac{1}{4}d$: adeoque si restituantur valores quantitatum d & b, atque in locum v substituatur $\frac{7}{16\sqrt{3}}$, $\frac{317569}{2496}ff \infty \frac{137543}{208}f - \frac{6468}{13}$, vel $ff \infty \frac{33684}{6481}f - \frac{25344}{6481}$, M cujus æquationis radix est $f \infty \frac{16842 \div \sqrt{119398500}}{6481}$ seu N $\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$.

Deinde, ex iisdem terminis quæro q, ut sequitur. Resumptâ æquatione $\frac{25872cc}{13q} - \frac{143q}{4} \infty q - 4fvvq$, loco cc reponatur valor ejus datus 36, & ubique multiplicetur per q, fietque $\frac{25872,36}{13} - \frac{143qq}{4} \infty qq - 4fvvqq$, vel $\frac{25872,36}{13} \infty qq + \frac{143qq}{4} - 4fvvqq$, adeoque $qq \infty \frac{\frac{25872,36}{13}}{1 + \frac{143}{4} - 4fvv}$. Quoniam autem inventa est f & v, hinc in locum $-4fvv$ substituatur $\frac{-4,7,7,16842 + 4,7,7,390\sqrt{785}}{16,16,3,6481}$, seu $\frac{-196,16842 + 76440\sqrt{785}}{768,6481}$,

Quâ ratione ex iisdem terminis ipsius r inveniatur q.

seu

seu $\frac{-24,137543+24,3185\sqrt{785}}{24,32,6481}$, hoc est,

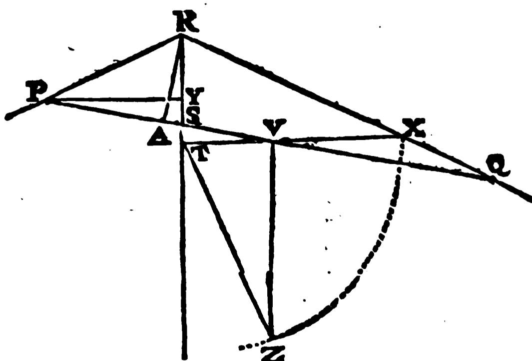
$\frac{-137543+3185\sqrt{785}}{32,6481}$; eritque $qq \infty \frac{\frac{25872,36}{13}}{\frac{7484113+3185\sqrt{785}}{32,6481}}$,

seu $qq \infty \frac{\frac{25872,36}{13}}{\frac{49,13 \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}{32,6481}}$, hoc est,

$\frac{25872,36,32,6481}{13,13,49 \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}$, seu $\frac{528,49,36,32,6481}{169,49 \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}$,

hoc est, $\frac{11,48,36,32,6481}{169 \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}$. Hinc posito $cc \infty 1$, erit

$qq \infty \frac{11,48,32,6481}{169 \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}$; at verò existente



$cc \infty \overline{169}$ in $\overline{11749+5\sqrt{785}}$, erit $qq \infty 11,48,32,6481$, adeoque $q \infty \sqrt{\overline{11,48,32,6481}}$, & $qv \infty \frac{\sqrt{\overline{49,11,48,32,6481}}}{16,16,3}$,

seu

seu $\sqrt{\frac{49,11,48,32,6481}{16,48}}$, hoc est, $\sqrt{\frac{49,11,32,6481}{16}}$, seu $\infty \sqrt{49,22,6481}$.

Jam, ut inveniatur ratio AS ad AR, quoniam $1-f$ multiplicata per qv producit $qv-fvq$, atque f est $\frac{16842-390\sqrt{785}}{6481}$: ideo, si $1-f \infty \frac{390\sqrt{785}-10361}{6481}$ multiplicetur per $qv \infty \sqrt{49,22,6481}$, exsurget $qv-fvq \infty$ $\frac{\sqrt{49,22,6481} \text{ in } \overline{390\sqrt{785}-10361}}{6481}$, pro AS; seu AS ∞ $\frac{7\sqrt{22,6481} \text{ in } \overline{13,30\sqrt{785}-13,797}}{\sqrt{6481,6481}}$, hoc est, $\frac{7,13\sqrt{22} \text{ in } \overline{30\sqrt{785}-797}}{\sqrt{6481}}$; & AR $\infty\ 13 \text{ in } \sqrt{11749+5\sqrt{785}}$. *Ut & ratio AS ad AR.*

Quibus per 13 divisis, erit AS ∞ $\frac{7\sqrt{22} \text{ in } \overline{30\sqrt{785}-797}}{\sqrt{6481}}$, & AR $\infty \sqrt{11749+5\sqrt{785}}$, aut, si ponatur AS $\infty\ 7\sqrt{22}$, erit AR ∞ $\frac{\sqrt{6481} \text{ in } \sqrt{11749+5\sqrt{785}}}{30\sqrt{785}-797}$: multiplicatoque hujus tum numeratore tum denominatore per denominatoris residuum, proveniet AR ∞ $\frac{\sqrt{6481} \text{ in } \sqrt{11749+5\sqrt{785}} \text{ in } \overline{797+30\sqrt{785}}}{11,6481 \text{ vel } 11,\sqrt{6481},\sqrt{6481}}$, hoc est, AR ∞ $\frac{\sqrt{11749+5\sqrt{785}} \text{ in } \overline{797+30\sqrt{785}}}{11\sqrt{6481}}$, seu $\sqrt{\frac{15951432541+568545725\sqrt{785}}{121,6481}}$, seu $\sqrt{20341+725\sqrt{785}}$. Ac proinde si AS $\infty\ 7\sqrt{22}$ sumatur pro radio, erit AR $\infty \sqrt{20341+725\sqrt{785}}$, tangens anguli ASR sive elevationis Poli, videlicet 80 grad. 45 min. circiter.

Denique ad investigandam rationem TX ad TR, vel PY ad YR; cum TX supra inventa sit $\frac{\frac{1}{2}cq}{n}$, & TR ∞ $\frac{cc+qqvv-fvvqq}{n}$: hinc

hinc ut inveniatur ratio horum terminorum, (quoniam supposita AR seu $c \infty 1$, qq est $\frac{11,\,48,\,32,\,6481}{169 \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}}$, vel, numeratore atque denominatore per $11749 - 5\sqrt{785}$ multiplicato,

$$qq \infty \frac{\overline{11,\,48,\,32,\,6481} \text{ in } \overline{11749 - 5\sqrt{785}}}{169,\,138019376}, \text{ seu}$$

$\frac{\overline{48,\,2,\,176,\,6481} \text{ in } \overline{11749 - 5\sqrt{785}}}{169,\,121,\,176,\,6481}$, hoc est, $\frac{\overline{48,\,2} \text{ in } \overline{11749 - 5\sqrt{785}}}{169,\,121}$,

& $q \infty \sqrt{\frac{48,\,2 \text{ in } \overline{11749 - 5\sqrt{785}}}{169,\,121}}$, & vv est $\frac{49}{256,\,3}$, adeoque $qqvv$

$\infty \frac{\overline{48,\,2,\,49} \text{ in } \overline{11749 - 5\sqrt{785}}}{169,\,121,\,256,\,3}$, seu $\frac{\overline{96,\,49} \text{ in } \overline{11749 - 5\sqrt{785}}}{169,\,121,\,96,\,8}$, hoc est,

$\frac{\overline{49} \text{ in } \overline{11749 - 5\sqrt{785}}}{169,\,121,\,8}$) neglecto communi denominatore n, multiplicetur $1 - f$ per $qqvv$, & fit $qqvv - fvvqq \infty$

$\frac{390\sqrt{785} - 10361}{6481}$ in $\frac{49 \text{ in } \overline{11749 - 5\sqrt{785}}}{169,\,121,\,8}$, seu

$\frac{-6517,\,11,\,6481 + 49,\,5,\,11,\,6481\sqrt{785}}{13,\,11,\,11,\,8,\,6481}$, hoc est, $\frac{-6517 + 49,\,5\sqrt{785}}{13,\,11,\,8}$.

Cui si addatur $cc \infty 1$, fiet $cc + qqvv - fvvqq \infty \frac{-5373 + 49,\,5\sqrt{785}}{13,\,11,\,8}$, pro TR. Eodem modo multiplicato

$q \infty \frac{\sqrt{48,\,2 \text{ in } \overline{11749 - 5\sqrt{785}}}}{169,\,121}$, per $\frac{1}{2}c$, seu $\frac{1}{2}$ (quandoquidem c est 1):

habebitur $\frac{1}{2}cq \infty \frac{\sqrt{24 \text{ in } \overline{11749 - 5\sqrt{785}}}}{169,\,121}$, pro TX. Inventæ igitur TX & TR si reducantur ad eandem denominationem, ac deinde denominator communis omittatur, obtinebitur $TX \infty \sqrt{64,\,24 \text{ in } \overline{11749 - 5\sqrt{785}}}$, & $TR \infty 49,\,5\sqrt{785} - 5373$, sive $TX \infty \sqrt{18046464 - \sqrt{46301184000}}$, & $TR \infty \sqrt{47119625} - 5373$.

Quarum si TX vel PY sumatur pro radio, erit TR vel YR tangens anguli TXR vel YPR, grad. 19, & 27 min. circiter, distantiæ loci Solis in Ecliptica ab Æquatore.

Cum autem in exposita hujus Problematis solutione nonnulla occurrant, quæ illustrationem aliquam requirere videntur, atque minùs

minùs exercitatis scrupulum injicere possent; placuit ea, quæ ad eorum explicationem Vir Clarissimus D. Erasmius Bartholinus, Casp. Fil. Medicinæ ac Mathematum in Academia Hafniensi Professor Regius concinnavit, paucis hìc adjicere.

Ita ut G A ad A D sit, ut 9 ad 4.] Ostensum enim est Theoremate præcedenti C A esse ad A F, hoc est, baculum C ad baculum A, sicut C B ad A G. Unde cum baculus A ad baculum B sit, sicut D A ad C B: erit quoque ex æqualitate in proportione perturbata, ut C baculus ad B baculum, hoc est, ut 8 ad 18, seu 4 ad 9, ita D A ad A G; & convertendo G A ad A D, ut 9 ad 4. A

A V ∞ qu, S V ∞ fuq.] Puta hìc unitatem subintelligi, quæ sit *a*; ita ut *a* seu 1 sit ad *q*, sicut *u* ad *qu*; & rursus *a* seu 1 ad *qu*, sicut *f* ad *fuq*. B

Ac proinde B M + H C ∞ 3 D K.] Nam cum, propter similitudinem triangulorum *α* B M & *α* C H, *α* B sit ad B M, sicut *α* C ad C H, & permutando *α* B ad *α* C, sicut B M ad C H, componendoque B C ad *α* C, sicut B M + C H ad C H: & propter similia triangula C *α* H & D A K, *α* C ad C H, sicut A D ad D K, permutandoque *α* C ad A D, sicut C H ad D K; erit ex æquo, ut B C ad A D, sic B M + C H ad D K. Unde cum B C ipsius A D tripla sit, erit quoque B M + H C ipsius D K tripla. C *Huc refer fig. p. 372.*

E quibus porrò invenitur P A ad A Q esse, ut $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, hoc est, ut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.] Quemadmodum postea perspicuum fiet. D

Tertiæ videlicet parti ipsius B M.] Nimirum, propter similitudinem triangulorum A B M & A E N, ubi A B est ad B M, sicut A E ad E N, & permutando A B ad A E, sicut B M ad N E. Unde cum A B ad A E (ut supra) sit, sicut 3 ad 1: erit quoque B M ipsius N E tripla. E

Et hi rursus divisi per $-p+q$, *&c.*] Ubi notandum, si B M $\sqrt{-144p^3+288ppq-171pqq+27q^3}$, H C $\sqrt{-49p^3+98ppq-61pqq+12q^3}$, & tripla D K $\sqrt{-169p^3+338ppq-205pqq+36q^3}$ dividantur per $-p+q$, oriri pro B M $\sqrt{+144pp-144pq+27qq}$, pro F

HC $\sqrt{+49pp-49pq+12qq}$, & pro tripla DK $\sqrt{+169pp-169pq+36qq}$; non autem $\sqrt{-144pp+144pq-27qq}$, $\sqrt{-49pp+49pq-12qq}$, & $\sqrt{-169pp+169pq-36qq}$, ut habet Auctor. Ratio autem cur ita signa immutaverit, est, quòd signa negata prævaleant signis affirmatis. quod sic ostendi potest.

Etenim cum $2p$ — major sit quàm — q
& utrinque multiplicetur per $72q$ — — — — $72q$
erit quoque $144pq$ — major quàm — $72qq$,
unde si auferatur * $144pp$ — major quàm — $36qq$
relinquetur $144pq - 144pp$ major quàm $36qq$:
adeoque addendo utrinque $144pp$ — — — — — $144pp$ *
erit quoque $144pq$ major quàm $144pp + 36qq$.

— — — $2p$ major quàm q
utraq; in se ducatur $2p$ — — q
& fiet $4pp$ major quàm qq:
adeoq; multiplicando utrinque per 36 — — — 36
erit $144pp$ major quàm $36qq$

Ac proinde $144pq$ multò major quàm $144pp + 27qq$. Et sic de reliquis. Ubi notandum, si loco divisoris superioris $-p+q$ sumatur divisor $+p-q$, eosdem terminos inveniri, iisdemque signis affectos, quemadmodum ab Auctore sunt propositi.

G *Vbi porrò si supponatur* $-p+q \infty n$, *habebitur* $\sqrt{+144pn-27qq}$ *pro BM.*] Etenim existente $-p+q \infty n$, si utrobique multiplicetur per $+144p$, fiet $-144pp+144pq \infty +144pn$: adeoque $-144pp+144pq-27qq \infty +144pn-27qq$, ac proinde $\sqrt{-144pp+144pq-27qq} \infty \sqrt{+144pn-27qq}$. Et sic de reliquis.

H *Fiet pro PA* $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, *&* $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ *pro AQ.*]

Vide pag. 165 vel 284.

Quoniam enim æquatio $pp \infty qp - \frac{143}{768}qq$, duas admittit veras radices, quarum summa est q, referens quantitatem cognitam secundi termini qp, atque designans lineam PQ: fit, ut si una $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ sumatur pro linea AQ, pro quâ supposita fuit p, altera $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ sumenda sit pro linea PA.

I *Vnde porrò innotescit PA esse ad AQ, sicut* $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ *ad* $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.] Quod sic liquet,

AP

AP AQ

$\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$.

Multiplicetur utrinque per 2, & fit $q - \frac{7q}{8\sqrt{3}}$ ad $q + \frac{7q}{8\sqrt{3}}$:

tum rursus per $\sqrt{3}$, & fit $q\sqrt{3} - \frac{7q}{8}$ ad $q\sqrt{3} + \frac{7q}{8}$.

Denique dividatur utrobique per q, fietque $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad. $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Subrogato $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$ *in locum* x, & $\frac{1}{4}qq - \frac{47qq}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qq}{56,56,3}$ *in locum* xx, *habebitur* $\frac{143qr}{56,56,3}$, *pro quadrato ex* *BM*.] Id quod hoc pacto fieri potest. K

Ex $rx \infty \frac{1}{2}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}}$

subtrahatur $\frac{rxx}{q} \infty \frac{1}{4}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qr}{56,56,3}$:

& remanebit $rx - \frac{rxx}{q} \infty \frac{1}{4}qr - \frac{47,47,qr}{56,56,3}$, vel $\frac{142qr}{56,56,3}$.

Nimirum si reducatur $\frac{1}{4}qr$ ad denominatorem ipsius $\frac{47,47qr}{56,56,3}$. utpote faciendo ut 4 ad 56, sic 1 ad 14, eritque $\frac{1}{4}qr \infty \frac{14qr}{56}$. & deinde multiplicando tam numeratorem quàm denominatorem hujus fractionis per 56, 3, fiet $\frac{56,3,14qr}{56,56,3}$, vel $\frac{2352qr}{56,56,3}$: à quo subducto $\frac{47,47,qr}{56,56,3}$ seu $\frac{2209qr}{56,56,3}$, relinquetur $\frac{143qr}{56,56,3}$.

Quæ addita efficiunt $\frac{\frac{1}{2}qc}{n}$, *pro TX*.] Est enim PY æqualis VX. Quod facilè demonstrari potest. Cum enim Sol quotidianâ suâ conversione circa mundi axem rectos Conos efficiat: fit, ut PY, si producta concipiatur, donec ipsi RQ occurrat, ab axe RT in puncto Y bifariam atque ad angulos rectos secetur, triangulumque efficiat, quod triangulo VXQ sit simile ac similiter positum. cujus latus PQ duplum existens lateris VQ trianguli VXQ (propter punctum V, quod centrum refert Ellipsis, cujus transversa diameter est PQ, & ZV semissis secundæ diametri) L

 metri)

metri) facit ut etiam linea P Y producta ipsius V X dupla sit futura, adeoque P Y æqualis V X.

M *Atque in locum v substituatur* $\frac{7}{16\sqrt{3}}$.] Convincitur autem v esse $\frac{7}{16\sqrt{3}}$: est enim A Q supra inventa $\infty \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & P A $\infty \frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$. Unde cum P Q sit ∞q, & V punctum medium ipsius P Q, adeoque P V vel V Q $\infty \frac{1}{2}q$; erit A V $\infty \frac{7q}{16\sqrt{3}}$. Hinc cum A V supposita sit ∞vq, erit $vq \infty \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, ac proinde $v \infty \frac{7}{16\sqrt{3}}$.

N *Cujus æquationis radix f est* $\frac{16842 - \sqrt{119398500}}{6481}$, *seu* $\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$.] Notandum hìc, æquationem $ff \infty \frac{33684}{6481}f - \frac{25344}{6481}$ aliam adhuc admittere radicem, nempe $f \infty \frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$, juxta ea, quæ habentur pag. 7.

Quam quidem radicem, cum major sit quàm $v \infty \frac{7}{16\sqrt{3}}$, cujus non nisi partem designare debet, Author meritò neglexit. Esse autem $\frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$ quàm $\frac{7}{16\sqrt{3}}$ majorem, patet, si reducantur ad eandem denominationem, utpote ponendo $\frac{16842,7 + 390,7\sqrt{785}}{6481,16,\sqrt{3}}$, & $\frac{6481,7}{6481,16\sqrt{3}}$.

O *Ac proinde si A S* $\infty 7\sqrt{22}$ *sumatur pro radio, erit A R* $\infty \sqrt{20341 + 725\sqrt{785}}$, *tangens anguli A S R sive elevationis Poli, videlicet* 80 *grad.* 45 *min. circiter.*] Est enim $7\sqrt{22}$ in rationalibus ∞ 32, 8′ 3″ 1‴, circiter, & $\sqrt{20341 + 725\sqrt{785}} \infty$ 201, 6′ 2″ 8‴, circiter. Unde si fiat ut A S 32, 8′ 3″ 1‴ ad radium 100000, ita A R 201, 6′ 2″ 8‴ ad quartum 614105: erit 614105 tangens anguli A S R. proximè respondens tangenti grad. 80, & 45 min.

Qua-

Quarum si TX vel PY sumatur pro radio, erit TR vel YR tangens anguli TXR vel YPR, grad. 19, & 27 min. circiter; distantia loci Solis in Ecliptica ab Æquatore.] Cum enim pro TX inventa sit $\sqrt{18046464 - \sqrt{463011184000}}$, quæ in rationalibus ferè est 4222, 7′ 1″ 1‴, & pro TR $\sqrt{47119625} - 5373$, quæ in rationalibus est 1491, 3′ 7″ 4‴ circiter: hinc, si fiat ut TX 4222, 7′ 1″ 1‴ ad radium 100000, ita TR 1491, 3′ 7″ 4‴ ad quartum 35318; erit 35318 tangens anguli TXR vel YPR, congruens quàm proximè tangenti grad. 19, & 27 min.

Et tantum de solutione Problematis, quod in specimen hujus Methodi afferre visum fuit; quæ cum talis sit, ut ad Arithmeticæ quæstiones enodandas, non minùs quàm ad Geometriæ Problemata resolvenda atque construenda deserviat, non abs re fuerit, si Coronidis loco hìc subjiciam regulam quandam generalem, ex eadem Methodo depromptam, extrahendi radices quaslibet ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus, quæ unà cum præcedenti solutione tunc temporis prodiit; præsertim cum illa à nemine (quod sciam) antea sit inventa, nec ab aliquo ea in re cuiquam satisfactum. cujus demonstrationem, qualis à me inventa est, breviter sum subjuncturus.

Regula generalis extrahendi quaslibet radices ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus.

PRÆPARATIO.

PRimo, si in dato Binomio reperiantur fractiones, oportet illas, multiplicando binomium per illarum denominatorem, eximere. Ut, exempli gratiâ, ad extrahendam √ ③ ex $\sqrt{242} + 12\frac{1}{2}$, multiplico binomium per 2, & fit $\sqrt{968} + 25$. Similiter si sit $\sqrt{\frac{242}{5}} + \sqrt{\frac{125}{4}}$, primùm multiplico binomium per

$\surd 5$, & fit $\surd 242 + \frac{25}{2}$, deinde per 2, ut jam factum est, & sic de cæteris.

Deinde, si neutra pars binomii rationalis fuerit, reducendum est per multiplicationem aut divisionem ad aliud binomium, cujus altera pars sit rationalis. Id quod per multiplicationem alterutrius partis semper fieri potest; sed breviùs plerumque per minoris numeri multiplicationem aut divisionem. Quemadmodum $\surd 242 + \surd 243$ multiplicari quidem potest per $\surd 242$, & fit $242 + \surd 58806$; sed compendiosiùs per $\surd 2$, & provenit $22 + \surd 486$. Eodem modo $\surd$ ③ $3993 + \surd$ ⑥ 17578125 potest bis multiplicari per $\surd$ ③ 3993, & producitur aliud binomium, cujus absolutus numerus est 3993; sed breviùs per $\surd$ ③ 9; & adhuc breviùs, si dividatur per $\surd$ ③ 3, fietque $11 + \surd 125$.

Ubi notandum, postquam habetur binomium, cujus una pars est rationalis, tunc quoque quadratum alterius partis rationale esse debere; aut nullam ex eo radicem, nec etiam ex alio binomio, utramque partem irrationalem habente, à quo per multiplicationem aut divisionem deductum est, extrahi posse.

Tertiò, ad extrahendam $\surd$ ⑥, oportet primò radicem quadratam extrahere, & deinde ex hac $\surd$ ③. Et ad extrahendam $\surd$ ⑨ oportet bis extrahere $\surd$ ③. Et sic de reliquis radicibus, quæ per numeros compositos, hoc est, qui per alios dividi possunt, designantur. Radicem verò quadratam quod attinet, regula ad illam extrahendam satis nota est: quapropter hìc tantùm opùs est, ut doceam, quo pacto extrahendæ sint $\surd$ ③, $\surd$ ⑤, $\surd$ ⑦, $\surd$ ⑪, & similes aliæ, quæ per numeros primos, hoc est, qui per alios dividi nequeunt, denotantur.

Postremò ad extrahendam $\surd$ ③, $\surd$ ⑤, $\surd$ ⑦, aut similem, per numerum primum designatam, explorandum primò est, utrum radix Binomium esse possit, cujus una pars sit rationalis. Id quod innotescit subducendo quadrata partium à se invicem, & ex reliquo extrahendo radicem, nempe cubicam si ex dato binomio $\surd$ ③ sit extrahenda; aut surdesolidam, si $\surd$ ⑤ sit extrahenda, & sic de cæteris. Quod ita in posterum, ubi radix aliqua extrahi debet, intelligendum est, licèt expressè non dicatur. Etenim si radix hæc numerus rationalis non fuerit, certò constat, radicem quæsitam parte rationali carere. Sed cum binomium adhuc esse possit,

ſit, cujus utraque pars ſit irrationalis: hinc ad eam extrahendam datum binomium per differentiam quadratorum partium erit multiplicandum, ſi de radice cubica extrahenda quæſtio fuerit; aut per quadratum hujus differentiæ, ſi de √ ⑤; aut per ejuſdem cubum, ſi de √ ⑦; aut per ipſius ſurdeſolidum, ſi de √ (11) quæratur, atque ita de cæteris. Quâ ratione aliud ſemper binomium habebitur, in quo radix differentiæ quadratorum partium erit differentia quadratorum partium prioris binomii. Ut ad extrahendam radicem cubicam ex 25 + √ 968, ſubduco primùm 625, quadratum ex 25, à 968, & remanent 343, cujus numeri radix cubica eſt 7, numerus nimirum rationalis. Id quod arguit, radicem, modò ex dato binomio extrahi poſſit, fore binomiam, cujus una pars futura ſit rationalis. Similiter ad extrahendam √ ③ ex 22 + √ 486, oportet 484, quadratum à 22, ſubducere ex 486, & ex reliquo 2 elicere radicem cubicam. Quoniam verò id fieri non poteſt, conſtat radicem cubicam ex 22 + √ 486 parte rationali carere: ac propterea 22 + √ 486 per 2 multiplicandam eſſe, ut habeatur binomium 44 + √ 1944, in quo radix differentiæ quadratorum partium eſt 2. Sic ad extrahendam radicem ſurſolidam ex 11 + √ 125, quoniam ſubductis 121 à 125, remanent 4, qui numerus ſurdeſolidus non eſt: hinc 11 + √ 125 multiplicari debet per 16, quadratum ex 4, ut proveniat 176 + √ 32000. In quo radix ſurſolida differentiæ quadratorum partium eſt 4. Denique ad extrahendam √ ⑦ ex 338 + √ 114242, in quo differentia quadratorum partium eſt 2, quoniam hic numerus B-ſurdeſolidus non eſt: ideo datum binomium multiplicari debet per 8, hoc eſt, per cubum ex 2, & fit 2704 + √ 7311488, in quo √ ⑦ differentiæ quadratorum partium eſt 2.

REGULA.

Per præcedentem præparationem ſemper invenitur binomium, cujus una pars, & alterius partis quadratum, nec non radix differentiæ quadratorum partium, ſunt numeri rationales integri; ex quo √ ③, aut √ ⑤, aut √ ⑦, &c. extrahi debet.

In quem finem inveniendus eſt numerus rationalis, radice quæſitâ paulò major; ita ut differentia non major ſit quàm $\frac{1}{2}$. Quod facilè per vulgarem Arithmeticam fieri poteſt.

Jam

Jam si pars rationalis dati binomii reliquâ parte major fuerit, oportet huic radici rationali addere radicem differentiæ quadratorum partium, divisam per eandem radicem rationalem: eritque semissis maximi integri numeri, in aggregato contenti, pars rationalis radicis quæsitæ. A cujus partis quadrato si auferatur radix differentiæ quadratorum partium, habebitur reliquæ partis quadratum; dummodo radix ex dato binomio extrahi possit. Id quod facilè per multiplicationem hujus inventæ radicis experiri licet, quæ datum binomium, si aliqua ex eo extrahi possit, producere debet.

Verùm, si dati binomii pars rationalis reliquâ parte minor fuerit, oportet à radice rationali, quam ex toto binomio extraximus, subducere radicem differentiæ quadratorum partium, divisam per eandem radicem rationalem: critque media pars maximi integri numeri in reliquo contenti, pars rationalis, radicis quæsitæ. Ad cujus partis quadratum si addatur radix differentiæ quadratorum partium, habebitur quadratum reliquæ partis; modò radix fuerit binomium. Quod ex multiplicatione (ut supra) manifestum fiet.

Exempli causâ, ad extrahendam radicem cubicam ex 25 + √968, cognito jam radicem cubicam differentiæ quadratorum partium esse 7, extraho radicem quadratam ex √968, quæ est major quàm 31, at minor quàm 32; deinde ad 25, numerum absolutum, addo 31 aut 32, & fit summa 56 aut 57. Ex qua radicem cubicam extraho, quæ quidem minor est quàm 4, at major quàm $3\frac{1}{2}$; ita ut 4 sit numerus quæsitus rationalis, verâ radice paulò major. Postea ex 4 subtraho $\frac{7}{4}$ (hoc est, 7, radicem cubicam differentiæ quadratorum partium, postquam per radicem inventam 4 est divisa), & remanent $2\frac{1}{4}$. Subtraho autem, quoniam numerus absolutus 25 minor est quàm √968; si enim esset major addenda fuisset. Maximus verò integer numerus in $2\frac{1}{4}$ contentus, est 2, cujus semissis est 1, pars rationalis, radicis. Cujus quadrato 1, addo 7, √③ nempe differentiæ quadratorum partium, & fit summa 8, quadratum alterius partis. Ita ut 1 + √8 sit √③ ex 25 + √968, nimirum si √③ ex eo extrahi possit. Quod ut cognoscatur, oportet per multiplicationem investigare cubum ex 1 + √8; aut si brevitati consulamus, tantùm ejus partem rationalem: quod fit addendo 1, cubum partis rationalis radicis, ad triplum ejus-

ejusdem partis 1, multiplicatæ per 8, quadratum alterius partis. Quod quia cum 25 parte rationali dati binomii convenit, constat, $1 + \sqrt{8}$ esse veram radicem: si verò non conveniret, radicem extrahi non posse, liquidò constaret.

Eodem modo ad extrahendam $\sqrt{(3)}$ ex $44 + \sqrt{1944}$: radix cubica differentiæ quadratorum partium est 2, & radix quadrata ex 1944 major quàm 44, at minor quàm 45. Quam addo numero absoluto 44, & fit summa 88 aut 89, cujus $\sqrt{(3)}$ major est quàm 4, & minor quàm $4\frac{1}{2}$. Quapropter subtractâ $\frac{4}{9}$, radice differentiæ quadratorum partium, divisâ per radicem rationalem, ex $4\frac{1}{2}$, pro radice rationali assumptâ, remanent $4\frac{1}{18}$. Et fit 2, semissis ex 4, pars rationalis radicis. cujus quadrato 4, si addatur 2, radix differentiæ, prodibit 6, quadratum reliquæ partis. Ut patet, addendo 8 ad ter 2, multiplicatum per 6, hoc est, 36; & fit summa 44, pars rationalis binomii dati: adeoque $2 + \sqrt{6}$ radix quæsita.

Ad extrahendam $\sqrt{(5)}$ ex $176 + \sqrt{32000}$; radix sursolida differentiæ quadratorum partium est 4; radix autem sursolida rationalis ex dato binomio est $3\frac{1}{2}$, unde subductis 4, divisis per $3\frac{1}{2}$, hoc est, $1\frac{1}{7}$, remanebunt $2 + \frac{5}{14}$. Semissis verò ex 2 est 1, cujus quadratum 1 additum ad 4 efficit 5, & fit $1 + \sqrt{5}$, radix sursolida quæsita ex $176 + \sqrt{32000}$; saltem si aliqua inveniri possit. Id quod totius binomii multiplicatione indagari potest, vel breviùs, addendo simul; surdesolidum partis rationalis, radicis; decuplum cubum ejusdem, multiplicatum per quadratum alterius partis; & quintuplum partis rationalis, multiplicatum per quadrato-quadratum ejusdem alterius partis. Nimirum addendo 1, 50, & 125, unde exsurgunt 176. Quod cum parti rationali dati binomii sit æquale, sequitur $1 + \sqrt{5}$ propositi binomii esse veram radicem.

Ad extrahendam $\sqrt{(7)}$ ex $2704 + \sqrt{7311488}$; radix B-sursolida differentiæ quadratorum partium est 2; radix autem B-sursolida rationalis totius binomii est $3\frac{1}{2}$, cui addo $\frac{4}{7}$ (quoniam hìc numerus absolutus major est), & fit summa $4\frac{1}{14}$: ac proinde 2 radicis pars rationalis. A cujus quadrato 4 subtraho 2, radicem B-sursolidam differentiæ quadratorum partium, & relinquetur alterius partis quadratum 2. Porrò multiplico $2 + \sqrt{2}$ B-sursolidè, vel breviùs, in unam summam colligo; 128, B-sursolidum ex 2;

1344, vicies & semel sursolidum ex 2, multiplicatum per quadratum ex $\surd$ 2; 1120, trigesies & quinquies cubum ex 2, multiplicatum per quadrato-quadratum ex $\surd$ 2; & 112, septies 2, multiplicatum per quadrato-cubum ex $\surd$ 2, & provenient 2704. Unde manifestum fit, $2 + \surd\, 2$ esse radicem quæsitam.

Cæterùm observandum hìc est, postquam datum binomium per numerum aliquem multiplicatum aut divisum fuerit, atque ad aliud reductum, cujus radix jam sit inventa, quòd, ad prioris binomii radicem obtinendam, radicem inventam dividere aut multiplicare oporteat per radicem numeri, per quem binomium multiplicatum fuit aut divisum.

Sic quoniam ad extrahendam $\surd$ ③ ex $\surd\, 242 + 12\frac{1}{2}$, ipsum per 2 multiplicavimus, & deinde hujus posterioris binomii radicem invenimus esse $1 + \surd\, 8$; dividendum erit $1 + \surd\, 8$ per $\surd$ ③ ex 2, & fiet $\surd$ ③ $\frac{1}{2}$ + $\surd$ ⑥ 128, radix cubica ex $\surd\, 242 + 12\frac{1}{2}$.

Multiplicavimus $\surd\, \frac{242}{5} + \surd\, \frac{125}{4}$ per $\surd\, 5$, & invenimus $\surd\, 242 + 12\frac{1}{2}$, cujus radix est $\surd$ ③ $\frac{1}{2}$ + $\surd$ ⑥ 128; quâ divisâ per $\surd$ ⑥ 5, emerget $\surd$ ⑥ $\frac{1}{20}$ + $\surd$ ⑥ $\frac{128}{5}$, pro radice ex $\surd\, \frac{242}{5} + \surd\, \frac{125}{4}$.

Multiplicatum est $\surd\, 242 + \surd\, 243$, primò per $\surd\, 2$, & deinde per 2; unde fit ut inventa radix cubica $2 + \surd\, 6$ dividenda sit per $\surd\, 2$, & prodibit $\surd\, 2 + \surd\, 3$, pro radice cubica quæsita ex $\surd\, 242 + \surd\, 243$.

Divisimus $\surd$ ③ 3993 + $\surd$ ⑥ 17578125 per $\surd$ ③ 3, & multiplicavimus per 16, ad extrahendam $\surd$ ⑤: quare necesse est inventam radicem $1 + \surd\, 5$ dividere per $\surd$ ⑤ 16, & multiplicare per $\surd$ (15) 3, ut habeatur vera radix sursolida ex dato binomio.

SEQVITVR DEMONSTRATIO.

IN primis est ostendendum, quòd, si binomium aliquod in se multiplicetur cubicè, proveniat semper aliud binomium, cujus partium quadrata, à se invicem subducta, relinquant cubum differentiæ quadratorum partium radicis sive primi binomii. Id quod

quod manifestum fit, supponendo binomium illud designari per $a \; 8 \sqrt{bc}$, quod in se multiplicatum quadratè producit binomium $aa + bc \; 8 \; 2a\sqrt{bc}$, & hoc rursus per $a \; 8 \sqrt{bc}$, producit binomium $a^3 + 3abc \; 8 \; \overline{3aa + bc}\sqrt{bc}$; utpote cubum ex $a \; 8 \sqrt{bc}$.

Ubi notandum, quòd, licèt in binomio plures reperiantur partes, tamen non nisi pro duabus sint habendæ, quarum una, utpote, $a^3 + 3abc$, designet numerum rationalem, at verò $\overline{3aa + bc}\sqrt{bc}$, numerum irrationalem seu surdum. Deinde constat, partem rationalem $a^3 + 3abc$, compositam esse ex cubo partis rationalis radicis, & ex triplo solido, quod fit ex eadem hac parte in quadratum reliquæ partis radicis: ac denique, si dictarum partium $a^3 + 3abc$ & $\overline{3aa + bc}\sqrt{bc}$ quadrata $a^6 + 6a^4bc + 9aabbcc$ & $b^3c^3 + 6aabbcc + 9a^4bc$ à se invicem auferantur, relinqui $a^6 =\!= {}^3a^4bc + 3aabbcc =\!= b^3c^3$, cubum ex $aa =\!= bc$, differentiâ quadratorum partium radicis.

Signum $=\!=$ significat differentiam inter duas pluresve quantitates, cùm non exprimitur aut cognoscitur, penes quam sit excessus.

In numeris. Esto $a \propto 2$, $\sqrt{bc} \propto \sqrt{6}$. Hinc multiplicato binomio $2 + \sqrt{6}$ in se cubicè, fit binomium $44 + \sqrt{1944}$: in quo partium quadrata, 1936 & 1944, à se invicem subducta, relinquunt 8, cubum differentiæ quadratorum partium.

Deinde ostendendum, binomium multiplicatum per differentiam quadratorum partium producere semper aliud binomium, in quo differentia quadratorum partium sit numerus cubicus.

Quod patet si multiplicetur binomium $a \; 8 \sqrt{bc}$, per $aa =\!= bc$, differentiam quadratorum partium. Exsurgit enim binomium $a^3 =\!= abc \; 8 \sqrt{a^4bc =\!= 2aabbcc + b^3c^3}$: cujus partium quadrata, $a^6 =\!= 2a^4bc + aabbcc$ & $a^4bc =\!= 2aabbcc + b^3c^3$ à se invicem subducta, relinquunt $a^6 =\!= {}^3a^4bc + 3aabbcc =\!= b^3c^3$, numerum cubicum, cujus radix cubica $aa =\!= bc$, est, ut supra, differentia quadratorum partium prioris binomii $a \; 8 \sqrt{bc}$.

In numeris. Sit $a \propto 22$, & $\sqrt{bc} \propto \sqrt{486}$. Unde multiplicato binomio $22 + \sqrt{486}$ per differentiam quadratorum partium 2, prodibit binomium $44 + \sqrt{1944}$. in quo differentia quadratorum partium est 8, utpote cubus differentiæ 2, quæ est inter 484 & 486, partium quadrata prioris binomii $22 + \sqrt{486}$.

Quibus expositis, ad extrahendam $\sqrt{(3)}$ ex binomio $20 + \sqrt{392}$, in quo pars rationalis 20 est major reliquâ parte $\sqrt{392}$:

cogi-

cogitetur $a^3 + 3abc$ esse 20, & $\overline{3aa + bc}\sqrt{bc}$ esse $\sqrt{392}$, ita ut $\begin{matrix} + a^3 & + 3aa \\ + 3abc + & bc \end{matrix}\sqrt{bc}$ designet datum binomium $20 + \sqrt{392}$, & radix ejus cubica $a + \sqrt{bc}$ ipsam radicem quærendam, cujus major pars sit a, & minor $\sqrt{bc}$. Tum operare secundùm regulam.

$20 + \sqrt{392}$

$\overline{20}$

subt. $\left\{ \begin{matrix} 400 \\ 392 \end{matrix} \right\}$ quadrata partium à se invicem.

reliq. $\overline{8}$,

2 radix cubica reliqui, sive $aa - bc$.

1	2
2	1
8	8 2
1	9
	2

Adde ad 20, partem rationalem binomii

9 — — — 19, præter propter valorem partis irrationalis.

& fit 39, valor dati binomii in rationalibus, circiter. utpote à vero unitate non discedens, quippe qui inter 39 & 40 consistit. Unde radix cubica fit major quàm 3 & minor quàm $3\frac{1}{2}$, ita ut $3\frac{1}{2}$ radicem veram non supra $\frac{1}{2}$ excedat. Sumatur autem quasi esset vera, & æqualis $a + \sqrt{bc}$.

Et divid. 2, hoc est, $aa - bc$,
per $3\frac{1}{2}$, hoc est, $a + \sqrt{bc}$:
& fit $\frac{4}{7}$, sive $a - \sqrt{bc}$.
add. $3\frac{1}{2}$, hoc est, $a + \sqrt{bc}$,

& fit summa $4\frac{1}{14}$, sive $2a$, duplum partis rationalis, radicis. supponendo $3\frac{1}{2}$ esse veram radicem. Sed cum $3\frac{1}{2}$ sit major radice verâ; ita tamen, ut differentia non sit supra $\frac{1}{2}$, fit, ut $4\frac{1}{14}$ quoque duplo partis rationalis major existat, & differentia minor quàm 1. sicut inferiùs ostensuri sumus. Unde cum eadem pars sit numerus rationalis integer, sequitur duplum ejus fore 4, utpote maximum integrum numerum in $4\frac{1}{14}$ contentum, adeoque ipsam dictam partem fore 2. Quâ inventâ, facile est reliquam invenire. Etenim, si à 4, quadrato ejusdem partis, subducatur 2, radix cubica differentiæ quadratorum partium dati binomii, relinquetur 2, quadratum alterius partis: Ita ut radix inventa sit $2 + \sqrt{2}$.

Ubi

Ubi notandum, operationem hanc sufficere ad investigandam radicem, cùm constat illam binomium esse; sed quando id incertum fuerit, explorari poterit per multiplicationem inventi binomii in se cubicè, aut etiam breviùs per sequentem operationem.

Divid. 40, hoc est, $2a^3+6abc$
per $\underline{4}$, hoc est, $2a$:
& fit quotiens 10, sive $aa+3bc$.
Cui addatur ter 2, seu $\underline{6}$, hoc est, $3aa-3bc$.
& provenit 16, sive $4aa$: quod est quadratum superioris 4, nimirum duplum partis rationalis inventæ 2. Unde radix binomia erit, & duplum ejusdem partis 4: adeoque $2+\sqrt{2}$ radix quæsita.

Vel etiam hoc modo:
Ad 8, hoc est, a^3
add. $\underline{12}$, hoc est, $3abc$:
& provenit 20, sive a^3+3abc. quod cum sit pars rationalis dati binomii: sequitur $2+\sqrt{2}$ esse radicem quæsitam.

Omnino ut supra fuit expositum.

Similiter, ad extrahendam $\sqrt{}$ ③ ex $44+\sqrt{1944}$, in quo pars rationalis 44 est minor reliquâ parte $\sqrt{1944}$; cogitetur (ut supra) $\begin{matrix}a^3\\+3abc\end{matrix}$ esse 44, & $\begin{matrix}3aa\\+bc\end{matrix}\sqrt{bc}$ esse $\sqrt{1944}$, ita ut $\begin{matrix}a^3+3aa\\+3abc+bc\end{matrix}\sqrt{bc}$ designet datum binomium $44+\sqrt{1944}$, & illius radix cubica $a+\sqrt{bc}$ hujus radicem quærendam, cujus a sit minor pars, & $\sqrt{bc}$ major. Tum operare secundùm regulam.

$44+\sqrt{\underline{1944}}$
subt. $\left\{\begin{matrix}1944\\1936\end{matrix}\right\}$ quadrata partium à se invicem.
reliq. $\overline{8}$
$\overline{2}$, radix cubica reliqui, sive $bc-aa$.

3	
19	44
4	4
	8

Adde ad 44 partem rationalem binomii
— — $\underline{44}$, præter propter valorem partis irrationalis:
& fit 88, valor binomii dati in rationalibus, circiter. quippe qui à vero unitate non absit, cum inter 88 & 89 consistat. Radix autem ejus cubica est major quàm 4, & minor quàm $4\frac{1}{2}$; ita ut

ita ut $4\frac{1}{2}$ sit major radice verâ, excessu minore quàm $\frac{1}{2}$. Assumatur autem ut vera, & æqualis $a + \sqrt{bc}$.

Et divid. 2, hoc est, $bc - aa$,
per $4\frac{1}{2}$, hoc est, $\sqrt{bc} + a$:
& fit quotiens $\frac{4}{9}$, sive $\sqrt{bc} - a$.
subt. { ex $4\frac{1}{2}$, hoc est, $\sqrt{bc} + a$,
$\frac{4}{9}$, hoc est, $\sqrt{bc} - a$:

& relinquitur $4\frac{1}{18}$, sive $2a$, duplum partis rationalis radicis. videlicet supponendo $4\frac{1}{2}$ esse veram radicem. Sed cum major sit, fit ut etiam $4\frac{1}{18}$ excedat idem duplum, differentiâ minore quàm 1; sicut mox ostendemus. Unde cum eadem pars sit numerus integer rationalis: sequitur duplum ejusdem partis fore 4, utpote maximum integrum numerum in $4 + \frac{1}{18}$ comprehensum: adeoque ipsam partem esse 2. Quâ inventâ, facile est reliquam partem invenire. Etenim si ad 4, quadratum dictæ partis, addatur 2, radix cubica differentiæ quadratorum partium binomii dati, fit summa 6, quadratum alterius partis: itá ut radix inventa sit $2 + \sqrt{6}$.

Ubi (ut supra) notandum, non opùs esse ut ulteriùs operemur, postquam constat radicem extrahi posse, hoc est, ipsam binomium esse: quandoquidem eo casu radix inventa sit quæsita. Illud autem si ignoretur, dignosci poterit multiplicando radicem inventam in se cubicè, aut etiam breviùs, hoc modò:

Divid. 88, hoc est, $2a^3 + 6abc$,
per 4, hoc est, $2a$:
& fit quotiens 22, sive $aa + 3bc$.
Subtr. ter 2, sive 6, hoc est, $3bc - 3aa$:

& relinquitur 16, sive $4aa$, quod est quadratum præcedentis 4. nimirum duplæ partis rationalis inventæ 2. Id quod monstrat, duplum ejusdem partis esse 4, adeoque radicem quæsitam binomium esse, videlicet $2 + \sqrt{6}$. quemadmodum modò inventa fuit.

Vel etiam sic:

Ad 8, hoc est, a^3
add. 36, hoc est, $3abc$:

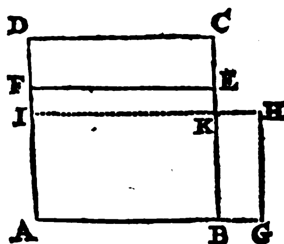
& provenit 44, sive $a^3 + 3abc$. quod cum sit pars rationalis dati binomii: sequitur $2 + \sqrt{6}$ esse radicem quæsitam.

Ut

Ut supra expositum fuit.

Quibus explicatis, demonstrandum nunc est, quod superiùs polliciti sumus.

In quem finem, pro radice cubica rationali inventa, veram, ut dictum est, superante, scribatur m; at pro vera, quam in allatis exemplis per $a + \sqrt{bc}$ designavimus, brevitatis causâ scribatur v; similiterque pro $aa - bc$, differentiâ quadratorum partium radicis, scribatur d. Hinc, cùm d divisa per m dat $\frac{d}{m}$, quæ in primo exemplo ipsi m est addita, & in secundo exemplo ab m ablata; ostendendum est, differentiam, quâ $m + \frac{d}{m}$ excedit $v + \frac{d}{v}$, quod duplum partis rationalis, antea $2a$ nominatum, & quâ $m - \frac{d}{m}$ excedit $v - \frac{d}{v}$, quod similiter duplum partis rationalis, superiùs $2a$ nominatum, designat, unitate non esse majorem. Quod facile erit, si tantùm ostendatur excessum ipsius $\frac{d}{v}$ supra $\frac{d}{m}$ minorem esse excessu ipsius m supra v. hoc modo:



Esto A B ∞ v, supra quam describatur quadratum A B C D, quod majus erit quàm d, quippe quæ tantùm differentiam designat, quæ est inter quadrata partium ipsius v, cujus quadratum earundem partium quadratis unà cum duplo sub partibus rectangulo est æquale. Hinc si supponatur rectangulum A B E F ∞ d, erit A F ∞ $\frac{d}{v}$. Tum assumptâ A G ∞ m, ita ut B G non superet $\frac{1}{2}$, factoque rectangulo A G H I ∞ d, hoc est, æquali rectangulo A B E F: erit A I ∞ $\frac{d}{m}$; nec non rectangulum I K E F æquale rectangulo K B G H. Atque adeò cum I K sit major quàm K B, erit I F minor quam B G, hoc est, excessus ipsius $\frac{d}{v}$ supra $\frac{d}{m}$ minor erit excessu ipsius m supra v. Quod erat demonstrandum.

Eadem est ratio cùm dati binomii partes per signum — disjungun-

guntur. Si enim, exempli causâ, proponatur binomium $20 - \sqrt{392}$. oportet tantùm signum — transmutare in signum +, atque ut supra ex $20 + \sqrt{392}$ radicem cubicam extrahere, quæ est $2 + \sqrt{2}$; & fit $2 - \sqrt{2}$ radix cubica ex $20 - \sqrt{392}$. Quemadmodum liquet ex iis, quæ superiùs sunt ostensa. Et sic de aliis.

Cæterùm, quæ hìc de radice cubica ostensa sunt, applicari quoque possunt ad ea, quæ ad reliquarum radicum extractionem sunt allata: cum eadem ubique sit demonstrandi ratio, idemque processus; ita ut plura hac de re afferre non sit opùs. Tantùm sciendum, modum, quo hæc regula inventa fuit, ad plures alias regulas, in Arithmetica hactenus incognitas, inveniendas inservire posse. Qui quidem in eo consistit, ut, dum in aliqua quæstione ignoratur ratio inveniendi verum numerum, quem integrum esse certò constiterit, quæratur numerus fractus unitate verum non superans: eritque maximus integer numerus, in eo contentus, is qui quæritur.

FINIS.



Celeberrimo, Amicissimoq́ Viro,

D. FRANCISCO à SCHOOTEN
IOHANNES HVDDE

S. P. D.

Clarissime Vir,

VT copiam Tibi faciam rogas, prolixam illam de Reductione Æquationum epistolam, sive libellum mavis, ut & alteram illam, quæ meam de Maximis & Minimis Methodum continet, Commentariis tuis in D. Cartesii Geometriam annectendi edendique. Certè, cum id non modò postules, sed etiam seriò, ut faciam, mihi author sis, in illam opinionem, sive imaginationem potius, devenio, aliquid illis, tuo saltem judicio, contineri, quod laboribus in lucem edendi respondere queat; quippe cum continuo dies noctesque cogitationes tuæ circa illa, quæ aliquo commodo humanum genus beare possint, versentur occupenturque, nec unquam, vel levissimo indicio, deprehendere potuerim, Te, secus ac Batavum deceat, aliud clausum in pectore premere, aliud verò linguâ promere, in animum inducere nequaquam potui, Te, eo tantùm temporis articulo, quo has posceres, mihique ut facerem author esses, à consuetâ tibi & regiâ viâ deflexisse. Præterea amicitiæ nostræ, nec hodie nec heri natæ, vinculum, tuusque candor singularis, mihi satis superque, Te nequaquam hoc ab animo tuo impetraturum fuisse, testatum faciunt. Quare, si hac in re Tibi obluctarer, commissi erroris fortasse insimularer. Non pauca tamen obstant, quo minus assensum planè præbeam. Non enim Te latet, me multâ temporis egestate, quod tunc aliis studiis destinâram, hæc non ita ad normam exigere potuisse, quam illa quidem,

quæ publico usui viritim legenda terendaque permittuntur, quasi suo quodam jure postulant: cum non tantùm benevolorum amicorum, sed etiam vitilitigatorum, acerborumque inimicorum, quorum si non in præsens, in posterum fortasse copia suppetere possit, judicium subire debeant. At fortè inquies, quòd non sub libelli, sed epistolarum, ad Te datarum, nomine, in lucem prodituræ sint, idque iis temporibus datarum, quibus aliis studiis animum applicassem, ideoque nullo merito accuratam illam diligentiam, summamque curam, omniumque probationes desiderari posse. Sed quid causæ est, quin paulò diutius expectem, illaque, quibusdam præterea additis, sub libelli nomine, accuratius elaborata publici juris faciam? maximè cum libellum quendam, (quibusdam studiis ex voto ad finem perductis,) de Natura, Reductione, Determinatione, Resolutione, atque Inventione Æquationum *prælo subjicere proposuerim, (nisi sontica quædam causa denuo cursum meum remoretur,) cujus maximam jam partem, quod materiam spectat, si pauca quædam excipias, in numerato habeo, adeo ut non nisi in ordinem redigendi labor & quasi forma desideretur. Cum enim in animo habeam, illum ita accurare, ut à quolibet, qui modo ab ovo, quod dicitur, rem ipsam ordiri, & per numeros gradusque procedere, nec uno impetu montis verticem superare cupit, intelligi & in usum transferri possit; certè multo magis, procul omni dubio, utilitate suâ, quam hæ epistolæ, quæ non nisi partem continent, eamque ita, uti dictum est, scriptam, se publico commendaret. Sed jam mihi responsionem tuam audire videor: Quid obstat, Huddeni, quo minus utriusque nos participes facias?*

Nam bene conveniunt unaque in sede morantur.

Sed quid utilitatis imperfectior ille, & quasi abortivus fœtus, tum allaturus est? Nullum equidem, fortasse, inquies, ubi consummatior se conspiciendum præbuerit, sed jam quidem quandiu ille intra penetralia Vestæ latet, cum experientiâ in omnibus pæne scientiis compertum sit, illos, qui earum amore tenentur, vel qui-

bus

bus res curæ & cordi est, eamque quam penitissimè, & quam maxime fieri potest, circumspectè rimari & penetrare cupiunt, raro quid amplius, quam rudi Minervâ delineatam, aut manuductionem ad eam requirant, vel nudam modò, omnibus demonstrationibus, quasi supervacaneis ornamentis, neglectis, veritatem expetant: Ita namque partim magis ad intimam rerum medullam ingenio suo penetrare illis datur, cum ex parte iis quoque investigandi labor incumbat; partim majore voluptate perfunduntur, atque adeo multo aptiores ad aliarum rerum veritatem in apricum producendam evadunt. Cum etiam id experientia doceat, eos, nec ferè alterius generis homines, aliquid, quod communem captum superet, & cornicum quasi oculos configat, elaboratum dare posse. Vnde illud confici videtur, scientiarum amatoribus satis superque dictum, nec mihi fas licitumque esse, illud subducere aut invidere iis, quibus, si non aliis, aliquo modo satisfacere queat. quibus addere posses: alios, licèt multis in locis, ejus quod dicitur, veritatem demonstrationibus fulcitam, & ad unguem elaboratam, (quod variis in locis, levi tantùm brachio attigi,) non reperturi sint, nihilominus multas regulas ad usum, cujus respectu non paucæ ad amussim factæ sunt, transferre posse. Atque ita jam causam meam contra me ipsum egisse videor, ut vix mutire vel hiscere adversus ea, quæ dixi, mihi licitum videri possit, si in Lectores, quales esse decet, incidere mihi contingat: sed cum maxima hominum pars eò propendeat, ut ante de re aliqua, quam illam clarè & distinctè perceperit, judicium ferat, remque potius in deteriorem, quam meliorem partem interpretetur, atque eorum judicium sit periculi plenum, si circa res versetur, quæ non exactè scriptæ, dilucidè explicatæ, demonstrationibus subnixæ sunt; eoque magis si illæ paucis verbis indicatæ fuerint, ipsaque res ita sit comparata, ut non nisi difficulter paucis verbis ita se comprehendi sinat, quin alicubi aliquid, quod dubiam, variamque interpretationem suscipere possit, irrepat, seque immisceat: Cumque multo maxima pars

 eorum

eorum quæ epistolis meis continentur talia sint, demonstrationibusque destituta, verbisque paucis, uti jam dictum, indicata, cum Tibi hoc plusquam abundè sufficeret; Satis mihi vel hoc solum, causa videtur, epistolarum editioni, nulla ex parte suffragari. Pone verò me majori felicitate quam cuiquam sperare fas sit, hac in parte uti, measque literas non nisi in genuinorum veritatis amatorum, qui nihil, exceptâ veritate, investigant, manus incidere, neque meos Lectores tales esse, qui, ubi ad dubium verbum, quasi scopulum, offenderint, veritati consonâ significatione insuper habitâ, eam magis quæ falsitatis aliquid secum trahit, veluti obtorto collo arripiunt, tanquam in sinu gaudentes, & castellanos nescio quos triumphos ducentes, quasi verò jam repererint aliquid, quo suspectam autoris inventionem reddant, ejusque apud alios existimationem elevent, ut ipsi eò majores videantur, atque ita vel alterius nominis, si fieri possit, ruinâ gradum sibi ad gloriolam, licèt inanem, faciant: Pone inquam

Omnia jam fieri, fieri quæ posse negamus,

Tamen adhuc plura obstant: nam, cum non tantùm typographicæ emendationis molestiam, satis sæpe tædiosam, Te devoraturum, sed & illa, quæ vernaculâ linguâ à me scripta sunt, Latio Te donaturum, liberaliter, qui tuus est mos, obtuleris, videor mihi satis graviter in publica commoda peccaturus, nisi repulsam feras. Nonne enim tempus illud, quod operæ illi impendere necesse habebis, nec id modicum, tum propter rite in Latinum sermonem convertendi, tum propter rectè, ubi prælo subjecta fuerint, corrigendi molestiam, melioribus curis impendere, bonasque horas melius collocare posses? nisi enim me experientia docuisset, quid non possis, ubi penitus cogitationes tuas in rem aliquam defixeris, quamque multis in rebus, quarum ego sum conscius, optatum Tibi exitum consequutus fueris, faciliùs assensum præberem. Ne igitur impræsentiarum ægrè feras, quòd is audire nolim, qui, cum tempori tuo non contemnendam partem suffuratus fuerit, meliora, quæ alioquin invenires, publico invidisse

vidisse videri possit. Atque adeo omnes hæ rationes eo me impellerent, ut, nisi à mea consuetudine abhorreret, amicis aliquid denegare, jam sine omni dubio repulsam ferres. Quid ergo in re dubia consilii? Si edendi copiam faciam, haud leviter peccabo; sin id recusem, optimo meorum amicorum præter consuetudinem refragabor. sed in omnes partes mentem versando, tandem videor mihi Gordio huic nodo gladium reperisse, & rationem, qua anceps malum effugere queam. Nimirum: nec assentior, nec repugno editioni epistolarum, sed totum hoc, quicquid est, Tibi planè trado & committo, ut id, quod optimum Tibi videbitur, probes & sequaris, ubi rationum mearum momenta non præoccupato, sed libero ac provido animo perpenderis, libraverisque. Vale, Vir Amicissime, & me, quod facis, amare perge.

Datum Amstelædami ipsis
Calendis Aprilis 1658.

JOHANNIS HUDDENII

EPISTOLA PRIMA

DE

REDVCTIONE ÆQVATIONVM.

Cla-

Clarissimo, Præstantissimoq́; Viro

D. FRANCISCO SCHOTENIO

JOHANNES HUDDE

S. P. D.

Doleo, Vir Amicissime, quòd dubia valetudine & negotiis impeditus amicæ petitioni tuæ, de iis latiùs deducendis, quæ de Reductione Æquationum ad amicum quempiam ante aliquot annos breviter perscripseram, hactenus satisfacere nequiverim. Impræsentiarum ergo aliquid temporis (quamvis parum eo abundem) decidam, ut promissa si non in totum, ex parte saltem exsolvam, ne vel nimis longa te offendat mora, vel nomen malum apud te audiam; quamvis non videaris immeritò mihi crimen illud impingere posse, sed tamen velim memor sis Belgici adagii: Die noch wat betaalt / wil noch betalen / en is van de quaatste slagh niet.

Quod igitur ad *Reductionem Æquationum* attinet, eam duobus modis considero, vel quatenus æquatio *absolutè* considerari potest, vel *relativè* in quantum scilicet illam ad aliquod Problema, è quo originem duxit, referre licet.

Primò verò eam *absolutè* considerabo, omissâ vulgari Reductione, quæ per additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem & extractionem procedit: ponamque tantùm Reductionum Regulas quasdam, quarum plurimas non ita pridem inveni, easque exemplis, ut mentem meam meliùs percipias, illustrabo, relictis earum demonstrationibus, tum quòd maxima earum pars sit perquàm inventu facilis, tum, quod rei caput

caput est, quòd hominis foret otio suo abutentis, eas tibi (cui, quicquid in Mathesi inaccessum aliis videtur, perspectum est,) transmittere.

Et ut distinctiùs meos conceptus exprimam, primò restringam meas Regulas ad eas æquationes, in quibus una tantùm incognita quantitas reperitur, quam semper nominabo x; & in quibus Primus Terminus (Primum Terminum eum dico, in quo x plurimarum est dimensionum; Secundum, ubi x est unâ dimensione minor, & sic porrò) non est multiplicatus aut divisus per aliquam cognitam quantitatem, atque semper affectus signo $+$: Quia non tantùm hoc pacto omnes æquationes considerare consuevimus, sed etiam quia nullo, aut parvo admodum labore, ut cuilibet notum est, ad talem formam, si eam non habeant, redigi possunt.

SEQUENTES NOVEM REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNEM ÆQUATIONEM, SIVE IN EA IRRATIONALES QUANTITATES ET FRACTIONES, SIVE NULLÆ INVENIANTUR.

I. REGULA.

Si in æquatione literali una vel plures literæ seu quantitates cognitæ supponantur ∞ o, atque eo *ultimus Terminus non evanescat*, neque æquatio, quæ hinc resultat, reducibilis sit, certum est neque Propositam æquationem reducibilem fore; at verò si *ultimus Terminus evanescat*, atque etiam inde Resultans æquatio non existat reducibilis, æquatio Proposita ad pauciores dimensiones quàm ista Resultans reduci non poterit.

Exem-

Exemplum, ubi ultimus Terminus non evanescit.

Sic in æquatione $x^3 \begin{array}{l} -3a \\ -b \end{array} xx \begin{array}{l} +2bb \\ +3ab \\ +4aa \end{array} x \begin{array}{l} -3a^3 \\ -b^3 \\ -5aab \\ -4bba \end{array} \propto 0$, si supponatur $a \propto 0$, resultabit, inde $x^3 - bxx + 2bbx - b^3 \propto 0$. Quia autem hæc æquatio reducibilis non est, certum est neque Propositam reducibilem fore.

Exemplum, ubi ultimus Terminus evanescit.

Si in æquatione $x^6 \begin{array}{l} -6abx^4 \\ -3aa \end{array} \begin{array}{l} +6c^3 \\ +ccd \\ -bba \end{array} x^3 + 6a^3bxx \begin{array}{l} -12aac^3 \\ -6abccd \\ +6aab^3 \end{array} x \begin{array}{l} +12c^5d \\ -12abbc^3 \end{array} \propto 0$ supponantur d & $a \propto 0$, resultat inde $x^3 + 6c^3 \propto 0$. Quia verò hæc æquatio trium dimensionum reduci nequit, argumentum est neque Propositam ad pauciores dimensiones quàm ad tres, reducibilem fore.

Sic etiam supponendo d & $b \propto 0$, vel tantùm $c \propto 0$, orientur hæ duæ æquationes

$$x^5 - 3aax^3 + 6c^3xx - 12aac^3 \propto 0.$$

$$x^5 \begin{array}{l} -6abx^3 \\ -3aa \end{array} - bbaxx + 6a^3bx + 6aab^3 \propto 0.$$

Quæ si reduci non poterunt, denotabunt Propositam æquationem, ad pauciores dimensiones quàm ad 5, reduci non posse.

Dico, *illam non ad pauciores dimensiones reducibilem fore*, quippe aliquando contingere potest, ut Proposita æquatio ad eundem dimensionum numerum sit reducibilis. quemadmodum contingit in hac $x^4 - 4ax^3 + 4aaxx + 2b^3x - 4ab^3 \propto 0$, supponendo $a \propto 0$: exsurgit enim $x^3 + 2b^3 \propto 0$, quæ non potest reduci, & tamen æquatio Proposita est reducibilis per $x - 2a \propto 0$.

II. REGULA.

Si in æquatione literali pro una, vel pluribus, vel omnibus literis seu quantitatibus cognitis, supponantur

 tur

tur numeri, vel aliæ quantitates ad libitum, atque eo *ultimus Terminus non evanescat*, neque æquatio, sive numeralis, sive literalis, quæ hinc resultat, reducibilis sit, certum est, neque Propositam æquationem reducibilem fore; si verò *ultimus Terminus evanescat*, atque etiam inde Resultans æquatio non existat reducibilis, æquatio Proposita ad pauciores dimensiones, quàm ista Resultans, reduci non poterit.

Exempla, ubi ultimus Terminus non evanescit.

1. Si in hac æquatione
$$\begin{array}{llll} x^3 - {}^{2}axx & + {}^{3}bbx & - {}^{3}a^3 & \infty\ 0 \\ - b & + {}^{3}ab & - {}^{3}b^3 & \\ & + {}^{4}aa & - {}^{6}aab & \\ & & + {}^{9}abb & \end{array}$$
supponatur $a \infty 1$, & $b \infty 1$, resultabit inde æquatio numeralis $x^3 - {}^{3}xx + {}^{10}x - {}^{3} \infty 0$. Quæ, quoniam non est reducibilis, indicabit, neque Propositam æquationem reducibilem esse.

2. Sic etiam, si habeamus hanc
$$\begin{array}{lll} x^5 *** + {}^{4}aabb\,x & - {}^{10}a^4b & \infty 0, \\ - \dfrac{{}^{3}a^3bb}{a-b} & - \frac{2}{3}b^3aa & \end{array}$$
atque supponamus ${}^{4}aabb \infty \dfrac{{}^{3}a^3bb}{a-b}$, seu $b \infty \frac{1}{4}a$, exsurget inde $x^5 **** - 2\frac{49}{96}a^5 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio reduci non potest, certum est, neque Propositam reducibilem fore.

3. Non secus, si in æquatione
$$\begin{array}{lll} x^5 ** - {}^{8}a^3xx & + {}^{4}ca^3x - {}^{2}a^3cd & \infty 0 \\ - {}^{2}aac & + accd & \end{array}$$
supponatur $- {}^{8}a^3 - {}^{2}aac \infty 0$, seu $c \infty - {}^{4}a$; ac ${}^{4}ca^3 + accd \infty 0$, seu $d \infty - \dfrac{{}^{4}aa}{c}$, fiet inde $x^5 **** + {}^{8}a^5 \infty 0$. Quoniam verò hæc æquatio non reducibilis existit, *certum est, &c.*

4. Eodem modo se res habet in æquationibus, ubi quantitates Irrationales reperiuntur: nam, exempli gratiâ, si detur hæc æquatio $x^5 ** + xx\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}, * + a^3b\sqrt{C.\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{27}abb} \infty 0$, supponendo $\frac{1}{4}aa + bb \infty 0$, seu $bb \infty - \frac{1}{4}aa$, resultabit $x^5 **** + a^3b\sqrt{C.\frac{25}{216}a^3} \infty 0$. quæ, quoniam reduci non potest, *certum est, &c.*

Exem-

Exempla, ubi æquatio Resultans pauciores quàm Proposita dimensiones habet.

1. Si habeatur $x^4 + {}^4c\,x^3 + {}^4cc\,xx - {}^4bbc\,x + b^4 \propto 0$, ac
$$\begin{matrix} & & - dd & & - bbdd \\ & & - {}^2bb & & \end{matrix}$$

supponatur $c \propto 1$, $b \propto 1$, $d \propto 1$, resultabit inde æquatio numerica $x^3 + 4xx + 1x - 4 \propto 0$. Quia verò hæc æquatio trium dimensionum non existit reducibilis, etiam æquatio Proposita ad pauciores dimensiones quàm ad tres reduci non poterit.

2. Si proponatur $x^3 - \frac{1}{4}ab\sqrt{xx + aa - bb} + {}^3axx + \frac{1}{4}abx \begin{matrix} - aab \\ + bb\sqrt{3aa + bb} \end{matrix} \propto 0$,

& supponatur $aa - bb \propto 0$, seu $a \propto b$, resultabit $x^3 + {}^3axx * + a^3 \propto 0$. quæ etiam non poterit reduci, ideoque indicabit Propositam æquationem ad pauciores quàm ad tres dimensiones reduci non posse.

Dico *non ad pauciores dimensiones illam reducibilem fore*, quippe aliquando contingere potest, ut Proposita æquatio ad eundem dimensionum numerum sit reducibilis. Quod etiam in 1ma Regula locum habuit, ibique explicatum est. Sed si roges, quot ego dimensiones 2do huic exemplo adscribam? respondeo, me tot dimensiones cuilibet æquationi adscribere, quot ejus incognita quantitas ad summum dimensiones habet, dempto omni signo radicali, quod illam incognitam quantitatem includit: ideoque illud 2^dum^ exemplum habiturum 6 dimensiones, postquam signum radicale ante quantitatem incognitam, nempe $\sqrt{xx + aa - bb}$, ablatum fuerit.

NOTÆ *duæ in hanc* I *&* II *Regulam.*

I. Notandum est, utramque hanc Regulam non tantùm magnum habere usum in inquirendo, utrum æquatio aliqua literalis reducibilis sit, verùm etiam eodem modo inquiri posse:

1mo. Num æquatio illa vel etiam quantitas quævis composita, per aliam æquationem vel quantitatem, quæ rationalis sit, dividi possit.

2do. Num admittat radicem quadratam, cubicam, vel aliam.

 3^tio^.

3tio. Num duæ vel plures æquationes, vel quantitates dictæ, admittant communem aliquem divisorem.

Nam, *si non admittant divisorem rationalem, vel radicem aliquam, vel communem divisorem*, illud plerùmque, monstratam jam ineundo viam, vel uno intuitu, vel saltem admodum facilè, innotescet; præsertim in æquationibus vel quantitatibus valde compositis, atque ex multis diversis literis constantibus, quod sæpenumero ineundo aliam viam valde difficile inventu esset, magnumque & laborem & industriam requireret. Hæc enim Methodus tantùm exigit, ut æquationes, vel quantitates dictæ, determinentur (supponendo unam vel plures literas nihilo, vel unitati, vel numero, vel quantitati, ad libitum sumendis, æquales,) ad alias, quas aliunde scimus non admittere reductionem, vel rationalem divisorem, vel radicem aliquam, vel communem divisorem. Quod omne, exemplis explicare, supervacuum erit, quemadmodum etiam omnem ejus methodi usum enumerare, quem satis insignem esse jam patuit; ac vel eo nomine, quòd ipsa nec fractiones, nec irrationales quantitates moretur, non raro magnum adfert compendium.

Denique, *si æquationes, vel quantitates compositæ, admittant reductionem, vel divisorem rationalem, vel aliquam radicem, vel communem divisorem*, possunt etiam illa omnia in multis casibus hâc Methodo satis compendiosè inveniri. sed hæc non sunt hujus loci, posthac fortassis aliquid de iis indicabo.

II. Quid velim per *æquationem ex Proposita Resultantem*, necessarium videtur, ut paulò clariùs exponam: maximè quia id etiam in sequentibus Regulis, ubi litera aliqua ∞ o supponitur, usum suum habebit. Quando enim una pluresve literæ vel quantitates ∞ o sumuntur, liquet, omnes quantitates, ex multiplicatione harum per alias productas, etiam æquales nihilo fieri; ideoque in Proposita æquatione necessariò evanescere. quemadmodum in allatis exemplis quoque est videre. Adeò ut in æquationibus, quæ literales fractiones non includunt, pateat, quid per æquationem Resultantem intelligam. Sed si literales fractiones dantur, tunc quidem facilè, nisi quis probè animum advertat, error committi posset. Etenim fractionis numeratore ∞ o existente, tollenda est ista fractio ex Proposita æquatione; at denominatore ∞ o existente, oportet terminos omnes æquationis primùm per ejusmodi

deno-

denominatores multiplicare. Quo peracto, erit æquatio hæc, in quâ scilicet nulla ampliùs reperitur fractio literalis, cujus denominator est ∞ o, & in qua conditiones omnes assumptæ, sive suppositiones, sunt adimpletæ, illa, quam ex Proposita resultare dico.

Exempla.

ÆQUATIONES PROPOSITÆ.		ÆQUATIONES RESULTANTES.
$\begin{array}{l} xx - \frac{cc}{a}x + cc \infty 0. \text{ supponatur } c \infty 0 \\ \quad + b \quad - aa \\ \qquad\quad - \frac{ccb}{a} \\ \qquad\quad + ab \end{array}$	$a \infty 0$	$\begin{array}{l} xx + bx - aa \infty 0 \\ \qquad\quad + ab \\ -ccx - ccb \infty 0, \text{ seu } x + b \infty 0. \end{array}$
$\begin{array}{l} xx - cx + \frac{c^3}{2a} \infty 0. \\ \quad + a \quad - \frac{1}{2}cc \\ \quad + \frac{ac}{a+b} - \frac{cca}{2a+2b} \\ \quad - \frac{cc}{2a} \end{array}$	$c \infty 0$ $a \infty 0$	$xx + ax \infty 0$, seu $x + a \infty 0$ $-\frac{ccx}{2} + \frac{c^3}{2} \infty 0$, seu $x - c \infty 0$.

$$x^5 ** + \frac{2ac - ab}{3a - b}xx + \frac{ccb^3}{3aa - ab}x + \frac{b^3a^3}{a+b} \infty 0,$$

suppositâ $3a - b \infty 0$:

habebitur $\overline{2ac - ab}$ in xx, $+ \frac{ccb^3}{a}x \infty 0$, seu $\begin{array}{l} + 2ac \\ - ab \end{array} x + \frac{ccb^3}{a} \infty 0.$

Unde, suppositione $3a \infty b$ adimpletâ, resultat

$$\begin{array}{l} + 2ac \\ - 3aa \end{array} x + 27aacc \infty 0.$$

Nec tantùm hoc observandum in æquationibus, sed etiam in quantitatibus compositis, quarum communis mensura, vel divisor, vel radix petitur. Ut, exempli gratiâ, si inquirere velis, num $\sqrt{Q}$ extrahi possit ex $cc - 2cd + dd + \frac{b^4}{cc - 2cd + dd} + 2bb$, & in eum finem supposuisses $cc - 2cd + dd \infty 0$: retinendum esset b^4, non autem $2bb$. Si enim $2bb$ retineres, concludendum foret,

 meam

meam sequendo methodum, quòd $\sqrt{Q}$ ex $cc - {}^{2}cd + dd + \frac{b^4}{cc - {}^{2}cd + dd} + {}^{2}bb$ extrahi non posset, quæ tamen est $c - d + \frac{bb}{c-d}$.

SEQUENTES 3, 4, ET 5 REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNES ÆQUATIONES, QUÆ EX MULTIPLICATIONE DUARUM ALIARUM PRODUCI POSSUNT, IN QUARUM UNA ALIQUA LITERA INCLUDITUR, QUÆ IN ALTERA NON CONTINETUR.

III. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam *comprehendit, quæ in altera non continetur; & quæ* litera *non habet éundem dimensionum numerum in diversis Terminis.*

Suppono omnes Propositæ æquationis quantitates, in quibus *eadem litera* reperitur, quæque simul sic dividi possunt, ut litera illa evanescat, ∞ 0. Atque hoc in *singulis literis* instituo, verùm *uno tantùm modo*. Quippe id interdum variis modis fieri potest, quo casu illi præ cæteris eligendi veniunt, qui facillimas æquationes subministrant, vel quibus omnium brevissimè ad quæsitum pervenire licet. Et, si Proposita æquatio ex duabus ejusmodi dictis æquationibus produci poterit, etiam per aliquam harum fictarum æquationum, in quibus dictæ *literæ* sunt sublatæ, divisibilis erit.

1^{mum} genus exemplorum, in quibus Propositæ æquationes nec numerales nec literales fractiones continent.

1. Proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - {}^{6}ax^3 & + {}^{4}bc\,xx & - {}^{16}abc\,x & + {}^{16}bbca \infty 0. \\ & + {}^{4}ac & - {}^{16}aac & + {}^{48}aabc \\ & + {}^{16}aa & - {}^{8}aab & + {}^{32}a^3c \\ & + {}^{4}ab & - {}^{16}a^3 & \end{array}$$

Primò

Primò itaque periculum faciam in litera a, supponendo $-16a^3x + 32a^3c \propto 0$. Quæ sunt omnes quantitates per a^3 divisibiles, quæ in Proposita æquatione inveniuntur, & in quibus factâ divisione litera a evanescit: oritur enim $-16x + 32c \propto 0$, seu, dividendo per -16, $x - 2c \propto 0$.

Jam tento, num Proposita æquatio dividi queat per $x - 2c \propto 0$. Nam si per hanc dividi non possit, *uti &, si hac* $x - 2c \propto 0$ *ab omni fractione non libera fuisset, (quod huic quidem primo exemplorum generi est proprium)* ad aliam literam transiissem. (Quamvis enim aliæ adhuc quantitates in æquatione reperiantur, in quibus a continetur, quæque omnes per aliam quàm a^3 dividi possunt, sic ut litera a ubique evanescat, utpote supponendo

$$\begin{array}{lll} +16aaxx & -16aacx & +48aabc \propto 0, \text{ ut \&} \\ & -8aab & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} -6ax^3 & +4acxx & -16abcx & +16bbca \propto 0; \\ & +4ab & & \end{array}$$

tamen id *uno modo* in hac Regula tentasse sufficit.) Hinc cum Proposita æquatio per $x - 2c \propto 0$ divisibilis non sit, transeo ad aliam literam, puta b. Quoniam autem hîc una tantùm quantitas existit, in qua bb reperitur, nempe $16bbca$, idcirco & hanc transeo, quandoquidem per $16bbca$ nullus valor ipsius x obtineri potest, & considero literam c, ponendo

$$\begin{array}{lll} 4bcxx & -16abcx & +16bbac \propto 0. \\ 4ac & -16aac & +48aabc \\ & & +32a^3c \end{array}$$

Hæc igitur cum absque fractione dividatur per $4bc + 4ac$, ac oriatur

$$\begin{array}{ll} xx - 4ax & +4ab \propto 0: \\ & +8aa \end{array}$$

inquirendum ulteriùs restat, an Proposita æquatio dividi possit per

$$\begin{array}{ll} xx - 4ax & +4ab \propto 0. \\ & +8aa \end{array}$$

inveniturque divisionem fieri posse.

Dixi in Regula, *quòd sufficiat, rem singulis literis uno tantùm modo tentasse, & quòd illi modi præ cæteris eligendi veniant, qui facillimas æquationes subministrant, vel quibus omnium brevissimè ad quæsitum pervenire licet.* Sic enim breviorem viam ingressus essem, si quantitates sumpsissem, in quibus a ubique unam tantùm dimensionem habet. Nam quoniam tunc obtineo $-6ax^3 + 4acxx - 16abcx + 16bbca \propto 0$, primo intuitu apparet, cum 4 per 6 dividi nequeat, quòd hæ quantitates non sine fractione dividi possint.

2. Eo-

2. Eodem modo, ad reducendam hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 - {}^{3}c\,xx & + ab\,x & - {}^{2}aab \infty 0: \\ \quad - {}^{2}a & + {}^{6}ac & + {}^{3}abb \\ \quad + {}^{3}b & - {}^{9}bc & \end{array}$$

quia quantitas $- {}^{2}aab$ in eâ sola reperitur, in qua a duas habet dimensiones; & quantitas $+ {}^{3}abb$ sola, in qua b duas dimensiones habet: idcirco transeo ad literam c, obtineoque

$\begin{array}{l} - {}^{3}cxx + {}^{6}acx \infty 0 \\ \qquad\qquad - {}^{9}bc \end{array}$ seu $\begin{array}{l} - 3cx + {}^{6}ac \infty 0. \\ \qquad\qquad - {}^{9}bc \end{array}$ Id quod divisum per $- 3c$, dat $\begin{array}{l} x - {}^{2}a \infty 0. \\ \quad + 3b \end{array}$ Cujus ope Proposita æquatio dividi potest. Quod, si aliter evenisset, postquam jam periculum in omnibus factum esset literis, indicio fuisset, æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

3. Similiter examinaturus hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 + b & xx + {}^{2}b\sqrt{ab+3bb}\ \text{in}\ x & - {}^{6}bb\sqrt{ab+3bb} \infty 0, \\ \quad - \sqrt{ab+3bb} & & + {}^{18}b^3 \end{array}$$

exordiens à litera a, invenio æquationem $- \sqrt{ab+3bb}$ in xx, $+ {}^{2}b\sqrt{ab+3bb}$ in x, $- {}^{6}bb\sqrt{ab+3bb} \infty 0$. Quam divido per $- \sqrt{ab+3bb}$; & evanescit a, obtineoque hanc $xx - {}^{2}bx + {}^{6}bb \infty 0$; per quam Proposita dividi potest. Quòd si verò hæc divisio non fieri potuisset, progrediendum fuisset ad literam b. Quia autem liquet per b, secundùm singulas etiam suas dimensiones considerata, non posse aliquem ipsius x valorem inveniri: conclusissem, ut ante, æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

4. Nec aliter se res habet in hac æquatione

$$\begin{array}{llllll} x^3 - xx\sqrt{xx+aa} & - {}^{2}cxx + {}^{2}cx\sqrt{xx+aa} & - {}^{6}acx & - a\sqrt{3cc+aa}\ \text{in}\ \sqrt{xx+aa} \infty 0. \\ & + {}^{2}a \quad + ax\sqrt{xx+aa} & - {}^{3}aax & + {}^{3}aa\sqrt{{}^{3}cc+aa} \\ & & + ax\sqrt{3cc+aa} & \end{array}$$

Nam primò video literam a negligi posse, quia sola $- 3aax$ reperitur, nec ulla alia, quæ per aa sic dividi possit, ut ipsa a prorsus evanescat. Transeo itaque ad literam c, supponendo

$- {}^{2}cxx + {}^{2}cx\sqrt{xx+aa} - {}^{6}acx \infty 0$ seu $- {}^{2}cx + {}^{2}c\sqrt{xx+aa} - {}^{6}ac \infty 0$, & fit, dividendo ubique per $- {}^{2}c$, $x\sqrt{xx+aa} + 3a \infty 0$. Cujus

ope

ope Propositam æquationem dividere licet. Quæ si per hanc dividi non potuisset, quia jam res singulis literis tentata esset, conclusissem, ut priùs, Propositam æquationem, &c.

2

2[dum] genus exemplorum, in quibus Proposita æquationes fractiones continent.

Inter hæc & præcedentia exempla, nulla alia differentia respectu operationis existit, quàm quòd Ficta æquatio, per quam divisio Propositæ tentatur, non necessariò, sicut ibi, ab omni fractione libera esse debeat. Quocirca unicum exemplum in medium adduxisse suffecerit.

Proponatur æquatio

$$
\begin{array}{llll}
x^3 + \frac{2bb}{a+c}xx & + \frac{bba}{a+c}x & - \frac{1}{2}a^3 & \infty\ 0. \\
\quad + 2b & + \frac{3}{4}aa & + \frac{1}{2}acc & \\
 & - cc & + 2abb & \\
 & + ab & - 2cbb & \\
 & & + 2aab & \\
 & & - 2bcc &
\end{array}
$$

Transeo literam a, propter quantitatem $-\frac{1}{2}a^3$, quoniam a nusquam ampliùs 3 dimensionum reperitur. Hinc transiens ad b, invenio $2bxx + abx + 2aab - 2ccb \infty 0$, seu, dividens ubique per $2b$, $xx + \frac{1}{2}ax + aa \infty 0$, per quam Proposita dividi po-
$\qquad\qquad\qquad\qquad - cc$
test. Quòd si verò hæc divisio fieri non potuisset, conclusissem; cum tantùm per literam c adhuc explorandum foret, atque hæc ipsa c non magis quàm litera a, sicut ex quantitate $-2cbb$ manifestum est, ad rem quidquam faciat; æquationem Propositam ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci non posse.

Ordo verò, quem in hac inquisitione, an nimirum Proposita æquatio per hujusmodi Fictas divisibilis sit, observo, talis est: Primùm inquiro, an nullæ aliæ quantitates, in quibus hæc ablata litera reperitur, in Proposita æquatione existant. Si enim plures reperiantur, tum ipsas omnes, quæ ita per illam dividi possunt, ut ea ubique evanescat, in unam summam colligo. (ut in hoc exemplo, quantitates omnes in quibus b duas dimensiones habet.) Quo peracto, si quotiens non idem sit cum præcedenti, per quod divisio examinatur, concludo, hanc divisionem fieri non

 posse.

posse. Denique, si nullæ ampliùs in Proposita æquatione supersint quantitates, in quibus dicta litera reperitur, divido ultimò per illam Fictam æquationem omnes reliquas quantitates, in quibus litera illa non reperitur; quæque simul per dictam Fictam divisibiles sunt futuræ, si quidem Proposita æquatio per eam divisibilis existat.

Ut ${}^{2}bxx + abx + {}^{2}aab - {}^{2}bcc \infty 0$ div. per $+{}^{2}b$, fit $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{array}{l} aa \\ -cc \end{array} \infty 0$,

itemq; $\frac{{}^{2}bb}{a+c}xx + \frac{bba}{a+c}x + \begin{array}{l} {}^{2}abb \\ -{}^{2}cbb \end{array} \infty 0$ div. per $+\frac{{}^{2}bb}{a+c}$, fit $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{array}{l} aa \\ -cc \end{array} \infty 0$.

Si igitur hoc quotiens cum præcedenti non convenisset, etiam Proposita æquatio per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{array}{l} aa \\ -cc \end{array} \infty 0$ divisibilis non fuisset. Quoniam autem conveniunt, & nullæ ampliùs quantitates in Proposita æquatione supersunt, in quibus litera b reperitur, inquiro tandem, num omnes reliquæ etiam per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{array}{l} aa \\ -cc \end{array} \infty 0$ dividi possint. Hinc cum reliquæ quantitates, in quibus b non reperitur, sint $x^3 * + \begin{array}{l} \frac{3}{4}aax \\ -ccx \end{array} \begin{array}{l} -\frac{1}{2}a^3 \\ +\frac{1}{2}acc \end{array}$, ipsæque per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{array}{l} aa \\ -cc \end{array}$ dividi queant, ac oriatur $x - \frac{1}{2}a$; idcirco & Proposita æquatio per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{array}{l} aa \\ -cc \end{array} \infty 0$ dividi poterit. Quæ aliàs, ut manifestum est, per illam non divisibilis fuisset, si ultima hæc divisio fieri non potuisset; Quotiens verò est $x - \frac{1}{2}a + \frac{{}^{2}bb}{a+c} + {}^{2}b \infty 0$.

IV. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem Æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam *comprehendit, quæ in altera non continetur; quæq;* litera *in aliquo termino tot dimensiones habet, quot in nullo alio.*

Suppono omnes Propositæ æquationis quantitates, in quibus *eadem litera* reperitur, quæque simul sic dividi pos-

di possunt, ut illa *litera* evanescat, ∞ o. Atque hoc in *singulis literis* facio, verùm *non uno duntaxat modo*, sicut in præcedenti 3^{tia} Regula, sed *modis omnibus*, *quibus id fieri potest*. Et si Proposita Æquatio ex duabus ejusmodi dictis æquationibus produci poterit, erit etiam divisibilis per aliquam harum Fictarum Æquationum, in quibus dictæ *literæ* sunt sublatæ.

Quoniam autem hæc Regula omnino eadem facienda præscribit, quæ præcedens 3^{tia}; hoc tantùm excepto, quòd illìc in singulis diversis literis duntaxat *uno modo*, uti dictum est, hìc *modis omnibus* sit tentandum; sufficit uno exemplo rem declarare.

Proponatur itaque hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + \tfrac{1}{2}aaxx & - \tfrac{1}{4}aabx & - \tfrac{1}{4}aabb \infty \text{o}. \\ \quad - \tfrac{1}{2}b & + 1\tfrac{1}{2}ab & - \tfrac{1}{4}abb & - \tfrac{1}{4}ab^3 \\ & - \tfrac{1}{4}bb & & \end{array}$$

Exordiens à litera *a*, prout unam habet dimensionem, obtineo $-ax^3 + 1\frac{1}{2}abxx - \frac{1}{4}abbx - \frac{1}{4}ab^3 \infty$ o, seu $-x^3 + 1\frac{1}{2}bxx - \frac{1}{4}bbx - \frac{1}{4}b^3 \infty$ o. Cujus ope Proposita æquatio dividi nequit (quod ipsum in hoc exemplo vel hinc apparet, quòd hic ultimus terminus $-\frac{1}{4}b^3$, ultimum terminum Propositæ æquationis non absque literali fractione dividat). Jam, non quidem ad aliam literam transeo, quemadmodum in præcedenti Regula, sed tamdiu considerabo eandem *a*, quamdiu adhuc aliæ quantitates in æquatione extant, in quibus illa plurium aut pauciorum dimensionum reperitur. Atque ideo cum ipsa *a* hìc adhuc 2 dimensionum reperiatur, suppono similiter quantitates omnes, in quibus 2 dimensiones habet, ∞ o: nimirum, $\frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{4}aabx - \frac{1}{4}aabb \infty$ o, seu $xx - \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}bb \infty$ o, quæ Propositam æquationem dividere potest. Quod si secus evenisset, ad aliam literam transiissem, quandoquidem omnes quantitates, in quibus *a* continetur, solummodo dividi possunt per *a*, vel *aa*. Quocirca facto periculo in singulis literis, & omnibus modis, si comperiatur, divisionem æquationis Propositæ per nullam Fictarum succedere, certum est, neque Propositam æquationem, ex duabus ejusmodi aliis, quales supra determinavi, produci posse.

V. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam *comprehendit, quæ in altera non continetur.*

Supponatur aliqua litera ∞ o; investigeturque num æquatio, quæ hinc resultat, habeat cum Proposita communem divisorem. Si non habeat, supponatur iterum alia litera ∞ o, investigeturque num ista Resultans habeat communem divisorem: atque sic porrò, donec aut communis reperiatur divisor, aut nulla ampliùs litera supersit, quæ non supposita sit ∞ o. Et si non inveniatur communis divisor, signum erit, æquationem Propositam, ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam comprehendit, quæ in altera non continetur, produci non posse.

Ex. gratiâ, si proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^5 * & +4abx^3 & +30b^3\,xx & +34ab^3x & +20ab^4 & \infty\ 0, \\ & +bb & -10abb & +7a^4 & +10a^4b & \\ & +\frac{a^4}{bb} & -\frac{2a^4}{b} & & & \end{array}$$

supponaturque litera $a \infty 0$, resultabit inde $x^5 * + bbx^3 + 30\,bbbxx \infty 0$, quæ cum Proposita communem habet divisorem, nempe $xx - 3bx + 10bb \infty 0$. Quod, si aliter evenisset, aliam literam, nimirum b, posuissem ∞ o. & si inde Resultans æquatio etiam non habuisset communem divisorem, conclusissem æquationem Propositam, quoniam tantùm duas istas a & b diversas habet literas, non resultare posse ex multiplicatione duarum aliarum, &c.

Res eodem modo se habet in æquationibus, quæ irrationales quantitates includunt, ita ut non opùs sit alia exempla adjungere.

SE-

SEQUENTES 6ta, 7ma, ET 8va REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNES ÆQUATIONES, QUÆ EX MULTIPLICATIONE DUARUM ALIARUM PRODUCI POSSUNT, IN QUARUM UNA IRRATIONALIS QUANTITAS INCLUDITUR, QUÆ IN ALTERA NON CONTINETUR.

VI. REGULA,

Qua modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur; quæq;* quantitas *non eundem dimensionum numerum in diversis Terminis habet.*

Suppono, &c.

VII. REGULA,

Qua modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur; quæq;* quantitas *in aliquo Termino tot habet dimensiones, quot in nullo alio.*

Suppono, &c.

VIII. REGULA,

Qua modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur.*

Supponatur, &c.

Quoniam inter hanc 6^{tam} & 3^{tiam} Regulam, & inter 7^{mam} & 4^{tam}, nec non inter 8^{vam} & 5^{tam} haud magna disparitas existit, & tantùm pro *litera* poni debet *irrationalis quantitas*; erunt hæ Regu-

læ per illas jam explicatæ. Si enim pro unaquaque diversa quantitate irrationali duntaxat diversam literam concipias aut ponas, evadent hæ cum illis planè eædem. Atque ideirco hæc verba in 6ta Regula: *quæque quantitas æquè multarum dimensionum in diversis terminis non existit*; & hæc in 7ma: *quæque quantitas in aliquo termino talem dimensionum numerum habet, qualem in nullo alio*; itemque quid sit *quantitas alia irrationalis*, nullâ explicatione indigent.

Et Corollarii loco hîc annotari posset, hanc 8vam Regulam etiam comprehendere Reductionem omnis æquationis, quæ produci potest ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una est *rationalis*, hoc est, *in qua nullum est signum radicale*, & altera irrationalis.

Quia verò hæc 5ta & 8va Regula præsupponunt inventionem communis duarum æquationum divisoris, adjungam hîc, quo ego utor,

Modum, inveniendi maximum, duarum (vel plurium) sive æquationum sive quantitatum, divisorem communem.

Proponatur, exempli causâ, inveniendus maximus communis divisor duarum sequentium æquationum vel quantitatum, (considero enim quantitates haud secus atque æquationes, supponendo sc: illas ∞ o : cum suppositio hæc, ad inveniendum earum communem divisorem, nullum errorem inferre possit.)

$d^3c - acdd + 2aabc - 2abcd \infty o$, & $d^4c - bbcdd + caabb - caadd \infty o$.

Primò itaque inquiro, num aliqua litera vel numerus reperiatur, cujus ope singuli utriusque æquationis termini dividi queant. Hoc enim si contingat, oportet priùs ejusmodi divisionem instituere, ut hîc per literam *c*, fiuntque

$d^3 - add + 2aab - 2abd \infty o$, & $d^4 - bbdd + aabb - aadd \infty o$.

Deinde ad libitum sumatur aliqua litera, quæ in utraque harum æquationum reperiatur, ut *d*, *a*, vel *b*. Atque considerando ipsam, puta *d*, tanquam incognitam quantitatem, redigatur utraque in ordinem, habebiturque

1ma Æquatio	2da Æquatio
$d^3 - add - 2abd + 2aab \infty o$.	$d^4 * - bbdd * + aabb \infty o$.
	$- aa$

Porrò valor ipsius d^3, per 1mam æquationem inventus, substituatur

tuatur ubique in locum ipsius d^3 secundæ æquationis :. invenieturque

$$d^4 \infty a d^3 + 2 abdd - 2 aabd$$

seu

$$aadd + 2 aabd - 2 a^3 b$$
$$- 2 aabd + 2 abdd$$

Hoc est, $aabb - 2 a^3 b + 2 abdd - bbdd \infty 0$

& $dd \infty \frac{2 a^3 b - aabb}{2 ab - bb}$ seu aa; & $d \infty a$, seu $d - a \infty 0$.

Si jam hujus dd valor substituatur in ipsius locum in 1ma æquatione, habebitur $aad - a^3 - 2 abd + 2 aab \infty 0$.

Denique substituatur ipsius d valor a in ejus locum in hac ultima, obtinebitur $a^3 - a^3 - 2 aab + 2 aab \infty 0$.

In hac igitur cum termini omnes se mutuò destruant, indicio est tam æquationem $d^3 - add - 2 abd + 2 aab \infty 0$ quàm $d^4 * - bbdd * + aabb \infty 0$ esse divisibilem per $d - a \infty 0$, &
$- aa$

$d - a$ utriusque maximum communem divisorem existere. Atque adeò, cum duæ Propositæ æquationes (vel quantitates) priùs per c sint divisæ, manifestum est earundem maximum communem divisorem fore $\overline{d - a}$ in c, seu $dc - ac$.

Quòdsi autem aliam literam quàm d ceu incognitam quantitatem consideremus, licebit similiter illius ope eosdem semper divisores invenire. Exempli gratiâ, si a ut incognita quantitas consideretur, obtinebitur pro

1ma Æq.

$$aa - d\, a + \frac{d^3}{2b} \infty 0.$$
$$- \frac{dd}{2b}$$

2da Æq.

$$aa - \frac{bbdd + d^4}{bb - dd} \infty 0.$$

vel $aa - dd \infty 0$, seu $aa \infty dd$

vel $a - d \infty 0$, seu $a \infty d$.

Subrogetur jam dd valor ipsius aa, per 2dam æquationem inventus, in locum aa primæ æquationis, & invenietur pro ipsa

$$dd - da + \frac{d^3}{2b} \infty 0.$$
$$- \frac{dd}{2b}$$

Denuo

Denuo in hac ultima in locum ipsius a subrogetur ejus valor d, obtinebitur $dd - dd + \frac{d^3}{2b} \infty 0$.

$$ - \frac{ddd}{2b}$$

In hac igitur cum rursus termini omnes se mutuò tollant, argumentum est, utramque æquationem, ut ante, &c.

Eadem est ratio, quæcunque tandem litera pro incognita quantitate sumatur.

Si verò accidisset, ut nec per subrogationem valoris ipsius d^3, nec ipsius dd, nec denique ipsius d, termini omnes se mutuò destruxissent, argumentum fuisset, quòd duæ illæ æquationes $d^3 - add - 2abd + 2aab \infty 0$, & $d^4 * - bbdd * + aabb \infty 0$

$$- aa$$

nullum communem divisorem habuissent, & quòd duarum Propositarum æquationum, quæ priùs per c fuerunt divisæ, nullus communis divisor præter c extitisset. Excepto tantùm, ubi divisio fieri potest per ejusmodi quantitates, quæ simul possunt fieri $\infty 0$, atque in causa esse, quòd valor ejus literæ, quæ tanquam incognita quantitas consideratur, per istam æquationem inveniri non possit.

Exempli gratiâ, si in Propositis æquationibus literam b, ut incognitam quantitatem considerassem, obtinuissem

pro 1mâ: $b \infty \frac{d^3 - add}{2ad - 2aa}$ seu $\frac{dd}{2a}$, & pro 2dâ: $bb \infty \frac{d^4 - aadd}{dd - aa}$ seu dd

vel $b \infty d$.

Ubi videmus, valores ipsius b, nempe $\frac{dd}{2a} \infty d$, se invicem non tollere, ideoque concludendum esset, has duas æquationes non habere communem divisorem, si nempe ejusmodi quantitates non reperirentur, quæ, dum $\infty 0$ ponuntur, efficiunt, ut valor ipsius b inveniri nequeat. Quemadmodum si ponatur $d - a \infty 0$, non poterit valor ipsius b per 1mam æquationem inveniri: quippe tum d^3 erit ∞add.

Priusquam itaque concludatur, non dari duarum sive æquationum sive quantitatum communem aliquem divisorem: 1mo observandum venit, num ejusmodi quantitates in æquatione reperiantur, quæ in causa esse possunt, quòd valor incognitæ literæ, seu

ſeu inſtar incognitæ conſideratæ, per iſtam æquationem inveniri nequeat. 2do ſi reperiantur, num utramque æquationem dividant. quemadmodum in hoc exemplo, ubi reperitur $d - a \propto 0$, cujus ope utraque æquatio dividitur, quod, ſubrogando a in locum d, uno intuitu videre eſt. At verò ſi aliter eveniſſet, concluſiſſem, non dari, &c.

Unum adhuc exemplum adjungam.

Proponamus inveniendum eſſe maximum communem diviſorem harum duarum æquationum ſive quantitatum

1ma Æq. da Æq.

$$12a^4 + 11aaxx + x^4 - 4ax^3 - 20a^3x \propto 0, \ \& \ 12aaxx - 3ax^3 + 24a^4 - 16a^3x + x^4 \propto 0.$$

Quoniam autem hæ non diviſibiles ſunt per aliquam literam nec per numerum, conſidero literam aliquam, ad libitum ſumendam, tanquam incognitam quantitatem, puta x, atque operationem porrò inſtituo, ut ſequitur

$$\begin{array}{rl} \text{per 1}^{\text{mam}} \text{ invenitur } x^4 \propto & 4ax^3 - 11aaxx + 20a^3x - 12a^4 \\ \text{add.} & -3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4 \\ \hline \text{fit pro 2}^{\text{da}} \text{ æquatione} & ax^3 + aaxx + 4a^3x + 12a^4 \propto 0 \\ \hline \text{div. per } a. & x^3 \propto -axx - 4aax - 12a^3. \end{array}$$

Subſtituatur jam hic valor ipſius x^3 in ejus locum in alterutra æquatione, utpote primâ (quamvis autem in hoc exemplo parum interſit, poteſt tamen in multis caſibus magnum eſſe diſcrimen, tunc enim oportet, brevitatis causâ, eligere eam, per quam operatio facillimè procedit; quemadmodum vulgò, cùm duæ ſunt, dimenſionibus differentes, ea, quæ pauciores habet, eligenda venit), obtinebiturque $xx \propto ax - 6aa$.

Subſtituatur rurſus hic valor ipſius xx ubique in ejus locum in una præcedentium æquationum, ſumendo, brevitatis causâ, præcedentem 3 dimenſionum, invenietur

2da Æq.

$$\begin{array}{rl} x^3 \propto axx - 6aax \text{ seu} & \left.\begin{array}{l} +aax - 6a^3 \\ -6aax \\ +aax - 6a^3 \\ +4aax + 12a^3 \end{array}\right\} \propto 0 \\ +axx \propto & \\ +4aax + 12a^3 \propto & \end{array}$$

In qua videmus terminos omnes ſe invicem tollere, quod arguit, haſce Propoſitas æquationes ſive quantitates diviſibiles eſſe

Hhh per

per $xx - ax + 6aa$; quæ ideo maximus est earum communis divisor.

Porrò manifestum est, si quis *omnes duarum vel plurium sive Æquationum sive Quantitatum communes divisores* invenire velit, tantùm inveniendos esse *divisores omnes Maximi earum communis divisoris.*

Præterea etiam liquet, non tantùm in multis casibus, per 1^mam^ & 2^dam^ Regulam (uti annotatum est) uno intuitu videri posse, duas Æquationes vel Quantitates non habere communem aliquem divisorem; verùm etiam Regulas omnes, de Reductione æquationum agentes, ad inveniendos omnes ipsarum communes divisores inservire posse.

IX. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, sive literalem, sive numeralem, quæ per aliam, cujus solummodo unus terminus datus est, dividi potest.

Ostendam hoc in uno aut altero tantùm exemplo, quoniam generalis modus ex iis deprehendi satis poterit.

Proponatur itaque æquatio $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 1\frac{1}{2}xx - 7x - 3 \propto 0$, deturque illam dividi posse per aliam duarum dimensionum, cujus ultimus Terminus sit -2. Esto autem illa $xx + yx - 2 \propto 0$, seu, $xx \propto -yx + 2$. Hunc valorem ipsius xx ubique substituo in ejus locum, aliamque æquationem loco Propositæ obtineo, in qua x tantùm unius dimensionis reperitur: nimirum,

$y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\frac{1}{2}y + 5$ in x, $-2y^3 - 8yy - 16y - 16 \propto 0$. quemadmodum ex sequenti operatione videre est.

$$xx \propto -yx+2$$

$$\text{ergo } x^4 \propto yyxx - 4yx + 4 \text{ seu } \begin{array}{l} -y^3x+2yy \\ -{}^{4}yx+4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\begin{array}{l} x^5 \propto -y^3xx + 2yyx \\ \quad -4yxx + 4x \end{array} & \text{seu} & \begin{array}{l} +y^4x - 2y^3 \\ +{}^{2}yyx \\ +{}^{4}yyx - 8y \\ +{}^{4}\ \ x \end{array} \\
-4x^4 \propto & & \begin{array}{l} +{}^{4}y^3x - 16 \\ +{}^{16}yx - 8yy \end{array} \\
+4x^3 \propto -4yxx + 8x & \text{seu} & \begin{array}{l} +{}^{4}yyx - 8y \\ +{}^{8}\ \ x \end{array} \\
\begin{array}{l} +1\tfrac{1}{2}xx \propto \\ -7x - 3 \propto \end{array} & & \begin{array}{l} -1\tfrac{1}{2}yx + 3 \\ -\ 7\ x - 3 \end{array} \\
 & \text{summa} & \begin{array}{ll} +y^4\ x & -2y^3 \\ +4y^3 & -8yy \\ +{}^{10}yy & -16y \\ +14\tfrac{1}{2}y & -16 \\ +5 & \end{array} \propto 0.
\end{array}$$

Deinde considero unumquemque terminum separatum æquationis hujus deductæ $\propto 0$, & cum hîc duo tantùm sint termini, habebo inde hasce duas æquationes

$$\begin{array}{cc} \text{I.} & \text{II.} \\ y^4+4y^3+10yy+14\tfrac{1}{2}y+5 \propto 0, \ \& & -2y^3-8yy-16y-16 \propto 0 \\ & \text{seu } \ y^3+4yy+8y+8 \propto 0. \end{array}$$

Quarum quidem æquationum, si juxta præcedentem methodum quæratur maximus communis divisor, invenietur pro ipso $y+2 \propto 0$; ita ut Proposita æquatio, cum y sit $\propto -2$, divisibilis sit per $xx-2x-2 \propto 0$.

Eodem modo, proponatur hæc æquatio

$$x^4 - {}^{2}ax^3 \begin{array}{l} +{}^{2}aaxx \\ -cc \end{array} - {}^{2}a^3x + a^4 \propto 0,$$ deturque ipsam dividi posse per æquationem duarum dimensionum, cujus ultimus terminus sit $+aa$. Esto autem æquatio illa $xx+yx+aa \propto 0$, adeoque $xx \propto -yx-aa$. Hinc, subrogato hoc valore in locum xx, obtinebitur loco Propositæ æquationis alia, in qua x unius tantùm erit dimensionis, nempe

$$\begin{array}{l} -y^3 \\ -{}^{2}ayy \\ +ccy \end{array} x \begin{array}{l} -aayy \\ -{}^{2}a^3y \\ +aacc \end{array} \propto 0.$$

 Cujus

Cujus si unusquisque separatus terminus rursus consideretur $\infty\, 0$, habebimus has duas æquationes

$$\begin{array}{ccc} \text{I.} & & \text{II.} \\ -y^3 - {}^2ayy + ccy \infty 0, & \& & -aayy - {}^2a^3y + aacc \infty 0 \\ \text{seu} & & \text{seu} \\ -yy - {}^2ay + cc \infty 0 & & -yy - {}^2ay + cc \infty 0. \end{array}$$

Cum igitur harum communis mensura seu divisor sit $-yy - {}^2ay + cc \infty 0$, quæro hinc valorem ipsius y; invenioque $y \infty -a\, 8\, \sqrt{aa+cc}$, ac proinde æquationem Propositam esse divisibilem per $xx - a\, 8\, \sqrt{aa+cc}$ in x, $+ aa \infty 0$.

Similiter, si detur, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^5 * & + bb\,x^3 & + {}^3abb\,xx * & + {}^2ab^4 \infty 0 \\ & + aa & - {}^2a^3 & \end{array}$$

esse divisibilem per aliam 3 dimensionum, cujus tertius terminus sit $+ {}^2aax$: pono pro ipsa $x^3 + yxx + {}^2aax + z \infty 0$, seu $x^3 \infty - yxx - {}^2aax - z$. Quo valore ubique in locum x^3 in Proposita æquatione subrogato, obtinebitur

$$\begin{array}{lll} -z\; xx & + yz\,x & + aaz \infty 0. \\ + {}^3aay & + {}^2a^4 & - yyz \\ - y^3 & - {}^2aayy & - bbz \\ - bby & - {}^2aabb & + {}^2ab^4 \\ + {}^3abb & & \\ - {}^2a^3 & & \end{array}$$

Quoniam autem hæc æquatio 3 habet separatos terminos, habebuntur inde hæ 3 æquationes

$$\text{1}^{\text{ma}}$$
$$-z + {}^3aay - y^3 - bby + {}^3abb - {}^2a^3 \infty 0,$$
$$\text{2}^{\text{da}} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{3}^{\text{tia}}$$
$$yz + {}^2a^4 - {}^2aayy - {}^2aabb \infty 0, \quad aaz - yyz - bbz + {}^2ab^4 \infty 0.$$

Hinc per 1mam sublatâ z, quæ est $\infty\, 3aay - y^3 - bby + 3abb - {}^2a^3$, invenietur pro 2da:

$$\begin{array}{lllll} -y^4 * & + aayy & + 3abby & - 2aabb \infty 0, \\ & - bb & - 2a^3 & + 2a^4 \end{array}$$

& pro 3tia:

$$\begin{array}{llllll} + y^5 * & - {}^4aay^3 & + {}^2a^3\,yy & + {}^3a^4\;y & + {}^5a^3bb \infty 0. \\ & + {}^2bb & - {}^3abb & - {}^4aabb & - {}^2a^5 \\ & & & + b^4 & - ab^4 \end{array}$$

Quarum duarum maxima communis mensura per superiorem metho-

methodum est $y - a \infty 0$, ideoque $y \infty a$; cumque z sit $\infty\, 3aay - y^3 - bby + 3abb - 2a^3$, erit inde z etiam $\infty + 2abb$. Æquatio autem, per quam Proposita dividi potest, posita erat $x^3 + yxx + 2aax + z \infty 0$. Quocirca si in hac subrogentur valores quantitatum incognitarum y & z, invenietur pro ipsa $x^3 + axx + 2aax + 2abb \infty 0$.

Atque ita de aliis omnibus Propositis æquationibus, sive rationalibus sive irrationalibus, & vel aliquam vel nullam fractionem habentibus; atque etiam sive ultimus Terminus, sive aliquis alius, quem libuerit, æquationis, per quam Propositæ dividi queunt, datus fuerit, sive alicui quantitati (ut in his exemplis), sive nihilo æqualis sit; cujus quidem generis nullum exemplum affero, cum operatio haudquaquam diversa existat. Id tantùm addam, hæc omnia etiam ex comparatione terminorum duarum ejusdem formæ æquationum inveniri posse.

10ma, ET 11ma REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNEM ÆQUATIONEM, SIVE IN EA IRRATIONALES QUANTITATES ET FRACTIONES, SIVE NULLÆ REPERIANTUR, EXCEPTIS TANTUM ILLIS ÆQUATIONIBUS, IN QUIBUS SIGNA RADICALIA SUNT, QUÆ INCOGNITAM QUANTITATEM INCLUDUNT.

Cum autem hæ duæ Regulæ Methodum requirant, qua omnia signa radicalia, quæ incognitam quantitatem includunt, si in æquatione Proposita talia fortè fuerint, primùm tollantur; sequentes verò Regulæ, quibus omnia signa sine discrimine primùm auferantur: præmittam

Modum tollendi signa radicalia ex qualibet æquatione Proposita.

Proponatur, verbi gratiâ, æquatio $n \infty e + g + h + k + m$, &c. in qua 1°. quælibet litera quantitatem designet, signo radicali √Q. adfectam. Multiplicetur utraque pars quadratè, & evanescet signum quantitatis n. Quoniam autem reliquæ literæ e, g, h, k, m, &c. aut unam aut duas dimensiones habebunt, signumque radicale, in quantum duas habent, evanescet; manifestum est, ob-

tineri posse æquationem, in qua e æquatur aliis terminis, in quibus e non comprehenditur. Quæ æquatio si rursus eodem modo in se ducatur quadratè, evanescet pariter signum radicale ipsius e; & quoniam in hac ultima æquatione tunc reliquæ literæ habebunt aut 1, aut 2, aut 3, aut 4 dimensiones, ac ipsæ in quantum ex paribus dimensionibus constant nullum signum radicale habent, & quantùm ex imparibus constant ratione tollendi signi radicalis solummodo considerandæ sunt tanquam unâ duntaxat dimensione constantes, cum duæ signo radicali semper carent: manifestum est rursus inveniri posse æquationem, in qua g sit æqualis aliquot terminis, in quibus g non comprehenditur. Quâ æquatione denuo quadratâ, sublatum item erit signum radicale ipsius g. Atque ita facile est intelligere, quâlibet quadratione unum signum radicale tolli.

Majoris perspicuitatis ergo addatur sequens operatio, existente $n \infty e + g + h + k$, ubi quadrando utramque partem æquationis prodit æquatio $nn \infty ee + gg + hh + kk + {}^{2}eg + {}^{2}eh + {}^{2}ek + {}^{2}gh + {}^{2}gk + {}^{2}hk$. Brevitatis autem causâ, pro $\frac{nn - ee - gg - hh - kk}{2}$ scribatur pp; cum hæ quantitates signo radicali careant; & fit $pp \infty eg + eh + ek + gh + gk + hk$, sive $e \infty \frac{pp - gh - gk - hk}{g + h + k}$. Unde quadrando rursus utramque partem invenitur:

$$ee \infty \frac{p^4 + gghh + ggkk + hhkk - {}^{2}ppgh - {}^{2}ppgk - {}^{2}pphk + {}^{2}gghk + {}^{2}ghhk + {}^{2}ghkk}{gg + hh + kk + {}^{2}gh + {}^{2}gk + {}^{2}hk},$$

seu

$$p^4 + gghh + ggkk + hhkk - {}^{2}ppgh - {}^{2}ppgk - {}^{2}pphk + {}^{2}gghk + {}^{2}ghhk + {}^{2}ghkk \overline{- gg - hh - kk - {}^{2}gh - {}^{2}gk - {}^{2}hk} \text{ in } ee \infty 0.$$

Supponatur, ut ante, brevitatis causâ,

$$p^4 + gghh + ggkk + hhkk \overline{- gg - hh - kk} \text{ in } \overline{ee} \infty q^4$$
$$+ {}^{2}kk - {}^{2}pp - {}^{2}ee \infty rr$$
$$+ {}^{2}hh - {}^{2}pp - {}^{2}ee \infty ss$$
$$+ {}^{2}gg - {}^{2}pp - {}^{2}ee \infty tt,$$

erit-

eritque $q^4 + rrgh + ssgk + tthk \infty 0$

$$\frac{q^4 + tthk}{rrh + ssk} \infty -g$$

$$\frac{q^8 + t^4hhkk + 2q^4tthk}{r^4hh + s^4kk + 2rrsshk} \infty gg$$

$$\overline{q^8 + t^4hhkk + 2q^4tthk - r^4hh - s^4kk - 2rrsshk} \text{ in } gg \infty 0.$$

Supponatur rursus, brevitatis causâ,

$$q^8 + t^4hhkk - r^4hhgg - s^4kkgg \infty v^8,$$

$$\& \; 2q^4tt - 2rrssgg \infty w^6:$$

fietque $v^8 + w^6hk \infty 0$

$$v^8 \infty -w^6hk$$

& invenietur $v^{16} \infty w^{12}hhkk$. Quæ æquatio ab omnibus signis radicalibus liberata est.

Deinde ponatur unaquæque litera æquationis superioris $n \infty e + g + h$, &c. designare quantitatem signo radicali $\sqrt{}$C. adfectam. In hac igitur si loco quadratæ multiplicationis utraque pars multiplicetur cubicè, evanescet signum radicale ipsius n, & unaquæque reliquarum literarum e, g, h, &c. acquiret 1, 2, aut 3 dimensiones. In quantum autem tres dimensiones habent, in tantum carent etiam signo radicali, adeò ut hâc ratione obtineri queat æquatio, in qua e non nisi 1 aut 2 dimensiones habere potest. Quocirca multiplicando omnes hosce terminos per e, obtinebitur æquatio, in qua e præter 1, 2, & 3 dimensiones habere nequit. In quantum autem 3 habet, in tantum quoque signum radicale, uti dictum est, evanescit; ac proinde ipsa e in hac æquatione etiam non nisi 1 & 2 dimensiones retinere poterit. Hinc si ope hujus æquationis quæratur valor ipsius ee, isque in locum ee præcedentis substituatur, obtinebitur æquatio in qua e unam tantùm dimensionem habebit, atque ideo inveniri poterit e æqualis aliquot terminis, in quibus ipsa non comprehenditur. Quæ æquatio, si deinde cubetur, dabit aliam, in qua similiter signum radicale ipsius e prorsus evanescet. vel potest rursum per e multiplicari, & valor ee de novo inveniri, qui iterum, ut antea, positus loco ee, habes valorem ipsius e alio adhuc modo; ideoque duo hi valores invicem comparati, æquationem dabunt, in quâ $\sqrt{}$Ccam.

ipsius

ipsius e non reperies. Atque sic omnia alia signa radicalia ex æquatione tolli possunt; quod facillimè perspicitur, si tantùm advertamus, quòd, verbi gratiâ, $g, gg, g^4, g^5, g^7, g^8, g^{10}, g^{11}, g^{13}, g^{14}$, &c. solummodo habendæ sint pro g, gg, cum g^3 signum radicale deponat. Quæ ut magis perspicua evadant, sequentem operationem adjicere visum fuit.

Sit ex. gr. $n \propto e + g$

$$n^3 \propto e^3 + 3eeg + 3egg + g^3$$

$$n^3 - e^3 - g^3 \propto 3eeg + 3egg.$$

Esto jam, brevitatis causâ, $n^3 - e^3 - g^3 \propto f^3$, quoniam ipsæ Asymmetriâ carent, fietque $f^3 \propto 3eeg + 3egg$

$$f^3 e \propto 3e^3 g + 3eegg$$

$$\& \ \frac{f^3 e - 3e^3 g}{g} \propto 3eeg.$$

Invento valore ipsius $3eeg$ in ejus locum in æquatione præcedente subrogato, habebitur:

$$f^3 \propto \frac{f^3 e - 3e^3 g}{g} + 3egg$$

$$f^3 g \propto f^3 e - 3e^3 g + 3eg^3$$

$$f^3 g + 3e^3 g \propto f^3 e + 3eg^3$$

$$\frac{f^3 g + 3e^3 g}{f^3 + 3g^3} \propto e.$$

Denique ponatur, brevitatis causâ, $f^3 + 3e^3 \propto p^3$, & $f^3 + 3g^3 \propto q^3$, cum singulæ signum radicale deponant,

eritque $\frac{p^3 g}{q^3} \propto e$

& $\frac{p^9 g^3}{q^9} \propto e^3$. Quæ æquatio ab Asymmetria libera est. Vel hoc modo: multiplicetur $\frac{p^3 g}{q^3} \propto e$ per e, erit $\frac{p^3 ge}{q^3} \propto ee$; & quoniam inventa est $f^3 \propto 3gee + 3gge$, seu, $\frac{f^3 - 3gge}{3g} \propto ee$

erit $\frac{p^3 ge}{q^3} \propto \frac{f^3 - 3gge}{3g}$

& $3ggp^3 e \propto q^3 f^3 - 3q^3 gge$

ergo $e \propto \frac{q^3 f^3}{3ggp^3 + 3q^3 gg} \propto \frac{p^3 g}{q^3}$

& $q^6 f^3 \propto 3g^3 p^6 + 3g^3 p^3 q^3$. Quæ æquatio itidem ab omni signo radicali libera est.

Pari

Pari ratione tolli quoque possunt signa quævis altiora, sive illa ejusdem, sive diversæ dimensionis sint. Sed notandum est, quòd signa hæc, sive ipsa cognitis, sive incognitis quantitatibus præfigantur, per hunc modum semper quidem tolli possint, sed eum sæpissime non esse brevissimum, quando scilicet signa radicalia ad quantitates cognitas pertinent; quemadmodum pag. 75 Geometriæ cernere licet, ubi constat, quædam signa tolli posse multiplicando radicem æquationis per certam aliquam quantitatem, quo opere ipsa in aliam æquationem transmutatur, æquè multas dimensiones habentem.

Dantur præterea adhuc alia compendia, quorum supra allatum exemplum specimen erit: hæc enim æquatio $f^3 \infty 3gee + 3gge$ divisa per n ab una parte, & per $e + g$ (quæ æqualis est n,) ab altera parte, dat $\frac{f^3}{n} \infty 3ge$, cujus partes cubicè multiplicatæ dabunt $\frac{f^9}{n^3} \infty 27g^3e^3$, æquationem, in qua nullum signum radicale invenitur: Sed quoniam proposui tantummodo hîc generalem modum indicare, quo semper omnia signa radicalia tolli queant, & non compendia, quibus in multis casibus faciliùs eò pervenire posses, monstrare; ideo huic rei finem imponam, & ad Regulas Reductionum revertar.

X. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, sive literalem, sive numeralem, cujus incognita quantitas, (vel alia litera, quæ tanquam incognita considerari potest) duos vel plures æquales habet valores.

Primò si in Proposita æquatione duæ æquales radices existant, multiplico eam per Arithmeticam Progressionem pro libitu assumptam: nimirum, 1^mum^ terminum æquationis per 1^mum^ terminum progressionis, 2^dum^ terminum æquationis per 2^dum^ terminum progressionis, & sic deinceps; & Productum, quod inde fit, erit ∞ 0. Deinde, cum sic duas habeam æquationes,

quæro, per Methodum superiùs explicatam, maximum earum communem divisorem; atque hujus ope æquationem Propositam toties divido, quoties id fieri potest.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio $x^3 - 4xx + 5x - 2 \infty 0$, in qua duæ sunt æquales radices. Multiplico ergo ipsam per Arithmeticam Progressionem qualemcunque, hoc est, cujus incrementum vel decrementum sit vel 1, vel 2, vel 3, vel alius quilibet numerus; & cujus primus terminus sit vel 0, vel +, vel − quam 0: Ita ut semper ejus ope talis terminus æquationis tolli possit, qualem quis voluerit, collocando tantùm sub eo 0.

Ut si, exempli causâ, ultimum ejus terminum auferre velim, multiplicatio fieri potest ipsius $x^3 - 4xx + 5x - 2 \infty 0$

per hanc progressionem $3. \quad 2. \quad 1. \quad 0$

fietque $3x^3 - 8xx + 5x \; * \; \infty 0$.

Maxima autem communis divisor hujus & Propositæ æquationis est $x - 1 \infty 0$, per quam Proposita bis dividi potest; ita ut ejusdem radices sint 1, 1, & 2.

Sic si cupiam 1mum æquationis terminum auferre, multiplicatio institui potest ipsius $x^3 - 4xx + 5x - 2 \infty 0$

per hanc progressionem $0. \quad 1. \quad 2. \quad 3.$

& fit $* - 4xx + 10x - 6 \infty 0$.

Cujus quidem ac Propositæ æquationis maximus communis divisor, ut antea, est $x - 1 \infty 0$.

Similiter si 2dum terminum tollere lubeat, multiplicatio fieri potest, hoc pacto: $x^3 - 4xx + 5x - 2 \infty 0$

$+1. \quad 0. \quad -1. \quad -2$

& prodibit $x^3 \; * \; - 5x + 4 \infty 0$.

Cujus item & Propositæ maximus communis divisor est $x - 1 \infty 0$.

Ubi notandum, non necessarium esse, semper uti Progressione cujus excessus sit 1, quanquam ea communiter sit optima.

Cæterùm notandum, inter omnes has diversas operationes, quamvis eundem communem divisorem maximum exhibeant, tamen alias aliis sæpe esse præferendas, quandoquidem unius termini destructione sæpenumero multò faciliùs ad finem pervenitur quàm

quàm alterius. Neque etiam tenemur hunc divisorem immediatè ex Proposita æquatione & aliqua hujusmodi Progressione genita investigare: cum duæ ex his eligi possint, quarum beneficio eum invenire liceat. Ut sumendo, verbi gratiâ, $3xx - 8x + 5 \infty 0$ & $-4xx + 10x - 6 \infty 0$, vel $3xx - 8x + 5 \infty 0$ & $x^3 * - 5x + 4 \infty 0$, vel $-4xx + 10x - 6 \infty 0$ & $x^3 * - 5x + 4 \infty 0$. Et sæpe etiam longè compendiosiùs est, duo hujusmodi producta sibi eligere, ac deinde illorum communem divisorem quærere, quàm uti uno aliquo producto & æquatione Propositâ. Quæ quidem omnia usus hujus Regulæ abundè docebit.

Quemadmodum autem in hoc exemplo, ita in quovis alio Proposito procedo; cum perinde sit, sive æquatio numerica, sive literalis fuerit, & sive fractiones aut surdas quantitates includat, sive non; modò incognita quantitas inter surdas non contineatur: ita ut superfluum sit plura exempla hac de re afferre. Quocirca ad alteram hujus Regulæ partem transeo.

2do. Si in Proposita æquatione 3 æquales radices fuerint, multiplico illam per Arithmeticam Progressionem, ut antea; eritque Productum ∞ 0: Hoc Productum rursus multiplico per Arithmeticam Progressionem; eritque hoc secundum Productum etiam ∞ 0. Si æquatio Proposita 4 radices æquales habeat, ter multiplico; si 5, quater; & ita semper obtinebuntur tot Proæquationes, quot radices æquales in æquatione Proposita continentur.

Exempli gratiâ, detur hæc æquatio $x^4 * - 6xx + 8x - 3 \infty 0$, habens 3 æquales radices.

Primò multiplico eam per 0. 1. 2. 3. 4

& fit $-12xx + 24x - 12 \infty 0$.

Hoc productum iterum multiplico per 0. 1. 2

& provenit $24x - 24 \infty 0$.

eritque communis divisor $x - 1 \infty 0$.

Ita ut Proposita æquatio habeat has 4 radices 1, 1, 1, & -3. Et sic de aliis omnibus.

Quod verò usum hujus Methodi concernit, is tantus est, in inveniendis Tangentibus, determinandis Maximis & Minimis, & quibusvis extremis, ut, quamvis se ad alia non extenderet, immensus tamen dici posset. Etenim reductis talibus Problematis ad Æquationem, in qua hæc sola conditio ad ejus determinationem adhuc requiritur, ut incognita quantitas (aut alia quævis litera, quæ ut incognita consideratur) ad duas æquales radices determinetur: poterit Quæsitum beneficio hujus Methodi quàm facillimè inveniri. quippe nihil aliud opùs est, quàm æquationem dicto modo per Arithmeticam Progressionem multiplicare: cum duæ hæ æquationes tunc omnes Problematis conditiones sint comprehensuræ, ita ut ipsæ tantùm resolvendæ restent. Et notandum est, hoc sæpe beneficio solius productæ æquationis, nullo, aut exiguo admodum labore, præstari posse; quod patet in omnibus illis exemplis, quæ de inveniendis tangentibus pagin. 40, 41, & 42 à Dno des Cartes in sua Geometria sunt allata, in quibus r & s incognitæ existunt & y quidem cognita, sed quæ ut incognita consideratur: omnes enim illorum Problematum conditiones æquationibus erunt comprehensæ, si illæ ipsæ æquationes sic determinentur, ut dicta quantitas y duas æquales radices obtineat.

Primum dictorum exemplorum est $yy \frac{+qr-2qv}{q-r} y \frac{+qvv-qss}{q-r} \infty 0$

Multiplico per meam Methodum per $2. \quad 1. \quad 0.$

fit $2yy + \frac{qr-2qv}{q-r} y \infty 0$

seu $2qy - 2ry + qr \infty 2qv$

& $y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2} r \infty v.$

2dum exemplum est

$$\begin{array}{l} y^6 - 2by^5 - 2cdy^4 + 4bcdy^3 - 2bbcdyy - 2bccddy + bbccdd \infty 0 \\ \qquad\qquad + bb \qquad - 2ddv \qquad + ccdd \\ \qquad\qquad + dd \qquad\qquad\qquad - ddss \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + ddvv \end{array}$$

Mult. per $+4, +3, +2, \quad +1, \quad 0, \quad -1, \quad -2$

eritque productum

$$\begin{array}{l} 4y^6 - 6by^5 - 4cdy^4 + 4bcdy^3 \quad * \quad + 2bccddy - 2bbccdd \infty 0 \\ \qquad\qquad + 2bb \quad - 2ddv \\ \qquad\qquad + 2dd \end{array}$$

Divi-

Dividendo jam per $2ddy^3$ & transferendo v ad alteram partem, obtinebitur

$$\frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} - \frac{2cy}{d} + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3} \infty v.$$
$$+\frac{bby}{dd}$$
$$+y$$

3tium autem exemplum ejusdem est naturæ cum 1mo.

Ubi patet, in omnibus hisce exemplis Quæsitum ex sola Producta æquatione uno intuitu inveniri, y enim cognita est, atque v, quæ erat incognita ac sola quærebatur, jam etiam innotuit.

At verò sæpe etiam accidit, ut Quæsitum ex sola hac Producta æquatione inveniri nequeat; quemadmodum contingit si valorem quantitatis incognitæ s investigare velimus. Quippe tunc valor ipsius v in prima æquatione in ejus locum subrogandus est, vel potiùs in alia æquatione, per aliam Progressionem productâ, cujus beneficio ex illa prima terminus aliquis pro lubitu (excepto eo, qui per 1mam Progressionem est sublatus) tolli potest.

Exempli gratiâ, in 1mo exemplo multiplicatum fuit per 2, 1, 0, ac inde inventum $v \infty y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$; Jam si multiplicetur

$$yy + \frac{qr - 2qv}{q - r}y + \frac{qvv - qss}{q - r} \infty 0$$

per $+1$, 0, -1:

obtinetur $yy \quad * \quad \frac{-qvv + qss}{q - r} \infty 0$

mult. per $q - r$.

$qyy - ryy \quad * \quad -qvv + qss \infty 0$

div. per q.

$$ss \infty -yy + \frac{ryy}{q} + vv$$

$$\text{fit } s \infty \sqrt{-yy + \frac{ryy}{q} + vv}.$$

Quocirca si in hac æquatione in locum vv subrogetur ejus valor, innotescet inde etiam quantitas s.

Eodem modo, multiplicando in 2do exemplo per hanc Progressionem 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3, inveniri potest valor quantitatis s. Ubi si similiter in locum vv, ejus valor substituatur, quantitas s inde innotescet.

Quòd si verò contingat, æquationem, per quam v quæritur, esse talem, ut valor ipsius v per eandem æquationem solam sine

ipsius s inclusione obtineri non possit; quemadmodum hîc valor ipsius s absque inclusione ipsius v ex producta æquatione inveniri nequit; potest tamen semper, quotcunque etiam dimensiones quælibet incognita quantitas habeat, tandem inveniri æquatio (operando haud secus ac si illarum communis divisor, ut supra ostensum fuit, quæreretur), in qua duntaxat una incognita quantitas includitur, cujus radices deinceps sunt inveniendæ.

Exempli gratiâ, si habeatur hæc æquatio

$$\begin{array}{l} y^4 * -6zzyy - 12z^3y + 9z^4 \propto 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -9aazz \end{array}$$

in qua y & z sint incognitæ, & y ad 2 æquales radices determinari debeat: operationem instituo, ut sequitur.

$$\begin{array}{lccccc} & y^4 * & -6zzyy & -12z^3y & +9z^4 & \propto 0 \\ & & & & -9aazz & \\ \text{Mult. per} & 0, & 1, & 2, & 3, & 4 \\ \text{fit} & & -12zzyy & -36z^3y & +36z^4 & \propto 0 \\ & & & & -36aazz & \\ \text{div. per } 12zz. & & -yy & -3zy & +3zz & \propto 0 \\ & & & & -3aa & \\ & & yy \propto & -3zy & +3zz. & \\ & & & & -3aa & \end{array}$$

Similiter multiplicetur Proposita

$$\begin{array}{lcccccc} & y^4 & * & -6zzyy & -12z^3y & +9z^4 & \propto 0 \\ & & & & & -9aazz & \\ \text{per} & 4, & 3, & 2, & 1, & 0 & \\ \text{fit} & 4y^4 & * & -12zzyy & -12z^3y & * & \propto 0 \\ \text{div. per } 4y. & y^3 & * & -3zzy & -3z^3 & \propto 0. & \end{array}$$

Substituendo jam valorem ipsius yy, supra inventum, in ejus locum, habebitur

$$\begin{array}{ll} y^3 \propto -3zyy + 3zzy \quad \text{seu} & +9zzy - 9z^3 \\ \qquad\quad -3aay. & +3zzy + 9aaz \\ & -3aay \\ -3zzy - 3z^3 \propto & -3zzy - 3z^3 \\ \text{summa} & +9zzy - 12z^3 \propto 0. \\ & -3aay + 9aaz \\ & y \propto \dfrac{4z^3 - 3aaz}{3zz - aa}. \end{array}$$

Quo-

Quocirca ſubſtituendo rurſus hunc valorem ubique in locum y in hac æquatione $yy \propto -3zy + 3zz$, exurget inde alia æqua-
$$-3aa$$
tio, in quâ nulla incognita præterquam ſola z reperitur, quæque per eam porrò inveniri poteſt.

Denique, quicquid hîc de duabus æqualibus radicibus dixi, eodem etiam modo de 3 aut pluribus æqualibus eſt intelligendum. Si enim æquatio habeatur, quæ omnes conditiones Problematis includat, exceptâ hac ſolâ, quòd incognita quantitas, vel quæ ut incognita conſideratur, ad 3 vel plures æquales radices adhuc ſit determinanda: oportet ipſam primùm multiplicare per Arithmeticam Progreſſionem, & hoc productum rurſus eodem modo, & ſic deinceps, donec totidem æquationes habeantur; quot æquales radices. ut ſupra dictum atque explicatum fuit. Quo peracto, tantùm æquationes eodem modo reſolvendæ ſunt, ut in ſuperiori exemplo oſtenſum eſt, donec una tandem obtineatur æquatio, in qua non niſi una incognita quantitas reperiatur. Et demum notandum, infinita Problemata, quæ multis planè artificioſa ac ingenioſa dicuntur, ad talem æquationem, in qua ſolummodo una hujuſmodi determinatio adhuc implenda eſt, quàm facillimè reduci & deinde per hanc Methodum ſolvi poſſe.

XI. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnes æquationes, ſive literales, ſive numerales, quæ produci poſſunt ex multiplicatione duarum aliarum, in quarum alterutra unus pluréſve termini deficiunt.

Brevitatis causâ, quantitatem cognitam 2^{di} termini, adfectam ſuis ſignis + & —, vocabo p; 3^{tii} q; 4^{ti} r; 5^{ti} $ſ$; atque ſic deinceps: & $-p$, $-q$, $-ſ$, &c. eaſdem quantitates deſignabunt, ſed contrariis ſignis adfectas.

Ex. gr. in hac æquatione $x^4 - {}^{2}ax^3 - {}^{4}bbxx + {}^{6}abbx - {}^{4}a^4 \propto 0$,
$$\qquad\qquad + {}^{3}b \qquad\qquad\qquad + {}^{2}aab$$
erit $-{}^{2}a + {}^{3}b \propto p$; $-{}^{4}bb \propto q$; $+{}^{6}abb + {}^{2}aab \propto r$; $-{}^{4}a^4 \propto s$; & $+{}^{2}a - {}^{3}b \propto -p$; $+{}^{4}bb \propto -q$; &c.

1ma *Pars.*

Si aliqua æquatio, 6 aut pauciores dimensiones habens, produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit unius dimensionis, altera verò uno pluribúsve terminis careat; erit ejus Formula aliqua ex sequentibus, & poterit dividi vel per unamquamquē æquationem sibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per ***unamquamque***, ubi hæ æquationes seu Divisores copulantur per voculam *&*; per ***aliquam*** verò, ubi disjunguntur per voculam *vel*.

$x^3, pxx, qx, r \propto 0$ . . . per $x + p \propto 0$, *&* $x + \frac{r}{q} \propto 0$.

$x^4, px^3, qxx, rx, s \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{s}{r} \propto 0$.

$x^4, px^3, *, rx, s \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *&* $x + \frac{s}{r} \propto 0$.

$x^4, px^3, qxx, *, s \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *&* $x \; 8 \; \sqrt{-\frac{s}{q}} \propto 0$.

$x^4, *, qxx, rx, s \propto 0$ per $x + \frac{s}{r} \propto 0$, *&* $x \; 8 \; \sqrt{-q} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{t}{s} \propto 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{t}{s} \propto 0$.

$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{t}{s} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x \; 8 \; \sqrt{-\frac{t}{r}} \propto 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \propto 0$ per $x + \frac{t}{s} \propto 0$, *vel* $x \; 8 \; \sqrt{-q} \propto 0$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *&* $x + \frac{t}{s} \propto 0$.

$x^5, px^4, *, rxx, *, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *&* $x \; 8 \; \sqrt{-\frac{t}{r}} \propto 0$.

x^5,

$x^5, *, qx^3, *, sx, t \infty 0$ per $x + \frac{t}{s} \infty 0$, & $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x + \sqrt{C.\, \frac{t}{q}} \infty 0$.

$x^5, *, *, rxx, sx, t \infty 0$ per $x + \frac{t}{s} \infty 0$, & $x + \sqrt{C.\, r} \infty 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \infty 0$ per $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{t}{r}} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$,
vel $x + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, *, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* per utramque harum duarum
$x + \sqrt{C.\, \frac{v}{r}} \infty 0$,
$x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$,
vel $x + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, *, *, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, vel $x + \sqrt{C.\,r} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, vel $x\ 8\ \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, vel $x + \frac{v}{t} \infty 0$,
vel $x + \frac{t}{2s}\ 8\ \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, vel $x\ 8\ \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, vel $x + \frac{v}{t} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, vel $x + \frac{v}{t} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, *, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x - \frac{v}{p^3 q} \infty 0$,
& $x\ 8\ \sqrt{-\frac{v}{ppq}} \infty 0$,
& $x\ 8\ \sqrt{\sqrt{-\frac{v}{q}}} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, *, v \infty 0$ per $x\ 8\ \sqrt{-q} \infty 0$, & $x - \frac{v}{qr} \infty 0$,
& $x + \sqrt{C.\frac{v}{r}} \infty 0$.

$x^6, *, *, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x - \frac{rs}{v} \infty 0$, & $x\ 8\ \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$,
& $x + \sqrt{C.\,r} \infty 0$.

$x^6, *, *, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, & $x - \frac{st^3}{v^3} \infty 0$,
& $x\ 8\ \frac{t}{v}\sqrt{-s} \infty 0$,
& $x - \sqrt{C.\frac{st}{v}} \infty 0$,
& $x\ 8\ \sqrt{\sqrt{-s}} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x + \sqrt{C.\frac{v}{r}} \infty 0$,
& $x + \frac{v}{ppr} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \infty 0$ per $x\ 8\ \sqrt{-q} \infty 0$, & $x\ 8\ \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, *, *, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, & $x \sqrt{C.\,r} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, *, sxx, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x\ 8\ \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6,$

$x^6, *, qx^4, *, *, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, & $x \; 8 \; \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x + \frac{v}{t} \infty 0$.

2da Pars.

Si aliqua æquatio, 6 aut pauciores dimensiones habens, produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit duarum vel plurium dimensionum, ac duorum tantùm terminorum; erit ejus Formula aliqua ex sequentibus, & poterit dividi per unamquamque æquationem sibi adjunctam.

1mò. *Per xx 8 quantitate aliquâ cognitâ ∞ 0.*

$x^3, pxx, qx, r \infty 0$ per $xx + q \infty 0$, (& $x + p \infty 0$.)

$x^4, px^3, qxx, rx, s \infty 0$ per $xx + \frac{r}{p} \infty 0$, & $xx + \frac{1}{2}q \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty 0$.

$x^4, px^3, *, rx, s \infty 0$ per $xx + \frac{r}{p} \infty 0$, & $xx \; 8 \; \sqrt{-s} \infty 0$.

$x^4, *, qxx, *, s \infty 0$ per $xx + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty 0$, & $xx + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty 0$.

$x^4, *, *, *, s \infty 0$ per $xx + \sqrt{-s} \infty 0$, & $xx - \sqrt{-s} \infty 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \infty 0$ per $xx + \frac{1}{2}q \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty 0$, & $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \infty 0$ per $xx + q \infty 0$, & $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \infty 0$ per $xx + q \infty 0$, & $xx \; 8 \; \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \infty 0$ per $xx + q \infty 0$, & $xx \; 8 \; \sqrt{-\frac{t}{r}} \infty 0$.

$x^5, *, *, rxx, sx, t \infty 0$ per $xx + \frac{t}{r} \infty 0$, & $xx \; 8 \; \sqrt{-s} \infty 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \infty 0$ per $xx + \frac{t}{r} \infty 0$, & $xx + \frac{1}{2}q \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty 0$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \infty 0$ per $xx \; 8 \; \sqrt{-s} \infty 0$, & $xx \; 8 \; \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \infty 0$ per $xx \; 8 \; \sqrt{-s} \infty 0$, & $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \infty 0$ per $xx \; 8 \; \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0$, & $xx + \frac{1}{2}q \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{2p} \; 8 \; \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \infty 0$, & $xx + \sqrt{C.\, v} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{p} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, *, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{p} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{p} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, *, v \infty 0$ per $xx + \frac{r}{p} \infty 0$, & $xx + \sqrt{C.\, v} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{t}{r} \infty 0$.

$x^6, *, *, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{t}{r} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{t}{r} \infty 0$.

$x^6, *, *, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $xx + \frac{t}{r} \infty 0$, & $xx + \sqrt{C.\, v} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx \; 8 \; \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^6,$

$x^6, px^5, qx^4, *, *, tx, v \infty 0$ per $xx \, 8 \, \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $xx \, 8 \, \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \infty 0$ per $xx \, 8 \, \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty 0$, & $xx + \sqrt{C.\,v} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \infty 0$ per $xx + y \infty 0$, existente $y^3 - qyy + sy - v \infty 0$.

$x^6, *, *, *, sxx, *, v \infty 0$ per $xx + y \infty 0$, existente $y^3 * + sy - v \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, *, *, *, v \infty 0$ per $xx + y \infty 0$, existente $y^3 - qyy * - v \infty 0$.

$x^6, *, *, *, *, *, v \infty 0$ per $xx + \sqrt{C.\,v} \infty 0$.

2dò. *Per* x^3 8 *quantitate aliquâ cognitâ* $\infty 0$:

$x^4, px^3, *, rx, s \infty 0$ per $x^3 + r \infty 0$, & $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$ (& $x + p \infty 0$)

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \infty 0$ per $x^3 + r \infty 0$, $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$, & $x^3 + \frac{t}{q} \infty 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \infty 0$ per $x^3 + r \infty 0$, & $x^3 + \frac{t}{q} \infty 0$, (& $xx + q \infty 0$)

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$, $x^3 + \frac{t}{q} \infty 0$, & $x^3 + \frac{1}{2}r \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$, $x^3 + \frac{t}{q} \infty 0$, & $x^3 \, 8 \, \sqrt{-v} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, *, sxx, *, v \infty 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$, & $x^3 \, 8 \, \sqrt{-v} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \infty 0$, & $x^3 + \frac{1}{2}r \, 8 \, \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, *, *, tx, v \propto 0$ per $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$, & $x^3\ 8\ \sqrt{-v} \propto 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \propto 0$ per $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$, & $x^3 + \frac{1}{2}r\ 8\ \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \propto 0$.

$x^6, *, *, rx^3, *, *, v \propto 0$ per $x^3 + \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \propto 0$, & $x^3 + \frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \propto 0$.

$x^6, *, *, *, *, *, v \propto 0$ per $x^3 + \sqrt{-v} \propto 0$, & $x^3 - \sqrt{-v} \propto 0$.

3^{tiò}. *Per x^4 8 quantitate aliquâ cognitâ* $\propto 0$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \propto 0$ per $x^4 + s \propto 0$, & $x^4 + \frac{t}{p} \propto 0$, (& $x + p \propto 0$)

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \propto 0$ per $x^4 + s \propto 0$, $x^4 + \frac{t}{p}$, & $x^4 + \frac{v}{q} \propto 0$.

$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \propto 0$ per $x^4 + s \propto 0$, & $x^4 + \frac{v}{q} \propto 0$ (& $xx + q \propto 0$.

4^{tò}. *Per x^5 8 quantitate aliquâ cognitâ* $\propto 0$.

$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \propto 0$ per $x^5 + t \propto 0$, & $x^5 + \frac{v}{p} \propto 0$, (& $x + p \propto 0$.)

3^{tia} *Pars.*

Si aliqua æquatio 5 dimensionum produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimensiones, & nullum terminum $\propto 0$, altera verò aliquem terminum $\propto 0$; erit ejus Formula aliqua ex sequentibus, & poterit dividi vel per unamquamque æquationem sibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per *unamquamque*, ubi vocula &; per *aliquam*, ubi *vel* invenitur: ut antea.

Quan-

Quantitatem cognitam 2^di^ termini æquationum sequentium quadratarum, adfectam suis signis + & —, brevitatis causâ, vocabo y, & ultimum terminum z.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \infty o$ per $xx + px + \frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}\ 8\ \sqrt{\frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}\square^{te} + \frac{t}{p}} \infty o$,

vel per $xx, + \frac{1}{2}p + \frac{t}{2s}\ 8\ \sqrt{\frac{1}{2}p + \frac{t}{2s}\square^{te} - q}$ in $x, + \frac{yt}{s} \infty o$,

vel per $x^3 + r \infty o$.

$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \infty o$ per $xx + px - \frac{r}{2p}\ 8\ \sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p}} \infty o$,

vel per $xx, + p + \frac{t}{s}$ in $x, + \frac{yt}{s} \infty o$.

$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \infty o$, per $xx + px + \frac{1}{2}q\ 8\ \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{t}{p}} \infty o$,

vel per $xx + \frac{zs}{t}x + \frac{1}{2}q\ 8\ \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \infty o$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \infty o$ per $xx + px\ 8\ \sqrt{\frac{t}{p}} \infty o$,

vel per utramque harum duarum $\begin{cases} xx, + p + \frac{t}{s} \text{ in } x, + \frac{yt}{s} \infty o, \\ xx,\ 8\ \frac{s}{t}\sqrt{s} \text{ in } x,\ 8\ \sqrt{s} \infty o. \end{cases}$

$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \infty o$ per $xx + px + \frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}\ 8\ \sqrt{\frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}\square^{te} + \frac{t}{p}} \infty o$,

& per $xx + px + \frac{t}{2r}\ 8\ \sqrt{\frac{tt}{4rr} - \frac{ppt}{r}} \infty o$.

$x^5, px^4, *, rxx, *, t \infty o$ per $xx + px + \frac{1}{2}pp\ 8\ \sqrt{\frac{1}{4}p^4 + pr} \infty o$,

& per $xx + px + \sqrt{C.pt} \infty o$,

& per $xx + px - \frac{r}{2p}\ 8\ \sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p}} \infty o$.

$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \infty o$ per $xx + px + pp \infty o$,

& per $xx + px + \frac{1}{2}q\ 8\ \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{t}{p}} \infty o$.

$x^5, px^4, *, *, *, t \infty o$ per $xx + px + pp \infty o$,

& per $xx + px\ 8\ \sqrt{-\frac{t}{p}} \infty o$.

$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \infty o$ per $xx, + \frac{t}{2s}\ 8\ \sqrt{\frac{tt}{4ss} - q}$ in $x, + \frac{yt}{s} \infty o$.

x^5,

$x^5, *, *, rxx, sx, t \propto 0$ per $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \propto 0$.

$x^5, *, qx^3, *, sx, t \propto 0$ per $xx + \frac{zs}{t}x + \frac{1}{2}q \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \propto 0$,

& per $xx, \; 8 \sqrt{\frac{s}{z}} \text{ in } x, + \frac{1}{2}q \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \propto 0$,

& per $xx, + \frac{t}{2s} \; 8 \sqrt{\frac{tt}{4ss} - q} \text{ in } x, + \frac{yt}{s} \propto 0$,

& per $xx + x\sqrt{C.\frac{ss}{t}} + \sqrt{C.\frac{tt}{s}} \propto 0$.

$x^5, *, *, *, sx, t \propto 0$ per $xx, \; 8 \frac{s}{t}\sqrt{s} \text{ in } x, \; 8 \sqrt{s} \propto 0$,

& per $xx, \; 8 \sqrt{\sqrt{s}} \text{ in } x, \; 8 \sqrt{s} \propto 0$,

& per $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \propto 0$,

& per $xx, + \sqrt{C.\frac{ss}{t}} \text{ in } x, + \sqrt{C.\frac{tt}{s}} \propto 0$,

& per $xx, + \sqrt{\beta.\, t} \text{ in } x, + \frac{tt}{ss} \propto 0$.

Ad 1mam & 3tiam Partem annotandum venit, si non constet an Proposita æquatio ex duabus aliis, requisitas conditiones habentibus, produci possit, quòd id facillimo negotio ut plurimum experiri liceat: quotiescunque enim divisores, qui per voculam & copulantur, inter se non secundùm omnes terminos conveniant, concludendum est, Propositam æquationem ita produci non posse, adeò ut eo in casu divisio irrita foret. Exempli gratiâ, si Proponatur æquatio $x^6, *, *, *, -xx\sqrt{3} - 2\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{8} \propto 0$, quæ hujus est formulæ $x^6, *, *, *, sxx, tx, v \propto 0$, ea divisibilis erit secundùm 1mam Partem, per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, & per $x \; 8 \sqrt{\sqrt{-s}} \propto 0$; & per $x \; 8 \frac{t}{v}\sqrt{-s} \propto 0$; & per $x - \sqrt{C.\frac{st}{v}} \propto 0$; & per $x - \frac{st^3}{v^3} \propto 0$, si produci possit *ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera sit unius dimensionis, altera verò uno pluribúsve terminis careat.* Ut autem sciatur, utrum hoc fieri queat, non opùs est id divisione per aliquem ex divisoribus explorare, cum hic duo divisores reperiantur inter se non convenientes: nimirum, $x + \frac{v}{t} \propto 0$, & $x \; 8 \sqrt{\sqrt{-s}} \propto 0$, nam $\frac{v}{t}$ rationalem, & $\sqrt{\sqrt{-s}}$ irrationalem numerum designat. Atque cum indivisibilitas etiam sæpe

sæpe uno intuitu ex variis signis constet, ut, ex. gr. si loco $-\sqrt{3}$, habuissemus $+\sqrt{3}$, quo casu $\sqrt{Q}$. ex $-s$ extrahi non potuisset; Poterimus interdum operosas aliquot multiplicationes & divisiones, quæ alioquin essent faciendæ, insuper habere. Majoris perspicuitatis gratiâ alterum exemplum addam. Divisores æquationis $x^5, *, *, *, sx, t \infty 0$ sunt, secundùm 3tiam Partem, $xx \, 8 \, \frac{s}{t} \sqrt{s}$ in x, $8 \sqrt{s} \infty 0$; $xx \, 8 \sqrt{\sqrt{s}}$ in x, $8 \sqrt{s} \infty 0$; $xx + \frac{t}{s} x + \frac{tt}{ss} \infty 0$; $xx + \sqrt{C. \frac{ss}{t}}$ in $x + \sqrt{C. \frac{tt}{s}} \infty 0$; & $xx + \sqrt{\beta. t}$ in $x + \frac{tt}{ss} \infty 0$: si jam comperiatur $8 \, \frac{s}{t} \sqrt{s}$ non esse $\infty \sqrt{\sqrt{s}}$, vel $\infty \frac{t}{s}$, vel $\infty \sqrt{C. \frac{ss}{t}}$, vel $\infty \sqrt{\beta. t}$, quæ sunt quantitates cognitæ 2di termini; vel ultimos terminos $8 \sqrt{s}$, & $+\frac{tt}{ss}$, &c. non inter se convenire; indicio esset æquationem Propositam produci non posse *ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habet duas dimensiones, & nullum terminum* $\infty 0$, *altera verò aliquem terminum* $\infty 0$.

4ta *Pars.*

Si æquatio aliqua 6 dimensionum produci possit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimensiones, & nullum terminum $\infty 0$; altera verò unum, pluresve terminos $\infty 0$; erit ea divisibilis per $xx + yx + z \infty 0$, cujus y & z valores per sequentes æquationes ac sequenti modo sunt inveniendi.

Æquationem Propositam, sive in ea aliquis terminus deficiat, sive non, sic designabo: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \infty 0$; ubi p denotat quantitatem cognitam 2di termini, vel 0, si is deficiat; q quantitatem cognitam 3tii termini, vel 0, si is desit; r 4ti termini, &c.

A
$$
\begin{array}{lll}
zz - {}^{2}q\,z + ppq \infty 0 & \qquad zz - \frac{t}{p}\,z + {}^{2}r \infty 0 & \qquad y \infty p \\
\quad\;\; -pp \quad -rp & \qquad\qquad\qquad\;\; -s & \\
\quad\;\; +\frac{r}{p} \quad\; +s & \qquad\qquad\qquad\;\; +rp & \\
\qquad\qquad\;\; -\frac{t}{p} & \qquad\qquad\qquad\;\; -ppq & \\
\hline
\qquad\;\; 2 & \qquad\qquad\qquad\;\; \frac{r}{p}+pp &
\end{array}
$$

B
$$
\begin{array}{lll}
y^{3} - p\,yy + q\,y - r \infty 0 & \qquad yy - \frac{qt}{v}\,y + \frac{t4}{v3} \infty 0 & \qquad z \infty \frac{yv}{t} \\
\quad\;\; -\frac{2v}{t} \quad +\frac{pv}{t} & \qquad\quad -p \quad +\frac{rt}{v} & \\
 & \qquad\qquad\quad +\frac{rtt}{vv} & \\
 & \qquad\qquad\quad -\frac{t3s}{v3} & \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 2 &
\end{array}
$$

C
$$
\begin{array}{ll}
y^{4} - \frac{q}{p}\,y^{3} + {}^{3}q\,yy - \frac{s}{p}\,y + \frac{t}{p} \infty 0 & \qquad y^{4} - \frac{t}{s}\,y^{3} + pp\,yy - {}^{2}pq\,y + qq \infty 0 \\
\quad -{}^{2}p \quad +pp \quad -{}^{2}pq \quad +qq & \qquad\quad -{}^{2}p \quad +\frac{tp}{s} \quad -\frac{tq}{s} \quad -\frac{vq}{s} \\
\qquad\qquad\qquad -\frac{qq}{p} \quad -\frac{rq}{p} & \qquad\qquad\qquad +{}^{2}q \quad +\frac{vp}{s} \\
\qquad\qquad\qquad +r &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
-\frac{t}{s}\,y^{3} + \frac{tp}{s}\,yy - \frac{tq}{s}\,y - \frac{vq}{s} \infty 0 & \qquad z \infty -p\,y + yy + q \\
+\frac{q}{p} \quad -q \quad +\frac{vp}{s} \quad -\frac{t}{p} & \\
\qquad\qquad\quad +\frac{s}{p} \quad +\frac{rq}{p} & \\
\qquad\qquad\quad +\frac{qq}{p} & \\
\qquad\qquad\quad -r &
\end{array}
$$

D
$$
\begin{array}{ll}
+q\,y^{3} * + s\,y - t \infty 0 & \qquad +s\,y^{4} - t\,y^{3} + {}^{2}qs\,yy - tq\,y + qqs \infty 0 \\
\quad +qq \quad +rq & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -vq \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z \infty yy + q
\end{array}
$$

c	f	g
$y \infty p$	$y \infty p$	$y \infty \frac{t}{s}$
$z \infty q$	$z \infty q - \frac{r}{p} \infty \frac{vp}{t}$	$z \infty \frac{v}{s}$.

Quan-

Quando nulli termini in æquatione Proposita sunt ∞ o, illa dividi poterit per aliquam harum A, B, C, e, f, g.

Quando est p ∞ o	... per aliquam harum	B, D, g
q	— — —	A, B, C, f, g
r	— — —	A, B, C
s	— — —	A, B, C, e, f
t	— — —	A, C, e
p, q	— — —	B, D, g
p, r	— — —	B, D
p, s	— — —	B, D
p, t	— — —	D
q, r	— — —	A, B, C
q, s	— — —	A, B, C, f
q, t	— — —	A, C
r, s	— — —	A, B, C
r, t	— — —	A, C
s, t	— — —	A, C, e
p, q, r	— — —	B, D
p, q, s	— — —	B
p, r, s	— — —	B, D
p, r, t	— — —	D
q, r, s	— — —	A, B, C
q, r, t	— — —	A, C
q, s, t	— — —	A, C
r, s, t	— — —	A, C
p, q, r, s	— — —	B
p, q, s, t	—	erit $y^6 * * + r y^3 * * + v$ ∞ o, & z ∞ yy.
q, r, s, t	— — —	A
p, q, r, s, t	—	erit $y^6 * * * * * + v$ ∞ o, & z ∞ yy.

1. Pro A, vel B, vel C assumere licet, vel unam æquationum juxta positarum, quam libuerit, quærendo ejus tantùm ope valorem ipsius y, vel z; vel duas eandem quantitatem incognitam habentes, quærendoque, ut superiùs ostensum est, earum communem divisorem, qui, aut unius, aut plurium futurus est dimensionum. si unius, habebitur quæsitus valor ipsius y vel z; si plurium, eundem ex hoc communi divisore investigare oportet.

2. Si primò per capitales sive majusculas A, B, C, D explorare velimus, reliquæ e, f, g non sunt necessariæ; sed non vice versâ.

Exempli gratiâ, proponatur

$$\begin{array}{l} x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 3xx - 13x - 5 \infty 0. \\ \quad\;\; p \qquad\; q \qquad\; r \qquad\;\; s \qquad\;\; t \qquad\; v \end{array}$$

Cum nullus terminus hîc deficiat, examinanda est æquatio per A, B, C, e, f, g. & quidem per omnes, si à minusculis g, f, e incipiamus, si autem à capitalibus, erunt minusculæ insuper habendæ. Incipiamus igitur à capitalibus, ac primùm ab A, pro qua itaque sumere licet æquationem

$$zz \begin{array}{l} -{}^{2}q \\ -pp \\ +\frac{r}{p} \\ \end{array} z \begin{array}{l} +ppq \\ -rp \\ +s \\ -\frac{t}{p} \end{array} \infty 0, \quad \text{(divisa per } 2)$$

vel

$$zz \begin{array}{l} -\frac{t}{p} \\ -s \\ +rp \\ -ppq \\ \hline \frac{r}{p}+pp \end{array} z + 2v \infty 0,$$

vel utramque.

Si primam sumamus, obtinebitur pro ipsa (quoniam $p \infty 2$, $q \infty -3$, $r \infty 7$, $s \infty -3$, $t \infty -13$, & $v \infty -5$) $2zz + 5\frac{1}{2}z - 22\frac{1}{2} \infty 0$; sin alteram, obtinebitur $7\frac{1}{2}zz + 35\frac{1}{2}z - 10 \infty 0$, quarum communis divisor est $z + 5 \infty 0$. Quoniam autem

$y \infty p$

$y \infty p \infty 2$, dividendum est per $xx + yx + z \infty 0 \infty xx + 2x - 5 \infty 0$, invenieturque pro quotiente $x^4 * + 2xx + 3x + 1 \infty 0$. Et manifestum est, nos etiam alterutra tantùm duarum illarum æquationum uti potuisse. Facilior itaque via eligenda erit: non enim semper illa per communem divisorem brevior est, neque semper longior; verùm hanc habet prærogativam, quæ sanè non parva est, quòd inutiles radices abscindat. Quemadmodum sequenti exemplo clariùs patebit.

Esto æquatio Proposita $x^6 * - 2x^4 + 3x^3 - 3xx - 5x - 1 \infty 0$. Quoniam hîc p est $\infty 0$, reductio tentanda erit per B, D, g. Incipiendo à B, invenietur pro $1^{mâ}$

$$\begin{array}{l} y^3 - p\,yy + q\,y - r \infty 0, \\ \quad\;\; - \frac{2v}{t} \quad + \frac{pv}{t} \end{array}$$

hæc æquatio $y^3 - \frac{2}{5}yy - 2y - 3 \infty 0$; & pro $2^{dâ}$

$$\begin{array}{l} yy - \frac{qt}{v}\,y + \frac{t^4}{v^3} \infty 0, \\ \qquad\;\; - p \quad + \frac{rt}{v} \\ \qquad\;\; + \frac{rtt}{vv} \\ \qquad\;\; - \frac{t^3 s}{v^3} \\ \hline \qquad\qquad 2 \end{array}$$

hæc $yy + 230y - 305 \infty 0$: est enim in hoc exemplo $q \infty - 2$, $r \infty 3$, $s \infty - 3$, $t \infty - 5$, & $v \infty - 1$. Unde, quærendo earum communem divisorem, comperietur nullum dari, ac proinde divisionem per B fieri non posse. Hinc transeo ad D, ubi pro $1^{mâ}$ æquatione

$$\begin{array}{l} qy^3 * + s\,y - t \infty 0 \\ \quad\;\; + qq \;\; + rq \end{array}$$

invenio $-2y^3 * + 1y - 1 \infty 0$, & pro $2^{dâ}$

$$\begin{array}{l} sy^4 - ty^3 + 2qs\,yy - tqy + qqs \infty 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - vq \end{array}$$

invenio $-3y^4 + 5y^3 + 12yy - 10y - 14 \infty 0$. Quarum æquationum divisor communis est $y + 1 \infty 0$; adeoque $z \infty yy + q \infty - 1$; ita ut divisio sit facienda per $xx + yx + z \infty 0 \infty xx - 1x - 1$, eritque quotiens $x^4 + 1x^3 * + 4x + 1 \infty 0$.

Ubi notandum, modum hunc quærendi communem divisorem in altioribus præsertim æquationibus permagni esse usus, non autem tanti usus, cùm æquationes, quarum divisor communis investigandus est, solummodo sunt 2 dimensionum, aut etiam trium, quoniam tum divisores faciles sunt inventu. Ut in

 æqua-

æquatione ſuperiori $-2y^3 * + 1y - 1 \infty 0$, ubi protinus apparet y eſſe $\infty - 1$, adeoque ſi ipſa dividatur per $y + 1 \infty 0$, obtinebitur $-2yy + 2y - 1 \infty 0$. Cujus radices quoniam ſunt impoſſibiles, ſolùm ſupereſt $y \infty - 1$; adeò ut diviſio æquationis Propoſitæ tentanda ſit per $xx - 1x - 1 \infty 0$.

Sic & ſi habeatur æquatio $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2xx + 1x + 1 \infty 0$, comperietur ejus diviſionem fieri poſſe beneficio æquationum juxta B, ubi pro una invenitur $2yy - 5y + 3 \infty 0$, & pro altera $y^3 - 4yy + 5y - 2 \infty 0$, & pro communi diviſore $y - 1 \infty 0$. Et quoniam z eſt $\infty \frac{yv}{t} \infty 1$, erit $xx + yx + z \infty 0 \infty xx + 1x + 1 \infty 0$. Per quam igitur ſi Propoſita æquatio dividatur, fiet pro quotiente $x^4 + 1x^3 + 1xx * + 1 \infty 0$.

Si autem detur æquatio $x^6 + 2x^5 + 2x^4 * + 1xx + 14x + 2 \infty 0$, in qua r eſt 0, oportet ipſam examinare per A, B, & C. Incipiendo autem ab A, loco æquationis

$$zz \; \frac{\begin{array}{l} -2q \\ -pp \\ +\frac{r}{p} \\ \end{array}}{2} \; z \begin{array}{l} +ppq \infty 0 \\ -rp \\ +s \\ -\frac{t}{p} \end{array}$$

invenitur $zz - 4z + 1 \infty 0$; & loco æquationis

$$zz - \frac{t}{p} z + \frac{\begin{array}{l} 2v \infty 0 \\ -s \\ +rp \\ -ppq \end{array}}{\frac{r}{p} + pp}$$

invenitur eadem $zz - 4z + 1 \infty 0$. Ex qua, quia utriuſque communis diviſor eſt, radices invenire oportet, quæ ſunt $z \infty 2 + \sqrt{3}$, & $z \infty 2 - \sqrt{3}$. Unde cum y ſit ∞p, hoc eſt, 2, pro $xx + yx + z \infty 0$ obtinebuntur hæ duæ $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \infty 0$, & $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} \infty 0$. Per quas igitur ſi Propoſita æquatio diviſa fuerit, comperietur ipſam produci poſſe multiplicatione harum trium $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \infty 0$, $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} \infty 0$, & $xx - 2x + 2 \infty 0$.

5

5ta Pars.

Si æquatio aliqua 6 dimensionum produci possit multiplicatione duarum aliarum, quæ singulæ 3 dimensiones habeant, in quarum alterutra unus pluresve termini sint ∞ 0; erit ipsa divisibilis vel per æquationem tantùm 2 terminorum, juxta 2dam partem, vel per æquationem $x^3 + y\,xx + z\,x + w \infty 0$, in qua tantùm alterutra vel y vel z est ∞ 0; quarumque y, z, & w valores inveniuntur per sequentes æquationes.

Æquationem Propositam, sive in ea aliquis terminus deficiat, sive non, sic designabo: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \infty 0$; ubi p denotat quantitatem cognitam 2di termini, vel 0, si is deficiat; q quantitatem cognitam 3tii termini, vel 0, si is desit; r quarti termini, &c.

A
$$\begin{array}{llll} 2z^3 & -3q\,zz & -rp\,z & -sq \infty 0 \\ & +pp & +2s & +tp \\ & & +qq & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} +qq\,zz & +4sq\,z & -4ss \infty 0 \\ +p^4 & -3pqr & -4ppv \\ -4s & -2pps & +4psr \\ +2pr & +2tp & +sqq \\ & -q^3 & -ptq \\ & -rp^3 & -sqpp \\ & +qqpp & +tp^3 \end{array} \qquad w \infty \frac{s + zz - qz}{p} \qquad y \infty 0.$$

B
$$\begin{array}{lllll} y^4 & -\frac{qt}{v}y^3 & +\frac{pqt}{v}yy & -\frac{st}{v}y & -qq \infty 0 \\ & -p & & +qp & -\frac{tt}{v} \\ & & & -\frac{qqt}{v} & +\frac{rtq}{v} \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} y^4 & -2p\,y^3 & +q\,yy & -r\,y & +pr \infty 0 \\ & +\frac{2v}{t} & +pp & -pq & -s \\ & & -\frac{3pv}{t} & +\frac{2qv}{t} & -\frac{pqv}{t} \\ & & & +\frac{ppv}{t} & \end{array}$$

$$w \infty \frac{t}{q - py + yy}$$

$z \infty 0.$

C $zz - qz + s \infty 0$ $\quad ww - rw + v \infty 0$ $\quad y \infty 0.$

D $yy - py + q \infty 0$ $\quad ww - rw + v \infty 0$ $\quad z \infty 0.$

e $z \infty q$ $\quad w \infty \frac{s}{p}$ $\quad y \infty 0.$

f $y \infty p$ $\quad w \infty \frac{t}{q}$ $\quad z \infty 0.$

Quan-

Quando nulli termini in æquatione Proposita sunt ꝏ o, illa dividi poterit per aliquam harum A, B, e, f.

Quando est *p* ꝏ o ...	per	aliquam	harum	C, B
q	—	—	—	A, B
r	—	—	—	A, B, e, f
ſ	—	—	—	A, B
t	—	—	—	A, D
p, *q*	—	—	—	C, B
p, *r*	—	—	—	C, B
p, *ſ*	—	—	—	B
p, *t*	—	—	—	C, D
q, *r*	—	—	—	A, B
q, *ſ*	—	—	—	A, B
q, *t*	—	—	—	A
r, *ſ*	—	—	—	A, B
r, *t*	—	—	—	A, D
ſ, *t*	—	—	—	A, D
p, *q*, *r*	—	—	—	C, B
p, *q*, *ſ*	—	—	—	B
p, *q*, *t*	—	—	—	C
p, *r*, *ſ*	—	—	—	B
p, *r*, *t*	—	—	—	C, D
p, *ſ*, *t*	—	—	—	D
q, *r*, *ſ*	—	—	—	A, B
q, *r*, *t*	—	—	—	A
q, *ſ*, *t*	—	—	—	A
r, *ſ*, *t*	—	—	—	A, D
p, *q*, *r*, *ſ*	—	—	—	B
q, *r*, *ſ*, *t*	—	—	—	A.

1. Pro A vel B aſſumere licet vel unam æquationum juxta poſitarum, quam libuerit, quærendo ejus tantùm ope valorem ipſius *y*, vel *z*; vel duas, eandem incogni-

cognitam quantitatem habentes, quærendoque per earum communem diviſorem valores ipſius y vel z, eodem modo quo in Parte 4ta dictum eſt.

2. Si primò per capitales A, B examen fiat, tum examen per reliquas e & f ſuperfluum habendum eſt, ſed non vice versâ.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio

$$x^6 + 1x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 5xx + 11x + 6 \infty 0.$$

Quoniam nulli termini deſunt, Reductio erit tentanda per A, B, e, f; incipiendoque à minuſculis, ac primùm ab e, habebitur $z \infty q \infty 4$, & $w \infty \frac{s}{p} \infty 5$, adeoque pro $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$, fiet $x^3 * + 4x + 5 \infty 0$. Cum verò Propoſita æquatio per hanc dividi nequeat, tranſeo ad f, obtineoque $y \infty p \infty 1$; $w \infty \frac{t}{q} \infty \frac{11}{4}$; $z \infty 0$; & in locum $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$ obtineo $x^3 + 1xx * + \frac{11}{4} \infty 0$. Et cum Propoſita per hanc quoque non diviſibilis exiſtat, tranſeo ad A, & pro $\begin{array}{llll} 2z^3 & -3qzz & -rpz & -sq \infty 0 \\ & +pp & +2s & +tp \\ & & +qq & \end{array}$

obtineo $2z^3 - 11zz + 18z - 9 \infty 0$, cujus radices ſunt $+3$, $+1$, & $+1\frac{1}{2}$. Quia autem omnes hæ radices ſunt rationales, ac æquatio Propoſita fractis numeris caret, non poterit nobis hæc ultima radix inſervire. Unde explorandum tantùm reſtat per $z \infty 3$, & $z \infty 1$. Sumendo autem $z \infty 1$, reperitur diviſionem fieri non poſſe, ac idcirco ſi ſumatur $z \infty 3$, fiet $w \infty \frac{s + zz - qz}{p} \infty 2$. Quoniam verò y eſt $\infty 0$, pro $x^3 + yxx + zx + w \infty 0$ obtinebitur $x^3 * + 3x + 2 \infty 0$, per quam ſi diviſio Propoſitæ tentetur, comperietur ipſam fieri poſſe, atque oriri $x^3 + 1xx + 1x + 3 \infty 0$. Sed loco 1mæ æquationis juxta A ſumere potuiſſemus 2dam, unâ dimenſione depreſſiorem, pro qua obtinuiſſemus $13zz - 60z + 63 \infty 0$. Quæ unam tantùm radicem rationalem abſolutam admittit, quæ, ut ſupra, eſt $+3$.

Et notandum, quòd, inventis duabus æquationibus, (quæ ſemper, ſi per communem diviſorem Quæſitum obtinere velimus, inveniri debent;) quæri poteſt radix alterutrius æquationis, ſi nempe ea facilis ſit inventu, atque explorari, num & altera æqua-

tio dictam radicem admittat: Quo sæpe non nihil laboris abscindi potest.

Priusquam huic XI Regulæ finem imponam, adjungam, quòd, eodem modo, quo hæ Regulæ inventæ sunt, & reliquæ altiorum æquationum inveniri possint; uti & multæ, ne dicam infinitæ aliæ ad æquationes 6, & pauciorum dimensionum, quarum aliquot ex facilioribus indicare volui, prætermittens nonnullas, non quidem admodum difficiles, sed quæ determinationem aliquam involvebant. Ut in 1ma Parte, ubi æquationi $x^6, p\,x^5, q\,x^4, * \, s\,x\,x, t\,x, v \propto 0$, loco divisoris $x + \frac{1}{2}p \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$, adjungere potuissem divisorem $x - \frac{v - qs}{ps - t} \propto 0$: quem, cum determinationem involvat, (siquidem $x + 3 \propto 0$, divisor æquationis $x^6 + 5x^5 + 6x^4 * + 5xx + 25x + 30 \propto 0$, per illum inveniri nequit:) omittendum duxi, præferendo ei alterum $x + \frac{1}{2}p \; 8 \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$, qui determinationi nulli obnoxius est.

Denique, usus hujus XI Regulæ se longè lateque extendit, quod nemo facilè negaverit, qui modò viderit, non necesse esse, vel fractiones, vel cognitas quantitates surdas priùs ex æquatione tolli; & quot modis una eademque æquatio, præsertim valde composita, & multarum dimensionum, ex multiplicatione duarum aliarum produci queat; tumque inter omnes illas ex quibus produci possit, tantùm unam requiri, in qua unus pluresve termini deficiant, ut Reductio per has Regulas inveniatur.

SEQUENTES 12, 13, 14, 15 REGULÆ SE EXTENDUNT AD ÆQUATIONES, IN QUIBUS NEC SIGNA RADICALIA, NEC LITERALES FRACTIONES INVENIUNTUR.

XII REGULA.

Si in æquatione Proposita reperiatur litera cognita, *quæ in ultimo Termino non contineatur*; si illa non nisi semel in æquatione extet, vel semel tantùm reperiatur secundùm eundem dimensionum numerum, (ut in Æquatione

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -2ax^3 & +aaxx & -2abbx & +aabb & \propto 0, \\ & -2c & +bb & -2acc & & \\ & & +4ac & & & \\ & & -dd & & & \end{array}$$

in

in qua dd ſemel duntaxat reperitur, duas habens dimenſiones) æquatio ſemper indiviſibilis erit per x, aut xx, &c. + vel − quantitate quâvis cognitâ atque rationali.

XIII REGULA.

Si pluries in æquatione Propoſita reperiatur litera cognita, *quæ in ultimo termino non continentur*; ſi illa ubique eodem ſigno + vel − ſit adfecta, ac per incognitam quantitatem, impares ubique aut ubique pares dimenſiones habentem, multiplicata: æquatio illa ſemper indiviſibilis erit per x + vel −, vel per xx, x^3, &c. − quantitate quâvis cognitâ atque rationali. ut hæc Æquatio

$$\begin{array}{l} x^4 + 4cx^3 - ddxx + 4bbcx + b^4 \infty 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2bbd \end{array}$$

in quâ c bis *tantùm* reperitur adfecta ſigno +, ac multiplicata per x unius & trium dimenſionum. aut hæc

$$\begin{array}{llllll} x^6 - a & x^5 + cf & x^4 - c^3 & x^3 - c^4 & xx - ddcca & x + c^3d^3 \infty 0, \\ \quad + b & \quad - dd & \quad - add & \quad + ddff & \quad + d^3bb & \end{array}$$

ubi a ter invenitur adfecta ubique ſigno −; aut b bis ſigno +; ac ducta utraque in x, ubique habentem dimenſiones impares: aut in quâ etiam f bis reperitur adfecta ſigno +, ac ducta in x, ubique pares dimenſiones habentem.

XIV REGULA.

Si in æquatione Propoſita reperiatur litera cognita, *quæ in nullo alio quàm in ultimo termino contineatur*; ſi ejus dimenſionum numerus ſit minor numero dimenſionum incognitæ quantitatis, ad ſummum conſiderato, (ut in hac

$$\begin{array}{llll} x^6 - bbx^4 + b^3c & xx + bcd^4 & \infty 0, \\ \qquad\quad - bbcc & \quad + 2bd^5 & \end{array}$$

in qua

d tan-

d tantùm in ultimo termino continetur, habens ad summum 5, & x plures, nimirum 6 dimensiones) certum est illam æquationem per $x +$ vel $-$ quantitate quâvis rationali atque cognitâ esse indivisibilem; Si ejus dimensionum numerus sit minor semisse numeri dimensionum incognitæ quantitatis, ad summum considerati, (ut in eodem exemplo, si loco ultimi termini $bcd^4 + 2bd^5$ ponatur $bc^3dd + 2b^5d$) certum est illam æquationem per $xx +$ vel $-$ quantitate quâvis rationali atque cognitâ indivisibilem existere. Si ejus dimensionum numerus sit minor triente numeri dimensionum incognitæ quantitatis, ad summum considerati, certum est illam æquationem per $x^3 +$ vel $-$ &c. non posse dividi. atque ita porrò in infinitum.

XV REGULA.

Si in æquatione Proposita litera cognita reperiatur, quæ in ultimo termino non continetur, *atque ea divisibilis sit per x, xx, x^3, &c. $+$ vel $-$ aliquâ quantitate rationali & cognitâ; facile erit beneficio alterius æquationis dictum divisorem invenire.*

Ut in hac æquatione

$$x^5 - fx^4 + \begin{matrix} bf \\ +1\tfrac{1}{2}bc \end{matrix} x^3 - 16bcdxx + \begin{matrix} \tfrac{1}{2}bbcf \\ -\tfrac{1}{2}bcf \end{matrix} x - 8ccdbb \propto 0$$

in quâ f in ultimo termino non continetur, *opus tantùm est, ut omnes quantitates, in quibus f æquè multas habet dimensiones nihilo æquales ponantur, atque porrò investigetur utriusque, inventæ scilicet atque Propositæ æquationis, communis divisor.* Quocirca posito $-fx^4 + bfx^3 - \frac{1}{2}bcfxx + \frac{1}{2}bbcfx \propto 0$, seu $-x^3 + bxx - \frac{1}{2}bcx + \frac{1}{2}bbc \propto 0$, invenitur, secundùm Methodum ante descriptam, pro earum communi divisore $xx + \frac{1}{2}bc \propto 0$.

Sic

Sic etiam si proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -ax^3 & +aaxx & +c^3x & -bc^3 & \infty\, 0 \\ & -b & +ab & -baa & +c^4 & \\ & +c & -ac & +aac & & \end{array}$$

in qua a in ultimo termino non continetur; posito $-ax^3 + abxx \infty 0$, erit $x - b + c \infty 0$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - ac$

Divisio itaque tentanda est per $x - b + c \infty 0$; quoniam nullus præter hunc communis divisor haberi potest. Eundem Divisorem obtinuissemus si quantitates omnes ubi a est duarum dimensionum posuissemus $\infty 0$. Notandum est in his 12, 13, 14 & 15 Regulis, non opùs esse, ut literales Fractiones semper priùs ex æquationibus auferantur: Nam si contingat, his Fractionibus sublatis, literam, de qua ibi agitur, nihilominus tamen in ultimo Termino tantùm inveniri, quemadmodum in Regula 14 requiritur; vel illâ ablatione factâ in ultimo Termino non inveniri, quod in tribus aliis requiritur; ablatio talium Fractionum necessaria non est.

SEQVENTES 16, 17, 18, 19, ET 20 REGVLÆ SE EXTENDVNT AD ÆQVATIONES, VBI NEC SIGNA RADICALIA, NEC FRACTIONES LITERALES VEL NVMERALES INVENIVNTVR.

Hucusque perinde est, an Propositæ æquationis omnia membra, sive terminorum partes separatæ per signum + vel — junctæ eundem habeant dimensionum numerum vel secus: In his sequentibus verò 16, 17, 18, 19, & 20 Regulis considerabo, brevitatis causâ, ejusmodi tantùm æquationes, quarum omnia Membra habent eundem numerum dimensionum; potest enim omnis æquatio, hanc conditionem non habens, facilè in talem permutari, ut cuique notum est.

Quomodo omnia radicalia signa ex æquatione tolli possint, jam antea ostendi. Quomodo verò omnes Fractiones tolli queant, nihil difficultatis habet, & satis à Dno des Cartes monstratum est in Fractionibus numeralibus, quod etiam eodem modo in literalibus locum habet. Sed cum in his Regulis sequentibus divisores rationales ultimi Termini necessariò sciri debeant, præmittam

Modum inveniendi omnes rationales Divisores ultimi Termini surdis & Fractionibus carentis.

Ultimus Terminus æquationis Propositæ aut ex *uno* aut ex *pluribus Membris* seu quantitatibus, per + & — junctis constabit. Si *unius tantùm Membri* sit, notum est quâ ratione ipsius divisores inveniantur. Quòd si autem ex *pluribus Membris* constiterit, sæpenumero difficile est eos omnes reperire. Hinc ad eos inveniendos, considero seorsim ultimum Terminum æquationis Propositæ, supponendo ipsum ∞ o, atque pro lubitu eligo aliquam ex literis, quam pro incognita quantitate hujus fictæ æquationis habeo, cujus respectu fictam æquationem illam in ordinem redigo.

Exempli gratiâ, ex ultimo Termino hujus æquationis,

$$\begin{array}{llllll} x^4 - 4ax^3 & + 2cc\,xx & - 4acc\,x & + c^4 & & \infty\, 0 \\ & + 7aa & - 4aac & - 4a^4 & & \\ & + 2ac & - 6a^3 & + 8a^3c & & \\ & & & + 2ac^3 & & \\ & & & + 3aacc & & \end{array}$$

sumendo literam c pro incognita quantitate, invenio æquationem hanc $c^4 + 2ac^3 + 3aacc + 8a^3c - 4a^4 \infty 0$.

Deinde inquiro per antecedentes vel sequentes Regulas utrum hæc Ficta per aliam rationalem dividi possit; Si enim hoc fieri nequeat, manifestum est ultimum Terminum æquationis Propositæ nullos quoque divisores rationales admittere (nisi unitatem atque ipsum ultimum Terminum integrum inter divisores numerare velimus; sed hi in æquationibus literalibus, ubi omnes quantitates eundem dimensionum numerum habent, nullius usus sunt); Quòd si verò dividi possit, oportet rursus eodem modo quærere divisores hujus divisoris & quotientis, atque ita evidens erit, quo pacto omnes rationales æquationes, quæ hanc Fi-

ctam

ctam æquationem dividere possunt, inveniri queant, quæ quidem æquationes tunc futuræ sunt quæsiti divisores ultimi Termini æquationis Propositæ.

Per præcedentes autem uti & per sequentes Regulas omnes divisores hujus Fictæ æquationis, non cognitis ejus divisoribus ultimi Termini, ut plurimùm facillimo negotio inveniri poterunt. imo perpaucæ æquationes occurrunt, quarum divisores ultimi Termini non per sequentem 21 Regulam, & dicto modo inveniri possent. Quoniam verò aliquando tales dantur, quarum divisores nec per hanc 21 Reg. nec per aliquam præcedentium obtineri queant; ulteriùs videndum est, num Fictæ æquationis ultimus Terminus, *unum an plura membra* habeat. Si enim *unum tantùm membrum* habuerit, quemadmodum in hoc exemplo, in quo ultimus Terminus est $-4a^4$, notum est quo pacto ejusdem divisores investigare liceat, possuntque deinde eorum ope per sequentes Regulas inveniri æquationes omnes rationales, per quas hæc Ficta divisibilis erit, atque ita habebuntur etiam omnes divisores ultimi Termini æquationis Propositæ, qui requirebantur.

Quòd si verò ultimus Terminus Fictæ æquationis *plurium membrorum* fuerit, tum rursus eundem, ut ante, supponerem ∞ 0, ac iterùm agerem, quemadmodum jam dictum est, donec inveniatur æquatio, vel cujus rationales divisores per aliquam præcedentium, sive per 21 Regulam facillimè inveniuntur; vel cujus ultimus Terminus tantùm *unius membri* existit. & ad alterutrum obtinendum parum temporis requiritur; & alterutro invento, Quæsitum obtineri potest, quoniam tunc per sequentes Regulas inveniri possunt æquationes omnes, ultimam hanc Fictam dividentes; atque ita inventis omnibus divisoribus ultimi Termini proximè ante-

antecedentis Fictæ æquationis possunt denuo per easdem Regulas, ope horum divisorum ultimi Termini, inveniri æquationes omnes, quæ huic proximè antecedentem Fictam dividere queunt, sicque ulteriùs ascendendo obtinebuntur tandem divisores omnes, quicunque fuerint, ultimi Termini Propositæ æquationis, qui inveniendi proponebantur.

Exempli gratiâ, si proponantur inveniendi divisores omnes ultimi Termini hujus æquationis

$$\begin{array}{llll} x^4 * -14aa\ xx & +32aac\ x & +a^4 & \infty 0, \\ \quad +4ac & +4acd & -10aacc & \\ \quad +2cc & -16add & -2accd & \\ \quad +4dd & & +4aadd & \\ \quad +dc & & +4ac^3 & \\ & & +4a^3c & \\ & & +dcaa & \\ & & +24acdd & \\ & & +4ccdd & \\ & & +4cd^3 & \\ & & +c^4 & \\ & & +dc^3 & \end{array}$$

nimirum ope Regularum sequentium, æquationes omnes rationales, per quas aliqua Proposita dividi potest, detegentium beneficio divisorum ultimi Termini: suppono ejus ultimum Terminum $\infty 0$, atque unam ex ipsius literis considero ceu incognitam quantitatem, ut puta a, obtineoque æquationem in ordinem redactam,

$$\begin{array}{lllll} a^4 +4c\,a^3 & -10cc\,aa & -2ccd\,a & +4ccdd & \infty 0. \\ & +4dd & +4c^3 & +4cd^3 & \\ & +dc & +24cdd & +c^4 & \\ & & & +dc^3 & \end{array}$$

Quoniam autem hujus ultimus terminus etiam plura membra habet, suppono ipsum rursus, ut ante, $\infty 0$, sumendoque c pro incognita quantitate, obtineo inde hanc æquationem

$$c^4 + dc^3 + 4ddcc + 4d^3c \infty 0.$$

Quæ divisa per c dat $c^3 + dcc + 4ddc + 4d^3 \infty 0$, quæ est æquatio in qua ultimus Terminus $4d^3$ tantùm *unum Membrum* habet.

habet. Conſtat autem quo pacto diviſores hujus ultimi termini inveniantur, qui, poſtquam cogniti erunt, inſervire poterunt, ut eorundem ope per ſequentes Regulas quærantur æquationes omnes rationales, hanc ultimam Fictam $c^3 + dcc + 4ddc + 4d^3 \infty 0$. dividentes; ac proinde etiam æquationes, quæ $c^4 + dc^3 + 4ddcc + 4d^3c \infty 0$ dividere poſſunt, quæ quidem eſt ultimus Terminus Fictæ æquationis proximè præcedentis

$$\begin{array}{lllll} a^4 + 4ca^3 & -10cc\,aa & -2ccd\,a & +4ccdd & \infty\, 0. \\ & +4dd & +4c^3 & +4cd^3 & \\ & +dc & +24cdd & +c^4 & \\ & & & +dc^3 & \end{array}$$

Inventis verò diviſoribus omnibus ultimi hujus æquationis Termini, poſſunt denuo per eaſdem Regulas inveniri omnes æquationes rationales hanc ipſam dividentes; quibus cognitis inventum eſt, quod quærebatur, cum æquatio hæc Ficta ultimus ſit Propoſitæ æquationis Terminus.

Hinc liquet per ſolam ſequentem XVII Regulam ſemper omnes diviſores ultimi Termini inveniri poſſe: ſed, quoniam per præcedentes uti & per reliquas ſequentes Regulas ſæpe primo intuitu cernitur tales diviſores non dari, ſi non dentur, & ii qui dantur ſæpe minori labore inveniuntur, poterunt & hæ Regulæ magno cum fructu adhiberi.

XVI REGULA,

Quæ modum docet inveniendi omnes æquationes rationales, duos tantùm Terminos habentes, quibus æquatio quævis rationalis & Fractione carens, ſive literalis ſive numeralis ſit, dividi poſſit.

Fiat alia æquatio pro libitu ex duabus aut pluribus quantitatibus, aut etiam terminis Propoſitæ æquationis; atque juxta hanc ſuppoſitionem inveniatur valor ipſius x; vel ſumatur tantùm aliquis valor pro x, ut libet. Deinde ſubſtituto hoc valore Ficto ipſius x, vel eo quem ex æquatione Ficta invenimus, ubique in locum ipſius x æquationis Propoſitæ: Si termini ſe mutuò de-

ſtruere reperiantur, erit Propoſita æquatio diviſibilis per x — hoc Ficto valore ∞ 0; ſi autem hi termini ſe mutuò non deſtruant, quærantur diviſores aggregati horum omnium terminorum (quod quidem aggregatum, ut ab ultimo termino æquationis diſtinguatur, in poſterum vocabo *Terminum Fictum*); atque ab unoquoque diviſore unius dimenſionis auferatur valor Fictus ipſius x, at ab unoquoque diviſore duarum dimenſionum auferatur ejuſdem valoris quadratum, & ſic deinceps. Quo peracto, videndum erit num aliqua horum reliquorum conſentiant cum diviſoribus ultimi Termini æquationis Propoſitæ; ſi enim nulla eorum cum iis conſentiant, indicio eſt æquationem Propoſitam per aliam duos tantùm Terminos habentem, ſeu per x, aut xx, &c. + vel — quantitate quâvis cognitâ atque rationali non eſſe diviſibilem: Si verò aliqua conſentiant, oportet, facto unoquoque conſentiente + x earundem dimenſionum, ∞ 0, explorare per quam harum æquationum æquatio Propoſita dividi poſſit; ſi enim per nullam ipſarum diviſibilis ſit, erit quoque Propoſita per x, aut xx, &c. + vel — quâvis quantitate cognitâ atque rationali indiviſibilis. Quæ quidem omnia ſequenti exemplo clariora evadent.

Ut ad inveſtigandos diviſores, ſi qui ſint, hujus æquationis $x^3 - 21axx \begin{smallmatrix}-bb\\+20aa\end{smallmatrix} x + 20abb \infty 0$, ſuppono $x^3 \infty 21axx$, vel $bbx \infty 20abb$, vel ad libitum quemlibet pro x valorem aſſumo, utputa a vel b: ſed aſſumamus $x^3 \infty 21axx$, ſive $x \infty 21a$. Deinde ſubrogando $21a$ ubique in locum x in æquatione Propoſita $x^3 - 21axx \begin{smallmatrix}-bb\\+20aa\end{smallmatrix} x + 20abb \infty 0$ (rejiciendo brevitatis causâ terminos, ex quibus æquatio Ficta eſt conflata, cum ipſi, dum nihilo ſunt æquales poſiti, neceſſariò evaneſcant) obtineo pro terminorum omnium aggregato $- 21abb + 21 . 20a^3$

$20a^3 + 20abb$, vel $-abb + 21, 20a^3$, quod quidem aggregatum voco *Fictum Terminum*, cujus divisores hi quatuor existunt $+a$, & $-a$; $-bb + 21, 20aa$, & $+bb - 21, 20aa$. Porrò subducto hoc Ficto valore $21a$ ab utroque priorum; & ab utroque duorum sequentium ejusdem valoris quadrato, (quoniam ipsi duarum sunt dimensionum;) relinquentur $-20a$, $-22a$; $-bb - 21aa$, $bb - 41, 21aa$. Quo peracto, si videatur num aliqua horum Reliquorum consentiant cum divisoribus ultimi Termini $+20abb$ æquationis Propositæ, comperietur solummodo $-20a$ consentire. Quocirca ad $-20a$ additâ x unius dimensionis, siquidem $-20a$ unius tantùm dimensionis existit, explorandum duntaxat restat num æquatio Proposita dividi possit per $x - 20a$. quod, si non contingat, erit ea per x, aut xx, $+$ vel $-$ quâvis aliâ quantitate cognitâ atque rationali indivisibilis, quemadmodum quoque si nulli divisores congruentes reperti fuissent. at verò hæc æquatio dividi poterit per $x - 20a$, orieturque pro quotiente $xx - ax - bb \propto 0$.

Hîc autem quædam consideranda veniunt, quæ breviter saltem indicabo.

1. Per hanc viam omnes æquationes duorum terminorum, quibus æquatio Proposita dividi possit, eâdem operâ inveniuntur.

2. In formanda nova æquatione, aut cùm ipsi x affingitur aliquis valor, observandum est, eum brevitatis causâ ita fingi posse, ut ipso in locum x subrogato resultet inde tale quantitatum aggregatum seu *Fictus Terminus*, cujus divisores faciles sint inventu, ac pauci numero. id quod communiter levi negotio obtineri potest.

3. Sæpenumero supervacaneum est, ut omnes divisores ultimi Termini æquationis Propositæ quærantur; ut in superiore exemplo videre est, ubi quæ restabant Reliqua, ex divisoribus Ficti Termini & ex assumpto valore ipsius x & xx facta, hæc erant quatuor $-20a$, $-22a$, $-bb - 21aa$, $+bb - 41, 21aa$, quorum duo posteriora non possunt congruere cum divisoribus ultimi Termini $20abb$ æquationis Propositæ, *cum duo Membra habeant, atque hic terminus tantùm unum.* deinde apparet etiam, quòd $22a$ divisor esse non possit ipsius $20abb$, *quoniam numerus 22 major est numero 20*; atque eapropter considerare tantùm oportet

— 20 a, ita ut solummodo inquirendum sit num ultimus Terminus 20 abb divisibilis sit per — 20 a. Possumus quoque eodem modo, quando divisores ultimi Termini æquationis Propositæ cogniti sunt, invenire divisores omnes *Ficti Termini*, qui nobis inservire queunt, reliquis qui inutiles sunt prætermissis. Quin imò in multis casubus, præsertim cùm æquatio indivisibilis est, parcere possumus labori, qui in quærendis divisoribus tam ultimi Termini æquationis Propositæ quàm *Ficti Termini* esset impendendus; si modò ipsos inter se comparaverimus, quod modicâ experientiâ longè clariùs, quàm multis verbis patescet.

4. Si fortè contingat ut divisores Congruentes multi adhuc numero existant, ita ut etiamnum nimis laboriosum foret omnibus istis divisoribus divisionem æquationis Propositæ tentare, poterimus aliam æquationem fingendo aut ipsi x alium valorem assignando rursus operari, &, ut ante, *Reliqua* (quæ singulis divisoribus hujus ultimi Ficti termini, — ultimò ipsius x, aut xx, &c. fictis valoribus sunt æqualia, quemadmodum in Regula fuit dictum,) cum jam inventis Congruentibus comparare, & iterum congruentes, si qui sint, eligere; si verò nulli reperiantur, argumentum est æquationem per x, aut xx, &c. + vel — quâvis quantitate cognitâ atque rationali esse indivisibilem. Et si adhuc nimis multi fuerint, eodem modo denuo quidam rescindi possunt. Sed hoc raró accidit in æquationibus literalibus.

5. Si æquatio Proposita Fractionibus carens sit divisibilis per aliam æquationem rationalem, duos tantùm Terminos habentem, non opùs est, ad inveniendum hunc divisorem, omnia signa radicàlia ex Proposita æquatione auferre, sed ea solummodo, quæ in ultimo Termino reperiuntur.

Potest etiam hac Regula XVI *dividi in duas partes, hoc modo*:

Inquire primùm num Proposita æquatio sit divisibilis per aliam in qua unus pluresve termini desunt, secundùm XI Regulam; Si non sit, tantùm secundùm jam descriptam XVI Regulam inquirendum est, num sit divisibilis per x + vel — aliquo divisore ultimi Termini,

mini, omiſſis omnibus reliquis diviſoribus duarum pluriúmve dimenſionum.

XVII REGULA,

Quæ docet modum inveniendi omnes æquationes rationales, quibus æquatio quævis rationalis & Fractione carens, ſive literalis, ſive numeralis ſit, dividi póſſit.

Æquatio talis erit diviſibilis per aliam rationalem fractione carentem, in qua vel unus pluréſve termini deficiunt, vel nullus. Primò itaque inquirendum eſt per XI Regulam, num per rationalem fractione carentem, in qua unus pluréſve termini deficiant, dividi poſſit; ſi comperiatur id fieri non poſſe, erit ea diviſibilis per æquationem nullo termino carentem, & quidem unius dimenſionis, ſi Propoſita ſit 3 dimenſionum; vel per aliquam unius vel duarum dimenſionum, ſi Propoſita ſit 4 vel 5 dimenſionum; vel per aliquam 1, 2, 3, ſi Propoſita ſit 6 vel 7 dimenſionum; vel per aliquam 1, 2, 3 vel 4 dimenſionum, ſi Propoſita habeat 8 vel 9 dimenſiones; & ſic in infinitum.

Modum verò inquirendi an ea diviſibilis ſit per æquationem ſimplicem ſive unius dimenſionis, antea oſtendi: unde ſolummodo reſtat, quo modo reliqui diviſores, ſeu æquationes duarum, trium, &c. dimenſionum inveniri queant.

Et ſciendum, me quantitatem cognitam 2^di^ termini, adfectam ſuis ſignis + & — vocare p; 3^tii^ termini q; 4^ti^ r; 5^ti^ $ſ$; 6^ti^ t; 7^mi^ v: at diviſorem ultimi termini, ſimiliter ſignis ſuis adfectum, b.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 4^or^ DIMENSIONUM.

Si æquatio Propoſita diviſibilis ſit per æquationem

rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat; erit ea divisibilis per

$$xx + \frac{\frac{r - bp}{s}}{\frac{s}{b} - b} x + b \infty 0.$$

Excepto tantùm, cùm $\frac{s}{b}$ est $\infty\, b$, ac simul $r \infty bp$, id est, $b \infty 8 \surd s$, & $b \infty \frac{r}{p}$, tunc enim divisibilis erit per

$$xx + \tfrac{1}{2} p \, 8 \surd \overline{\tfrac{1}{4} pp + {}^{2} b - q} \text{ in } x, + b \infty 0.$$

1. Et cum æquatio Proposita sit liberata ab omnibus fractis & surdis quantitatibus, atque dividi queat per æquationem rationalem: sequitur, $\frac{r - bp}{\frac{s}{b} - b}$ debere integram esse quantitatem rationalem. Patet etiam s nunquam esse posse $\infty\, bb$, nisi s quadratum fuerit, ac r per p dividi possit.

2. Sufficiet etiam illos solùm divisores ultimi Termini qui ipsius $\surd$ Q^{am}. non excedunt considerare, nimirum, si æquatio sit numeralis; sed si sit literalis, opùs tantùm erit divisoribus uti duarum dimensionum, atque ex his semper alterutro tantùm duorum talium, quorum productum constituat ultimum Terminum.

Exempli gratiâ, si proponatur hæc æquatio numeralis $x^4 - 3x^3 + 12xx - 30x - 200 \infty 0$, quæ dividi potest per aliquam rationalem; & si compertum sit ipsam indivisibilem esse per x, + vel − aliquo divisore ultimi Termini, ut & per æquationem 2 dimensionum, in qua aliquis terminus deficit; dividi poterit per hanc $xx + \frac{\frac{r - bp}{s}}{\frac{s}{b} - b} x + b \infty 0$.

Quia igitur hîc p est $\infty - 3$
q, quâ non indigemus in hoc exemplo, prætereo.
$r \quad \infty - 30$
$s \quad \infty - 200$,

hinc

hinc erit $xx + \frac{\frac{r - bp}{s}}{\frac{s}{b} - b} x + b \propto xx + \frac{-30 + 3b}{\frac{-200}{b} - b} x + b \propto 0$.

Sunt autem Divisores ultimi Termini radicem Quadratam non excedentes; seu valores ipsius b, $\propto +1$ vel -1

$+2 \quad -2$
$+4 \quad -4$
$+5 \quad -5$
$+8 \quad -8$
$+10 \quad -10$.

Unde sumendo $b \propto +1$, erit $\frac{-30 + 3b}{-\frac{200}{b} - b}$ fractio, similiterque si sumatur $b \propto -1$; $\propto +2$; $\propto -2$; $\propto +4$; $\propto -4$, & $\propto +5$. At si sumatur $b \propto -5$, obtinebitur -1, ac proinde tentanda erit divisio per $xx - 1x - 5 \propto 0$. Quoniam autem per hanc fieri nequit, transeo ad alium valorem ipsius b, puta $+8$. Sed cum sic rursus prædicta quantitas fractio evaderet; ut & quando pro b assumitur -8, transeo ad $b \propto +10$. Quia verò r fit $\propto bp$, ac idcirco $xx + b \propto 0$, non poterit similiter hic valor nobis inservire; ita ut nobis solùm restet $b \propto -10$. Unde obtinetur æquatio $xx - 2x - 10 \propto 0$, per quam Proposita dividi potest.

Eodem modo, si proponatur æquatio literalis

$$x^4 * \begin{matrix} -bb \\ +2ab \end{matrix} xx \begin{matrix} +4abb \\ -a^3 \\ -4b^3 \\ +aab \end{matrix} x \begin{matrix} -4b^4 \\ +2aabb \end{matrix} \propto 0;$$

Quoniam p est $\propto 0$
$r \quad \propto 4abb - a^3 - 4b^3 + aab$
$s \quad \propto 2aabb - 4b^4$,

erit $xx + \frac{\frac{r - bp}{s}}{\frac{s}{b} - b} x + b \propto xx + \frac{4abb - a^3 - 4b^3 + aab}{\frac{2aabb - 4b^4}{b} - b} x + b \propto 0$.

Divisores ultimi Termini, duas habentes dimensiones, seu valores ipsius b, sunt $+bb$, & $-4bb + 2aa$,
$-bb$, $\quad +4bb - 2aa$,
$+2bb$, $\quad +2bb + aa$,
$-2bb$, $\quad -2bb - aa$.

Quorum tantùm prioribus 4 indigemus, nimirum, $+bb$, $-bb$, $+2bb$,

$+2bb$, $-2bb$: quoniam reliqui per hos multiplicati ultimum Terminum producunt.

Sumendo autem $b \infty + bb$, 2dus terminus erit fractio. Hinc transeundo ad $b \infty + 2bb$, obtinebitur æquatio $xx \begin{smallmatrix}+b\\-a\end{smallmatrix} x + 2bb \infty o$. Per quam Proposita dividi potest, invenitur enim pro quotiente hæc $xx \begin{smallmatrix}+a\\-b\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}-2bb\\+aa\end{smallmatrix} \infty o$.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 5que DIMENSIONUM.

Si æquatio Proposita 5 dimensionum divisibilis sit per æquationem rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus desit; poterit ipsa dividi per æquationem hanc

$$xx - \overline{\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p \; 8 \sqrt{-\overline{\overline{\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p}\,\square^{\text{tè}}. - q + h + \frac{s}{h}}}}\ \text{in}\ x, + h \infty o.$$

Et cum æquatio hæc debeat esse rationalis quæ nullas admittat fractiones; sequitur 2dum terminum debere esse integram quantitatem rationalem.

Exemplum.

Proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^5 * * & +8aab\ xx & +2ab^3\ x & -b^5 \quad \infty o. \\ & -63a^3 & +16a^3b & +a^4b \\ & +8abb & +15aabb & -ab^4 \\ & -b^3 & -b^4 & +a^3bb \\ & & -4a^4 & \end{array}$$

Postquam constat, æquationem hanc dividi non posse per ullam aliam, 2 aut 3 dimensiones habentem, in qua unus aut plures termini deficiunt, nec per x 8 aliquo divisore ultimi termini; erit illa divisibilis per superiorem

$$xx - \overline{\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p \; 8 \sqrt{-\overline{\overline{\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p}\,\square^{\text{tè}}. - q + h + \frac{s}{h}}}}\ \text{in}\ x, + h \infty o.$$

Quan-

Quantitates cognitæ sunt $p \propto 0$

$q \propto 0$

r nullius hîc est usus.

$s \propto 2ab^3 + 16a^3b + 15aabb - b^4 - 4a^4$

$t \propto -b^5 + a^4b - ab^4 + a^3bb$,

& divisores ultimi Termini, duas dimensiones habentes, seu valores ipsius b sunt $\propto ab + bb$, vel $-ab - bb$, vel $bb - aa$, vel $-bb + aa$ vel $ab - bb$, vel $-ab + bb$ vel $aa + ab + bb$, vel $-aa - ab - bb$: hinc si b sumatur $\propto ab + bb$, obtinebitur

$$xx - \frac{\frac{t}{b}}{2b} + \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\overline{-\frac{\frac{t}{b}}{2b} + \tfrac{1}{2}p}\,\square^{t\grave{e}}. - q + b + \frac{s}{b}} \text{ in } x, + b$$

æquale $\begin{array}{l} xx - 4ax + ab \propto 0. \\ \qquad\qquad\;\; + bb \end{array}$ Per quam si tentetur utrum Proposita dividi queat, invenietur divisionem fieri posse, atque pro quotiente oriri

$$\begin{array}{llll} x^3 + 4axx + 16aax - b^3 \propto 0. \\ \qquad\;\; - ab \qquad + a^3 \\ \qquad\;\; - bb \end{array}$$

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 6 DIMENSIONUM.

Si æquatio Proposita 6 dimensionum divisibilis sit per æquationem rationalem, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus desit; erit ipsa divisibilis vel per æquationem 2 dimensionum, vel per aliquam 3 dimensionum. Si divisibilis sit per æquationem rationalem 2 dimensionum, poterit dividi per æquationem $xx + yx + b \propto 0$,

$$\text{existente } y \propto \frac{pb - \frac{t}{b}}{2b - \frac{\frac{2v}{b}}{b}} \pm \sqrt{\frac{\overline{\frac{pb - \frac{t}{b}}{2b - \frac{\frac{2v}{b}}{b}}}\,\square^{t\grave{e}} + s - \frac{v}{b} + bb - qb.}{b - \frac{\frac{v}{b}}{b}}}$$

Si divisibilis sit per æquationem rationalem 3 dimensionum, erit divisibilis

per æquationem $x^3 + yxx + zx + b \infty o$, existente

$$\begin{array}{l} y^3 \dfrac{-\frac{pv}{b}-2pb}{\frac{v}{b}+b}\, yy \dfrac{+ppb-2t}{\frac{v}{b}+b}\, y \dfrac{\overline{-\frac{v}{b}+b}\ \text{in}\ r,\ \overline{-qb+t}\ \text{in}\ p}{\frac{v}{b}+b} \infty o, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +qy \qquad\qquad\quad \frac{v}{b}-b \end{array}$$

$$\& \; z \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r}{2y - p}.$$

Porrò ob eandem rationem atque in præcedentibus Regulis ſequitur y & z debere eſſe integras quantitates rationales.

Atque in hoc ultimo caſu, ubi diviſio per $x^3 + yxx + zx + b \infty o$ tentanda eſt, opùs tantùm eſt uti diviſoribus ultimi Termini qui ejus radicem quadratam non excedunt, nimirum quando æquatio numeralis eſt; at ipsâ literali exiſtente, ſufficit uti diviſoribus 3 dimenſionum, atque ex his duntaxat alterutro duorum talium, quorum productum ultimum Terminum efficit, haud ſecus ac id in præcedenti Regula pro æquationibus 4^or dimenſionum quoque annotatum fuit. Quæ porrò animadverſio locum etiam obtinet in omnibus æquationibus parium dimenſionum, quas dividere tentamus per aliam dimidium præcedentium dimenſionum numerum habentem.

DETERMINATIO 1^mi CASUS.

Cùm $2b - \frac{\frac{2v}{b}}{b}$ eſt ∞o, hoc eſt, $b^3 \infty v$, & $b \infty \sqrt{C.v}$:

erit $y \infty \frac{-s+q\sqrt{C.v}}{p\sqrt{C.v}-\frac{t}{\sqrt{C.v}}}$.

Cùm

Cùm $2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}$ est $\propto 0$, ac simul $p\sqrt{C.v} - \frac{t}{\sqrt{C.v}} \propto 0$, & $-s + q\sqrt{C.v} \propto 0$, hoc est, $h \propto \sqrt{C.v}$, $h \propto \sqrt{\frac{t}{p}}$, & $h \propto \frac{s}{q}$: erit $y^3 - pyy \begin{matrix} + \frac{s}{\sqrt{C.v}} \\ - 3\sqrt{C.v} \end{matrix} y \begin{matrix} + 2p\sqrt{C.v} \\ - r \end{matrix} \propto 0$.

DETERMINATIO 2^di^ CASUS.

Cùm $\frac{v}{h} + h$ est $\propto 0$, erit $yy \begin{matrix} - p \\ + \frac{2t}{ph} \end{matrix} y - \frac{2r}{p} + q - \frac{t}{h} \propto 0$.

Cùm p est $\propto 0$, ac simul $\frac{v}{h} + h \propto 0$, erit $y \propto \frac{rh}{t}$.

Cùm t est $\propto 0$, & $r \propto 0$, ac simul $p \propto 0$, & $\frac{v}{h} + h \propto 0$, erit $y^4 * + 2qyy + 8hy \begin{matrix} + 4s \\ + qq \end{matrix} \propto 0$.

Cùm $2y$ est $\propto p$, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r \propto 0$, erit $z \propto \frac{t + hyy - qh}{\frac{v}{h} - h}$.

Sed cùm determinationes illæ manent, ac simul $\frac{v}{h} - h$ est $\propto 0$, & $t + hyy - qh \propto 0$, erit $z \propto \frac{t}{2\sqrt{v}}\ 8\ \sqrt{\frac{tt}{4v} - s + p\sqrt{v}}$.

Denique in omnibus determinationibus advertendum est, quòd, si reperiatur $2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h} \propto 0$, & $p\sqrt{C.v} - \frac{t}{\sqrt{C.v}} \propto 0$, sed $-s + q\sqrt{C.v}$ non simul esse $\propto 0$; ut & si reperiatur $\frac{v}{h} + h \propto 0$, $p \propto 0$, & $t \propto 0$, sed r non simul $\propto 0$; itemque si reperiatur $2y \propto p$, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r \propto 0$, & $\frac{v}{h} - h \propto 0$, sed $t + hyy - qh$ non simul $\propto 0$;

atque similiter in Regula pro 4^{or} dimensionibus, si $\frac{s}{h} - h$ reperiatur $\propto 0$, sed non perinde $r - hp \propto 0$: quòd tum inquam valor assumptus ipsius h, quò hoc contingit, nobis inservire non possit.

Exempla 1^mi Casus.

Proponatur inquirendum, an hæc æquatio

$$x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 4xx * + 8 \propto 0.$$

dividi possit per æquationem rationalem 2 dimensionum, in qua nulli termini deficiant.

Cum igitur hîc p sit $\propto -3$

$$\begin{array}{lcl} q & \propto & 7 \\ r & \propto & -5 \\ s & \propto & 4 \\ t & \propto & 0 \\ v & \propto & 8, \end{array}$$

$$\text{erit } y \propto \frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}} \pm \sqrt{\frac{ph - \frac{t}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}}\,\square^{t\grave{e}}\,\frac{+s - \frac{v}{h} + hh - qh}{h - \frac{\frac{v}{h}}{h}}}$$

æqualis

$$\frac{-3h}{2h - \frac{\frac{16}{h}}{h}} \pm \sqrt{\frac{-3h}{2h - \frac{\frac{16}{h}}{h}}\,\square^{t\grave{e}}\,\frac{4 - \frac{8}{h} + hh - 7h}{h - \frac{\frac{8}{h}}{h}}}.$$

Divisores autem ultimi Termini, seu valores ipsius h sunt

$$\begin{array}{ll} +1, & \text{vel } -1 \\ +2, & -2 \\ +4, & -4 \\ +8, & -8. \end{array}$$

Hinc si primò sumatur $h \propto +1$, non poterit radix ex

$$\frac{-3h}{2h - \frac{\frac{16}{h}}{h}}\,\square^{t\grave{e}}\,\frac{4 - \frac{8}{h} + hh - 7h}{h - \frac{\frac{8}{h}}{h}}$$

extrahi, ac proinde transeo

ad

ad $b \infty + 2$, sed cum sic b fiat $\infty \sqrt{C.}\, v$, deberet, juxta determinationes superiores, y esse $\infty \frac{-s+q\sqrt{C.}\,v}{p\sqrt{C.}\,v - \frac{t}{\sqrt{C.}\,v}}$, hoc est, $\infty \frac{+10}{-6}$. Id quod cum fractio existat, transeo ad $b \infty + 4$, atque inde obtineo $y \infty \frac{-12}{+7}\ 8\ \frac{2}{7}$, hoc est, $y \infty - 2$, aut $\infty - \frac{10}{7}$. Quorum quidem non nisi $y \infty - 2$ retinendum est, adeoque divisio tentanda per $xx + yx + b \infty xx - 2x + 4 \infty 0$. Hæc autem procedere comperitur, oritur namque pro quotiente $x^4 - 1x^3 + 1xx + 1x + 2 \infty 0$.

Eodem modo, si examinare velimus hanc æquationem $x^6 + 1x^5 + 1x^4 - 2x^3 + 2xx + 4x + 8 \infty 0$: quoniam p est $\infty 1$, $q \infty 1$, $r \infty - 2$, $s \infty 2$, $t \infty 4$, & $v \infty 8$, invenitur

$$y \infty \frac{1b - \frac{4}{b}}{\frac{2b - \frac{16}{b}}{b}}\ 8\ \sqrt{\frac{1b - \frac{4}{b}}{\frac{2b - \frac{16}{b}}{b}}\ \Box^{t\grave{e}}\ \frac{+2 - \frac{8}{b} + bb - b}{\frac{b - \frac{8}{b}}{b}}}.$$

Sumendo autem $b \infty + 1$, non poterit $\sqrt{Q.}$ extrahi; quocirca transeo ad $b \infty + 2$, invenioque b fore $\infty \sqrt{C.}\, v$, ac $b \infty \sqrt{\frac{t}{p}}$, ut & $b \infty \frac{s}{q}$. Unde fit ut juxta dictam determinationem valorem quæram ipsius y per hanc æquationem

$$\begin{array}{l} y^3 - pyy + \frac{s}{\sqrt{C.}\,v}\, y + 2p\sqrt{C.}\,v \\ \qquad\quad - 3\sqrt{C.}\,v \quad - \ r \end{array} \infty 0,$$

hoc est, $y^3 - 1yy - 5y + 6 \infty 0$.

E qua æquatione pro y nullus valor rationalis invenitur præter 2, ac proinde divisio tentanda relinquitur per $xx + yx + b \infty xx + 2x + 2 \infty 0$. Comperitur autem fieri posse, oritur enim pro quotiente $x^4 - 1x^3 + 1xx - 2x + 4 \infty 0$.

Exempla 2^{di} Casus.

Esto examinandum, an hæc æquatio

$$x^6 * + 1x^4 + 3x^3 + 6xx + 3x - 4 \infty 0$$

dividi possit per æquationem rationalem 3 dimensionum, in qua nulli termini deficiant.

Cum

Cum hîc p sit ∞ 0
q ∞ 1
r ∞ 3
s ∞ 6
t ∞ 3
v $\infty - 4$,

$$\text{erit } y^3 \frac{-\frac{pv}{b}-2pb}{\frac{v}{b}+b}\,yy\,\frac{+ppb-2r}{\frac{v}{b}+b}\,y\,\frac{\overline{-\frac{v}{b}+b}\text{ in } r, \overline{-qb+t}\text{ in } p}{\frac{v}{b}+b}$$
$$+qy \qquad \frac{v}{b}-b$$

æqualis

$$y^3 * \frac{\begin{matrix}+1\\-6\end{matrix}}{-\frac{4}{b}+b}\,y\,\frac{\overline{\frac{4}{b}+b}\text{ in } 3}{-\frac{4}{b}+b} \infty 0.$$
$$-\frac{4}{b}-b$$

Divisores ultimi Termini, seu valores ipsius b, qui soli sunt considerandi, sunt $+1$, vel -1, vel $+2$. Unde sumendo $b \infty + 1$, obtinebitur $y^3 * + 3y * \infty 0$. Sed cum y hujus æquationis nullum valorem rationalem admittat, transeo ad alium, nempe $+2$. Cum autem sic $\frac{v}{b}+b$ fiat $\infty 0$, atque etiam p sit $\infty 0$, erit, juxta dictam determinationem, $y \infty \frac{rb}{t}$, hoc est, $y \infty 2$. At quoniam pro $z \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r}{2y - p}$ invenitur fractio, transeo demum ad $b \infty - 1$, atque hinc obtineo $y^3 * - 1y * \infty 0$, hoc est, $y \infty + 1$, & $y \infty - 1$. E quibus tandem inveniendus superest valor ipsius z. Quocirca si primùm sumatur $y \infty + 1$, invenietur inde $z \infty 1$, & $x^3 + yxx + zx + b \infty x^3 + 1xx + 1x - 1 \infty 0$. Per quam æquationem Proposita dividi potest, oritur enim pro quotiente $x^3 - 1xx + 1x + 4 \infty 0$. Quòd si autem per eam dividi non potuisset, ut nec per aliam, ubi y est $\infty - 1$, æquatio Proposita dicto modo non divisibilis fuisset, quandoquidem sic omnes ipsius b valores examini subjecissemus.

Simi-

Similiter examinaturi hanc æquationem

$$x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 36x^3 + 3xx + 16x - 28 \infty 0,$$

in qua p est $\infty -6$, $q \infty 25$, $r \infty -36$, $s \infty 3$, $t \infty 16$, $v \infty -28$, & $h \infty +1$ vel -1, aut $+2$ vel -2, aut $+4$ vel -4, (neglectis scilicet reliquis divisoribus, radicem quadratam ultimi termini excedentibus:) inveniemus, faciendo, ut ante, periculum cum unoquoque valore ipsius h, si pro h assumitur -2, æquationem hanc $y^3 + 5yy + 16\frac{1}{3}y + 31 \infty 0$, in qua y admittit tantummodo unum valorem rationalem, qui integer numerus est nempe -3. Per hunc autem quæro valorem ipsius z. Sed cum hîc $2y$ sit ∞p, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r \infty 0$, non possum eundem per hanc æquationem $z \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r}{2y - p}$ invenire, quo circa illum quæro per hanc $z \infty \frac{t + hyy - qh}{\frac{v}{h} - h}$, atque invenio $z \infty 3$, &

$$x^3 + yxx + zx + h \infty x^3 - 3xx + 3x - 2 \infty 0.$$

Per quam igitur examinando an Proposita dividi queat, comperietur divisionem fieri posse, orieturque pro quotiente $x^3 - 3xx + 13x + 14 \infty 0$. Si verò in hoc ultimo exemplo, ubi $2y$ est ∞p, non fuisset $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r \infty 0$, oportuisset transire ad alium valorem ipsius h.

Ubi notandum per has Regulas pro æquationibus 4, 5, & 6 dimensionum non solùm sciri posse, an Proposita aliqua æquatio per aliam rationalem, in qua omnes Termini extant, divisibilis sit; sed etiam utrum ipsa divisibilis sit per rationalem, in qua aliquis Terminus deficiat. Verùm cum idem faciliùs cognosci queat per XI Regulam, hanc iis duntaxat æquationibus, in quibus nulli termini deficiunt, applicare volui.

2. Quoniam autem usus harum Regularum vel eo major est, quo pauciores divisores ultimus Terminus Propositæ æquationis admittit, haud inconsultum fuerit hîc adjungere modum, quo plerumque levi negotio Propositam æquationem in aliam transmutare licet, in qua ultimus Terminus pauciores habeat dimensiones, quæque indivisibilis sit si Proposita sit indivisibilis, at divisi-

visibilis, si Proposita divisibilis fuerit, & ex cujus æquationibus ipsam dividentibus facilè quoque inveniri possint æquationes, Propositam dividentes.

Assumpto in hunc finem valore aliquo pro x, ut lubet, eoque subrogato ubique in locum x, quærantur divisores omnes aggregati omnium terminorum; &, si divisores hi non pauciores numero fuerint divisoribus ultimi Termini æquationis Propositæ, sumatur rursus alius valor pro x, exploreturque num hinc aggregatum pauciorum divisorum inveniatur; quòd si non fiat, denuò pro x alius valor assumendus est, idque tam diu continuetur, donec inde aggregatum resultet, quod pauciores divisores habeat. Quo peracto, ponatur $x \infty z$, + assumpto ipsius x valore, hujusmodi aggregatum pauciorum divisorum suggerente, atque *hic* valor $z +$ &c. ubique in locum x substituatur, obtinebiturque alia æquatio, in qua z erit incognita quantitas, & ultimus Terminus dictum aggregatum inventum pauciorum divisorum; ita ut hæc æquatio talis futura sit, qualis requiritur, nimirum indivisibilis si Proposita indivisibilis sit, at divisibilis si Proposita *divisibilis* fuerit.

Exempli gratiâ, esto invenienda ejusmodi æquatio loco hujus

$$x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \infty 0.$$

Sumatur $x \infty 1$, fietque

$$\begin{array}{rl} x^5 \infty & +1 \\ +2x^4 \infty & +2 \\ -58x^3 \infty & -58 \\ -49xx \infty & -49 \\ -50x \infty & -50 \\ -600 \infty & -600, \end{array}$$

& $x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \infty + 3 - 757$, hoc est, $\infty - 754$. cujus quidem numeri divisores multò pauciores existunt quàm ipsius -600.

Hinc ponendo $x \infty z + 1$,

erit

$$\begin{array}{llrrrrrr}
\text{erit} & x^5 \infty & z^5 + & 5z^4 + & 10z^3 + & 10zz + & 5z + & 1 \\
+ & 2x^4 \infty & & +2z^4 + & 8z^3 + & 12zz + & 8z + & 2 \\
- & 58x^3 \infty & & & -58z^3 & -174zz & -174z & -58 \\
- & 49xx \infty & & & & -49zz & -98z & -49 \\
- & 50x \infty & & & & & -50z & -50 \\
- & 600 \infty & & & & & & -600, \\
\hline
\& & & z^5 + & 7z^4 & -40z^3 & -201zz & -309z & -754 \infty 0.
\end{array}$$

Quæ æquatio per præcedentes Regulas examinata divisibilis reperitur per $zz + 3z - 58 \infty 0$, ac proinde cum x sit $\infty z + 1$, erit $z \infty x - 1$. Unde si in locum z subrogetur $x - 1$, obtinebitur $zz + 3z - 58 \infty xx + 1x - 60 \infty 0$. per quam itaque Proposita quoque æquatio divisibilis erit.

Quòd si autem post primam positionem ipsius $x \infty + 1$ obtinuissemus aggregatum, quod nobis non inserviisset, id est, quod non pauciores aut adhuc nimis multos divisores admisisset, ponere potuissemus $x \infty - 1$; quòd si verò & hinc quæsitum aggregatum nondum invenissemus, ponere possemus $x \infty + 2$; deinde $x \infty - 2$, atque ita porrò; vel etiam possemus nonnullos terminos supponere $\infty 0$, si aliqui fuerint è quibus idonea quantitas pro x inveniri posset. Exempli gratiâ, possemus in æquatione allata duos priores terminos $x^5 + 2x^4$ supponere $\infty 0$, atque sic invenire $x \infty - 2$, quærendo tantùm ulteriùs aggregatum reliquorum Terminorum $-58x^3 - 49xx - 50x - 600$. Porrò, quod hîc de æquationibus numeralibus diximus, idem quoque locum obtinet in literalibus. Si enim, verbi gratiâ, habeatur æquatio literalis hæc

$$x^5 * - 6abx^3 + 30aabxx - 24a^3bx + 120ab^4 \infty 0,$$
$$+ 10a^4$$

ponere possumus $x \infty + a$, vel $x \infty - a$, vel $x \infty + b$, vel $x \infty - b$, &c. vel etiam supponere terminos aliquos $\infty 0$, ut $-6abx^3 \infty + 30aabxx$, prout visum fuerit.

3. Verùm enimvero magnum hîc commodum in literalibus æquationibus elucet: Nam *non tantùm, cùm hoc aggregatum nullos divisores præter unitatem ac se ipsum admittit* (quos quidem divisores in æquationibus literalibus, ubi omnia cujusque termini membra eundem dimensionum numerum habent, quemadmodum in his de quibus agimus, prætermittere soleo, cum nulla divisio per eos fieri possit), *manifestum est, æquationem*

nem Propositam per aliam rationalem, in qua sive omnes sive non omnes termini extant, & sive unius sive plurium est dimensionum, penitus esse indivisibilem; Sed præterea etiam liquet, æquationem Propositam nunquam fore divisibilem per æquationem rationalem, cujus dimensionum numerus non congruit cum dimensionum numero alicujus ex divisoribus ultimi Termini vel dicti aggregati. Quocirca si æquatione existente 6 dimensionum divisores non nisi 1 & 5 dimensionum fuerint, erit ea indivisibilis per æquationem 2, 3, & 4 dimensionum; & si divisores tantùm 2 & 4 dimensionum fuerint, erit ipsa indivisibilis per æquationem 1, 3, & 5 dimensionum, atque ita de omnibus aliis.

Ita ut per hanc considerationem non tantùm multi casus resecari queant, quando æquatio per aliam rationalem divisibilis est; sed etiam si inquirere velimus, num Proposita aliqua æquatio rationalis per aliam rationalem divisibilis sit, poterit sæpissime parvo admodum labore indivisibilitas, si ea sit indivisibilis, cognosci.

Si enim, exempli causâ, proponatur æquatio

$$x^5 * - 6abx^3 + 30aabxx - 24a^3bx + 120ab^4 \infty 0,$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 10a^4$$

ponaturque $x \infty a$, obtinebitur

$$\begin{array}{rcl}
x^5 & \infty & + a^5 \\
- 6abx^3 & \infty & \ldots - 6a^4b \\
+ 30aabxx & \infty & + 30a^4b \\
- 24a^3bx & \infty & \ldots - 24a^4b \\
+ 10a^4x & \infty & + 10a^5 \\
+ 120ab^4 & \infty & + 120ab^4 \\
\hline
\end{array}$$

& fit aggregatum $+ 11a^5 + 120ab^4$.

Cujus divisores (omissis unitate ac ipso aggregato) tantùm sunt $+a, -a, 11a^4 + 120b^4$, & $-11a^4 - 120b^4$, unius scilicet & 4^or dimensionum: ita ut Proposita æquatio, si per rationalem unius dimensionis divisibilis non fuerit, penitus per rationalem futura sit indivisibilis. Quoniam autem hîc x est $\infty z + a$, addi debet a divisoribus $+a$, & $-a$, ad habendos valores ipsius x, idcirco tantummodo $x - 2a \infty 0$ pro divisore assumi posset. Sed

per

per hunc æquatio Proposita non est divisibilis, quare illa etiam per nullam æquationem rationalem dividi poterit. Quod si juxta unam positionem non ita accidisset, facilè fuerit aliam instituere, ponendo $x \propto b$, vel $\propto -a$, vel $\propto -b$, &c. Et rarò continget, quin per hanc transmutationem æquationis Propositæ in aliam aliquod commodum consequuturi atque operæ plurimùm sublevaturi simus.

XVIII REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem sive literalem sive numeralem, cujus ultimus Terminus Fractione caret, & quæ ex multiplicatione duarum aliarum, quarum ultimi Termini sunt quantitates rationales, produci possunt.

Hæc Regula parùm à præcedenti differt, nisi quòd se latiùs extendat, & per hanc quoque Reductiones ejusmodi æquationum semper inveniri possint, quæ ex duabus aliis, sive rationales, sive irrationales sint, produci possunt, hoc tantùm excepto, quòd ultimi earum termini sint quantitates rationales; cum præcedens Regula se solùm extendat ad æquationes, quæ non nisi ex rationalibus produci possunt: ideoque tantùm opùs est, ut solummodo iisdem Regulis utamur, omnibus illis particularibus relictis, quæ originem duxerunt ex eo, quòd necesse sit, ut illæ æquationes, ex quibus Proposita æquatio produci potest, sint rationales, quod hîc non requiritur. Exempli loco sit prima

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 4or DIMENSIONUM.

Si æquatio Proposita divisibilis sit per aliam, plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat, & cujus ultimus terminus sit rationalis; erit ea divisibilis per

$$xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}x + h \propto 0.$$

 Ex-

Excepto tantùm, cum $\frac{s}{h}$ est $\propto h$, ac simul $r \propto hp$, id est, $h \propto 8\sqrt{s}$, & $h \propto \frac{r}{p}$, tunc enim divisibilis erit per

$$xx + \tfrac{1}{2}p\; 8\sqrt{\tfrac{1}{4}pp + 2h - q}\text{, in } x\text{, } + h \propto 0.$$

ubi patet s nunquam esse posse $\propto hh$, nisi s quadratum fuerit, ac r per p dividi possit.

2. Sufficit etiam illos solùm divisores ultimi termini, qui ipsius radicem quadratam non excedunt, considerare, &c.

Exempli gratiâ, examinaturus hanc æquationem

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto 0: \\ \qquad\qquad\quad\;\; - cc \end{array}$$

quoniam $p \propto -2a$, $q \propto 2aa - cc$, $r \propto -2a^3$, $s \propto a^4$, hinc erit

$$xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}x + h \propto xx\frac{-2a^3 + 2ah}{\frac{a^4}{h} - h}x + h \propto 0.$$

Sunt autem divisores ultimi Termini, seu valores ipsius h, $+aa$ & $-aa$. Unde sumendo $h \propto aa$, obtinebitur $\frac{a^4}{h} - h \propto 0$, ac etiam $-2a^3 + 2ah \propto 0$ (hoc est, $\frac{s}{h} \propto h$, & simul $r \propto hp$.) ac proinde tentanda erit divisio per $xx + \frac{1}{2}p\,x\; 8\sqrt{\frac{1}{4}pp + 2h - q}$, x, $+h \propto 0$, hoc est, per $xx - ax + \sqrt{aa + cc}$, x, $+ aa \propto 0$, vel per $xx - ax - \sqrt{aa + cc}$, x, $+ aa \propto 0$: Quæ divisio per utramque succedit.

Ita etiam se res habet in

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 5que DIMENSIONUM.

Si enim æquatio Proposita 5 dimensionum divisibilis sit per aliam plures quàm unam dimensionem habentem, in qua nullus terminus deficiat, cujusque ultimus terminus sit rationalis; erit ea divisibilis per

$$xx - \frac{\frac{t}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p\; 8\sqrt{\overline{-\frac{\frac{t}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p}^{\,\square^{\text{tè}}} - q + h + \frac{s}{h}}\text{, in } x\text{, } + h \propto 0.$$

Et

Et ſic porrò de cæteris Regulis, tantùm, uti dictum eſt, omnibus illis particularibus relictis, quæ originem duxerunt ex eo, quòd neceſſe ſit, ut illæ æquationes, ex quibus Propoſita æquatio produci poteſt, illic ſint rationales, quod ſolùm hîc non requiritur.

Animadvertendum quoque eſt, hanc Regulam ſe non ſolùm extendere ad æquationes, in quibus nec ſigna radicalia, nec Fractiones inveniuntur, (quemadmodum præcedens illis tantùm quadrat,) ſed quoque ad illas, in quibus & radicalia ſigna & Fractiones reperiuntur, hoc tantùm excepto, quòd non ſint in ultimo Termino, ut antea dictum.

Denique notandum eſt, quòd idem etiam ſequenti modo inveniri poſſit.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 5 DIMENSIONUM.

Quære communem diviſorem duarum æquationum,

$$yy + \begin{matrix}\frac{t}{hh}\\ -p\end{matrix}\, y + \begin{matrix} q\\ -h\\ -\frac{s}{h}\end{matrix} \infty 0, \quad \&\; yy - \begin{matrix}\frac{sh}{t}\\ +\frac{h^3}{t}\end{matrix}\, y - \frac{hhp - t + rh}{\frac{t}{h}} \infty 0,$$

& per eum, valorem ipſius y; eritque Propoſita æquatio diviſibilis per $xx + yx + h \infty 0$.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 6 DIMENSIONUM.

Si Propoſita æquatio diviſibilis eſt per

$$xx + yx + h \infty 0,$$

quæratur communis diviſor duarum æquationum,

$$hyy - \frac{v}{hh}yy - \begin{matrix} ph\\ +\frac{t}{h}\end{matrix}\, y - \begin{matrix} s\\ +\frac{v}{h}\\ -hh\\ +qh\end{matrix} \infty 0, \quad \&\; y^3 - pyy + \begin{matrix} q\\ -2h\\ -\frac{v}{hh}\end{matrix}\, y - \begin{matrix} r\\ +ph\\ +\frac{t}{h}\end{matrix} \infty 0,$$

& per eum, valor ipſius y.

 Si

Si Proposita æquatio est divisibilis per $x^3 + yxx + zx + h \infty 0$, possunt per eandem methodum, quâ priores æquationes inventæ sunt, etiam inveniri duæ aliæ, altera trium, altera 4^or dimensionum, quarum communi divisore invento, per eum valor incognitæ quantitatis y inveniri potest; valor verò ipsius z quæratur eodem modo, quo antea. Eadem est ratio in altioribus æquationibus.

Sed si nullus inveniatur communis divisor, assumptum valorem ipsius h relinquo, & alium assumo. Et si omnes termini alterius æquationis se invicem tollant, per alteram inveniendus est valor ipsius y.

XIX REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem rationalem Fractione & 2do termino carentem, quæ dividi possit per aliam cujus 2^dus terminus sit rationalis, &c.

Primùm inquiro per XI Regulam, an Proposita æquatio divisibilis sit per aliam in qua non omnes termini extant; quod si fieri nequit, erit divisibilis per aliam in qua omnes termini extant, quam sequenti modo invenio. 1mo. Experior num dividi possit per $x +$ vel $-$ aliquo divisore ultimi Termini; si neque hoc succedat, facio æquationem ejusdem formæ, quam multiplicatione deduco ex tot aliis paribus, quot paria ita sumi queunt, ut productum totidem habeat dimensiones quot Proposita æquatio, non annumerando æquationem unius tantùm dimensionis. Exempli gratiâ, si æquatio Proposita habeat 8 dimensiones, considero duas æquationes, habentes 2 & 6, 3 & 5, 4 & 4 dimensiones; aut, si 9 dimensiones habeat, duas, quæ 2 & 7, 3 & 6, 4 & 5 dimensionum fuerint, ex quarum multiplica-

plicatione Proposita posset produci. $3^{tiò}$. Post hæc transmuto Propositam æquationem in aliam, cujus incognita quantitas designet quantitatem 2^{di} Termini, unius harum duarum æquationum, quæ, (si inæqualium dimensionum fuerint,) pauciores dimensiones habeat. $4^{tò}$. Postremò inquiro num inventa æquatio divisibilis sit per incognitam quantitatem + vel — aliquo divisore ultimi sui Termini. &c.

Sumamus, verbi gratiâ, hanc æquationem 6 dimensionum,

$$x^6 * + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \propto 0,$$

in qua q designet quantitatem cognitam tertii termini suis signis + & — adfectam; r quarti; s quinti; t sexti; & v ipsum ultimum terminum: Et quam suppono indivisibilem per aliam æquationem, in qua unus aut plures Termini deficiunt, ut & per x, + vel — aliquo divisore ultimi Termini.

Primò itaque inquiro utrum ipsa divisibilis sit per æquationem 2 dimensionum, in qua omnes termini extant, hoc pacto:

$$\begin{array}{llllllll}
x^4 & -yx^3 & +zxx & +kx & +l & & & \propto 0 \\
xx & +yx & +w & & & & & \propto 0 \\
\hline
x^6 & -yx^5 & +zx^4 & +kx^3 & +lxx & & & \\
 & +y & -yy & +yz & +yk & +ylx & & \\
 & & +w & -wy & +wz & +wk & +wl & \\
\hline
x^6 & * & +qx^4 & +rx^3 & +sxx & +tx & +v & \propto 0.
\end{array}$$

Unde hæ 5 æquationes resultant

1ma. $z - yy + w \propto q$

2da. $k + yz - wy \propto r$

3^{tia}. $l + yk + wz \propto s$

4ta. $yl + wk \propto t$

5ta. $wl \propto v$.

Per 1^{mam} fit $z \propto q + yy - w$, qui valor si in locum ipsius z in reliquis æquationibus subrogetur, habebitur

pro $2^{dâ}$. $k + qy + y^3 - 2wy \propto r$

$3^{tiâ}$. $l + yk + qw + yyw - ww \propto s$

$4^{tâ}$. $yl + wk \propto t$

$5^{tâ}$. $wl \propto v$.

Per

Per 2^{dam} fit $k \infty r - qy - y^3 + 2wy$, qui valor in locum ipſius k in reliquis æquationibus ſubſtitutus dat

pro $3^{tiâ}$. $l + ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww \infty s$

$4^{tâ}$. $yl + rw - qwy - y^3 w + 2wwy \infty t$

$5^{tâ}$. $wl \infty v$.

Per 3^{tiam} fit $l \infty s - ry + qyy + y^4 - 3wyy - qw + ww$, qui valor in reliquis æquationibus ſubſtitutus dat

pro $4^{tâ}$. $sy - ryy + qy^3 + y^5 - 4wy^3 - 2qwy + 3wwy + rw \infty t$

$5^{tâ}$. $sw - ry\mathfrak{w} + qyy\mathfrak{w} + y^4\mathfrak{w} - 3\mathfrak{w}\mathfrak{w}yy - q\mathfrak{w}\mathfrak{w} + \mathfrak{w}^3 \infty v$.

Per 4^{tam} æquationem invento valore ipſius $\mathfrak{w}\mathfrak{w}$ (aut ipſius $3\mathfrak{w}\mathfrak{w}$), ſubſtituo ipſum in locum $\mathfrak{w}\mathfrak{w}$ (aut $3\mathfrak{w}\mathfrak{w}$) in 5ta æquatione, obtineoque 6^{tam} æquationem, in qua $\mathfrak{w}$ tantùm 1 dimenſionem habet, nimirum:

$$\mathfrak{w} \infty \frac{sy^8 + 6qy^6 - 4ry^5 + 5sy^4 + qqy^4 - sty^3 - rryy + qsyy - 9vyy - qty + sry - tr}{14y^6 + 8qy^4 + 5ry^3 + 2qqyy - 6syy + qry - 3ty - rr}.$$

Qui valor ſi jam in 4ta æquatione in locum $\mathfrak{w}$ ſubrogetur, habebitur pro ipſa

$$y^{15} * + 4qy^{13} - 2ry^{12} \begin{array}{l} +6qq \\ -2s \end{array} y^{11} \begin{array}{l} +10t \\ -6qr \end{array} y^{10} \begin{array}{l} -2qs \\ -26v \\ +4q^3 \end{array} y^9 \begin{array}{l} +12qt \\ +6rs \\ -6qqr \end{array} y^8 \begin{array}{l} -3rt \\ -24qv \\ -7ss \\ +2qqs \\ +q^4 \end{array} y^7 \begin{array}{l} +10st \\ -30rv \\ +2qqt \\ +4qrs \\ +2r^3 \\ -2q^3r \end{array} y^6$$

$$\begin{array}{l} -12tt \\ +6qrt \\ -18qqv \\ -6qss \\ -6rrs \\ +2q^3s \\ +54sv \end{array} y^5 \begin{array}{l} +2qst \\ -6qrv \\ -6rrt \\ +8rss \\ -2qqrs \\ +2qr^3 \\ -18tv \end{array} y^4 \begin{array}{l} -5qtt \\ +7rst \\ +3rrv \\ +qqrt \\ -4q^3v \\ +qqss \\ +18qsv \\ -4s^3 \\ -2qrrs \\ -r^4 \\ -27vv \end{array} y^3 \begin{array}{l} -6rtt \\ +2r^3s \end{array} yy \begin{array}{l} -qqtt \\ +3stt \\ +qrst \\ +3qrrv \\ -9rtv \\ -r^3t \\ -rrss \end{array} y \begin{array}{l} -qrtt \\ +t^3 \\ +rrst \\ -r^3v \end{array} \infty 0.$$

Hæc autem æquatio ea eſt, quæ juxta Regulam erat quærenda, nempe in qua y deſignat quantitatem ſecundi Termini hujus æquationis $xx + yx + \mathfrak{w} \infty 0$, quæ una eſt duarum, ex quarum multiplicatione Propoſita ſupponitur eſſe producta, quæque pauciores habet dimenſiones.

Nunc verò inquirendum reſtat, num hæc æquatio diviſibilis ſit per $y +$ vel $-$ aliquo diviſore ultimi Termini $-qrtt + t^3 + rrst - r^3v$; Si enim diviſibilis ſit, erit quoque $\mathfrak{w}$ cognita, poterit-

teritque Propoſita æquatio dividi per $xx + yx + w \propto 0$. Invenitur namque valor ipſius w per quartam æquationem

$$sy - ryy + qy^3 + y^5 - 4wy^3 - 2qwy + 3wwy + rw \propto t$$

$$ww \propto \begin{matrix} \frac{4}{3}yy \\ +\frac{2}{3}q \\ -\frac{1}{3}r \end{matrix} w + \frac{t}{3y} \; \frac{-s + ry - qyy - y^4}{3}.$$

Vel ipſa inveniri quoque poteſt per 5^{tam}; ut & per 6^{tam}, cùm 5ta per 4^{tam} non eſt diviſibilis.

Quòd ſi jam hæc æquatio 15 dimenſionum non fuerit diviſibilis per y + vel — aliquo diviſore ultimi Termini, poterimus rurſus eodem modo æquationem ejuſdem formæ facere, ſupponendo Propoſitam eſſe productam per multiplicationem duarum aliarum, quæ ſingulæ 3 dimenſiones habeant, inveſtigando æquationem, in quâ incognita quantitas rurſus deſignet quantitatem 2^{di} termini alterutrius harum æquationum. Hæc autem aſcendet ad 20 dimenſiones, ſed ubique parium erit dimenſionum; ita ut hîc diviſio tunc exploranda ſit per incognitæ quantitatis quadratum + vel — aliquo diviſore ultimi Termini.

Haud ſecus ſi Propoſita æquatio ſit 5 aut 4 dimenſionum, atque conſtet ipſam dividi non poſſe per aliam æquationem in qua unus pluréſve Termini deficiant, nec per x + vel — aliquo diviſore ultimi Termini, erit ea diviſibilis per æquationem 2 dimenſionum, in qua omnes Termini extant. Itaque ex hac æquatione 5 dimenſionum

$$x^5 * + qx^3 + rxx + sx + t \propto 0,$$

ſi ſolummodo in operatione præcedenti ponamus l & $v \propto 0$, inveniemus

pro $3^{tiâ}$. $ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww \propto s$,

& pro $4^{tâ}$. $rw - qwy - y^3w + 2wwy \propto t$.

Per 3^{tiam} autem valor ipſius ww eſt $\propto ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - s$, qui valor in locum ipſius ww ſubſtitutus in 4ta dabit

$$\text{pro } 5^{tâ}.\ w \propto \frac{-2ryy + 2qy^3 + 2y^5 + 2sy + t}{r + 5y^3 + qy}.$$

Porrò ſubrogato hoc valore ubique in locum ipſius w in 3^{tia}, obtinebitur

$$\begin{array}{llllllllll} y^{10} * & +3q y^8 & -r y^7 & +3qq y^6 & -2qr y^5 & -2qs y^4 & +4sr y^3 & -4ss yy & -4st y & -tt \infty 0. \\ & & & -3s & +11t & -rr & +4qt & +7rt & +r^3 & -rrs \\ & & & & & +q^3 & -qqr & +qqs & +tqq & +tqr \\ & & & & & & & -qrr & & \end{array}$$

Et hæc est æquatio quæ inservit dividendis æquationibus 5 dimensionum, quæ quærebatur.

Pro æquationibus autem quatuor dimensionum, utpote $x^4 * + qxx + rx + s \infty 0$, concipiendo k, l, t, & $v \infty 0$, invenio

pro $2^{dà}$. $qy + y^3 - 2wy \infty r$,

& pro $3^{tià}$. $qw + yyw - ww \infty s$.

Ponendo jam valorem ipsius $w \infty \frac{qy + y^3 - r}{2y}$ in $3^{tià}$, obtinebitur

$$\begin{array}{llll} y^6 + 2qy^4 + & qqyy & - rr \infty 0. \\ & -4s & & \end{array}$$

Quæ æquatio erit divisibilis per yy, + vel — aliquo divisore ultimi Termini, atque æquatio Proposita $x^4 * + qxx + rx + s \infty 0$ per $xx + yx + w \infty 0$, ut & per $xx - yx + z \infty 0$; hoc est,

$$\text{per } xx + yx + \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}yy - \frac{r}{2y} \infty 0,$$

$$\& \ xx - yx + \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}yy + \frac{r}{2y} \infty 0.$$

Ubi notandum, hanc Regulam, quâ omnes reducibiles æquationes Quadrato-quadratæ reduci possunt, esse planè eandem cum illa, quam D. des Cartes pag. 79, 80, & 81 suæ Geometriæ descripsit. Nec dubitare possim, quin ipsam eodem modo, vel certè non multùm absimili invenerit; præsertim si ea, quæ pagin. 84 in genere de æquationum Reductione docuit, conferantur cum ipsius Methodo secantium, & quæ deinceps pag. 49 exposuit. Adeò ut, judicio meo, ne quidem verisimile videatur, imprimis si concinnam præcedentium cum sequentibus cohærentiam spectemus, ipsum ex ullis aliis authoribus, ut nonnulli opinantur, eam desumpsisse. Quippe pro excellenti, quâ pollebat, animi generositate, (ut novisti & tu & quotquot ejus familiaritate usi sunt,) non modò nunquam tantopere animo indulgebat, sed parvus etiam hic ejus tractatus tam varia profundæ & admirandæ eruditionis specimina summique ingenii inventa exhibet, & quæ

& quæ præ Antiquorum monumentis adeò sunt generalia, utilia, ac à vulgo remota, ut nemo, qui illum intellexerit atque ipsorum scripta cum hujus scriptis comparaverit, in hasce cogitationes incidere unquam possit; Quemadmodum nemo tam præpostero est ingenio, ut fulgentem solis lucem à micantibus stellis derivandam arbitretur. Non tamen hîc quicquam Veteribus detractum volo, dum eos micantibus stellis assimilo; credo enim stellas dari, quæ in se sint ipso etiam sole majores ac fulgidiores, quanquam non quidem nostrûm respectu, qui terram inhabitamus. Namque inter illos, Archimedes imprimis ac Diophantus, multique alii, qui superiori & hoc nostro sæculo vixerunt, viri celebres, magni certè apud me nominis & æstimationis sunt, ac suis etiam monumentis immortalem in omnes Posteros nominis gloriam promeritos lubentissimè fateor. At majorem post illos lucem mundo exortam esse, ipsi etiam, si reviviscerent, in nostro Cartesio non tantùm agnoscerent, sed etiam sibi ex ejus lumine majus lumen accendere satagerent, aliosque ut illo potiùs, quàm suo uterentur, monerent: quia non modò jucundiùs sed tutiùs etiam in solis lumine vivitur, & per compendiosiores vias ad multò plura objecta pervenitur, eaque multò luculentiùs ac distinctiùs quàm in stellarum lumine oculis patent. Sed quid nudam veritatem tot verbis palliare conor, idque apud te, qui incomparabilem illum Virum, non tantùm ex ipsius scriptis, sed præsertim ex intima familiaritate, quæ tibi cum eo à multis retrò annis intercessit, penitus pernovisti, quemque interea non semel maximo cum stupore admiratus es, cum videres eum quæstiones in Mathesi difficillimas è vestigio tantâ promptitudine resolvere, ac si non difficilliores, quàm omnium facillimæ, ipsi fuissent, quæ nihilominus à præstantissimis etiam Mathematicis in ea usque tempora, aut non, aut non nisi maximâ cum perplexitate inveniri potuerant. Et cum te pœniteat, (uti aliquando coram ipse fassus es) quòd non omnia, quæ ullo unquam tempore ex ejus ore emanarunt, fideliter chartis mandata custodieris, id mihi satis amplum testimonium est, unde certus sim, tibi, ut mihi, ne quidem verisimile fieri posse, Illum hanc Reductionis Regulam ex aliorum scriptis ad se potiùs transtulisse, quàm ex propriis fundamentis, fœcundissimis illis omnium scientiarum seminariis, eruisse atque invenisse. Sed de his satis.

Jam ad Regulam revertar, & paucis innuam, quòd ex operatione hîc factâ eluceat generalis Methodus tollendi ordine omnes, quæ quidem possunt, quantitates incognitas, vel eas quæ ut incognitæ considerantur; quod, meo quidem judicio, magni usus est, cum sæpenumero quæstiones difficiliores, unam tantùm incognitam quantitatem supponendo, aut non resolvi posse, aut multo majori labore, aut certè ad eas resolvendas alias vias quàm hactenus imitari consuevimus ineundas esse, deprehenderim; quod etiam Cartesium nostrum non latuisse ex pag. 4, aliisque passim locis luculenter constat. quod nihilominus haud ita pridem ab insigni Mathematico in dubium revocari comperi, cujus rei causam hanc conjicio, quòd in aliorum scriptis magis quàm in hujus versatus fuerit. Dixi autem hâc Regulâ tolli eas quantitates, quæ quidem tolli possunt: non enim semper omnes possunt, neque etiam unâ exceptâ, neque duabus, &c. Nam si quæstio non sit Theorema, omnes tolli nequeunt; & si determinata sit, omnes unâ exceptâ tolli possunt; si verò una deficiat conditio, quò minùs determinata existat, omnes tolli queunt duabus exceptis, & sic deinceps, ut nosti. Neque, quod sedulò observo, etiam semper per quamlibet æquationem una quantitas incognita tolli potest. Exempli gratiâ, in duabus hisce æquationibus

$$x^3 - 3zxx \begin{array}{l} +bb \\ +bz \\ +2zz \end{array} x \begin{array}{l} -zzb \\ -zbb \\ \end{array} \infty 0,$$

&

$$x^3 - 4zxx \begin{array}{l} +zb \\ +4zz \\ +bb \end{array} x \begin{array}{l} -2zzb \\ -2zbb \\ \end{array} \infty 0,$$

in quibus x & z duas incognitas quantitates designant, potest x vel z per neutram ex altera tolli. Quod, ubi accidit, indicio est, Problema, è quo hæ duæ æquationes fuerunt deductæ, si omnes ejus conditiones includant, non determinatum esse, atque unam in eo conditionem, ut prorsus determinatum sit, deficere. Non raro etiam licet in resolvendo aliquo Problemate determinato diversas invenire æquationes, unam eandemque incognitam quantitatem habentes, idque magno cum emolumento. Sed de his aliàs.

Porrò quomodo easdem Regulas aliâ adhuc Methodo inveniam, breviter adjungam.

Sit

Sit æquatio Propoſita, ut ante,

$$x^6 * + q x^4 + r x^3 + s x x + t x + v \infty 0,$$

& inquiratur num dividi poſſit per æquationem duarum dimenſionum cui nullus terminus deſit, pone per $x x + y x + w \infty 0$. ſi itaque per eam diviſibilis ſit, erit $x x \infty - y x - w$, quo valore ipſius $x x$, ubique in locum $x x$ ſubrogato, reſultabit æquatio in qua x unam tantùm habebit dimenſionem, nimirum

$$\begin{array}{llll} -3wwyx & -w^3 & \infty 0. \\ -\;y^5 & -wy^4 & \\ +4wy^3 & +3wwyy & \\ -\;qy^3 & +\;qww & \\ +2qwy & +\;rwy & \\ -\;rw & -\;sw & \\ +\;yyr & -\;qwyy & \\ -\;sy & +\;v & \\ +\;t & & \end{array}$$

Deinde pono ſingulos terminos $\infty 0$, adeò ut tum habeas has duas æquationes,

$-3wwy - y^5$ &c. $\infty 0$. &, $-w^3 - wy^4$ &c. $\infty 0$.

eaſdem quæ præcedentes 4ta & 5ta; Ita ut w, eodem quo ibi modo, ablatâ, eandem tandem æquationem nanciſcaris $y^{15} * + 4qy^{13}$, &c. $\infty 0$

Eodem modo ſe res habet in reliquis.

Illud verò notandum eſt, hanc poſitionem $x x - y x - w \infty 0$. ſeu $x x \infty y x + w$ paulò faciliorem reddere operationem, cum in ſubrogatione valoris ipſius $x x$ non opùs ſit ut ſigna mutentur, quod alioqui ſecundùm priorem poſitionem $x x + y x + w \infty 0$ contingit: Itaque hæc pro illa potiùs eſt eligenda. Et quod hanc non elegerim, ideo factum eſt, ut idem effectus utriuſque methodi evidentiùs pateret. Eodem modo, ſi præcedens æquatio inquirenda eſſet, num dividi poſſet per æquationem trium dimenſionum, in qua nullus terminus deficiat, ponerem illam $x^3 \infty y x x + w x + z$, ſed non $x^3 + y x x + w x + z \infty 0$, quemadmodum, ſi aliam Methodum ſequerer, facturus eſſem.

Supervacaneum verò est me dicere, has tres præcedentes Regulas æquationum 6, 5, & 4^{or} dimensionum, (quamvis illæ tanquam exemplum generalis Regulæ in medium allatæ sint) se extendere ad omnes casus: nam cum q denotet quantitatem cognitam tertii termini Propositæ æquationis, affectam suis signis $+$ & $-$; manifestum est in Regulis valorem ipsius q tantùm subrogandum esse in locum q; vel si fortè tertius hic terminus in æquatione deficiat, omnes quantitates per q multiplicatas, cum etiam tum sint ∞ o, delendas esse. ita quoque se res habet in r, s, & t. Verbi gratiâ, si hæc æquatio 5 dimensionum $x^5 * * + 6xx - 25x - 39 \infty 0$ divisibilis esset per rationalem duarum dimensionum, in qua nullus terminus deest; Oportet, cum in hac æquatione q sit ∞ o, $r \infty 6$, $s \infty -25$, $t \infty -39$, loco hujus $y^{10} * + 3qy^8 - ry^7$ &c. ∞ o, scribere hanc $y^{10} * * - 6y^7 + 75y^6 - 429y^5 - 36y^4 - 600y^3 - 4138yy - 3684y - 621 \infty 0$. quâ y invenitur $\infty - 1$, ideoque $w \infty \dfrac{-2ryy + 2qy^3 \text{ \&c.}}{r + 5y^3 + qy} \infty - 3$; & pro $xx + yx + w \infty 0$, hæc $xx - 1x - 3 \infty 0$, per quam Proposita æquatio erit divisibilis. atque ita in reliquis. Adeò ut hinc pateat, sicut etiam in 17ma aliisque Regulis, quomodo omnes casus æquationum æqualium dimensionum, sive aliqui termini desint, sive non, vel quo tandem modo signis $+$ & $-$ affecti sint, sub una eademque Regula comprehendi possint, adeò ut sexcenti ejusmodi casus ad unum referri & multi labores rescindi queant. Quod satis superque Regula æquationum 4 dimensionum, cum omnibus casibus, quos aliqui elaborarunt, comparata, immensusque labor, quem illis hoc negotium peperit, demonstrant; præsertim si eâdem ratione omnes casus æquationum 5 & 6 dimensionum describere vellent.

Denique notandum, cùm dico, primùm inquirendum esse num æquatio Proposita dividi possit per aliam in qua omnes termini non extant, non adeò rigidè illud sequendum esse; non enim id necessarium, sed plerumque brevissima via est ad æquationem Propositam reducendam.

XX REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem rationalem

nalem 4 dimensionum, fractioneq́ʒ carentem, 2do verò termino, si adsit, manente, ad aliam trium, & hanc iterum, si fieri potest, ad alias pauciorum dimensionum.

Postquam exploratum est æquationem Propositam non esse divisibilem per aliam, duos duntaxat terminos habentem, inveniendus est valor hujus æquationis

$$\begin{array}{llll} y^3 - qyy & -4sy & -spp & \infty\, 0. \\ & +pr & +4qs & \\ & & -rr & \end{array}$$

ubi p designat quantitatem cognitam, suis signis + vel — adfectam 2^{di} termini; q, tertii; r, quarti; s, quinti. Invento autem valore ipsius y, poterit æquatio Proposita ejusdem ope dividi in duas æquationes sequentes, quæ singulæ duas dimensiones habent, nimirum in

$$xx + \tfrac{1}{2}px + \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y} \text{ in } x, + \tfrac{1}{2}y + \frac{\tfrac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} \infty\, 0,$$

$$\&\; xx + \tfrac{1}{2}px - \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y} \text{ in } x, + \tfrac{1}{2}y - \frac{\tfrac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} \infty\, 0.$$

Quòd si verò valor ipsius y non sit æqualis alicui ex divisoribus ultimi termini $-spp + 4qs - rr$, non poterit æquatio Proposita ulteriùs quàm ad tres dimensiones reduci.

Exempli gratia, si reducere velimus æquationem $x^4 - 2x^3 - 2xx - 2x + 1 \infty\, 0$, quæ per æquationem, duos solummodo terminos habentem, est indivisibilis, invenio

$$\begin{array}{llll} y^3 - qyy & -4sy & -spp \infty\, y^3 + 2yy * - 16 \infty\, 0. \\ & +pr & +4qs & \\ & & -rr & \end{array}$$

(nam $p \infty -2$; $q \infty -2$; $r \infty -2$; $s \infty 1$). quæ dividi potest per $y - 2 \infty\, 0$, ita ut loco duarum æquationum habeantur hæ duæ

$$\begin{array}{ll} xx - 1x + 1 \infty\, 0, & \&\; xx - 1x + 1 \infty\, 0. \\ +\sqrt{5} & \qquad -\sqrt{5} \end{array}$$

Eodem modo si habeatur æquatio $x^4 * * - 12x - 5 \infty\, 0$, obtineo.

tineo $y^3 * + 20y - 144 = 0$, pro $\begin{array}{l} y^3 - qyy - 4sy - spp = 0 \\ \qquad\quad + pr \quad + 4qs \\ \qquad\qquad\quad - rr \end{array}$

(nam $p = 0$, $q = 0$, $r = -12$, $s = -5$.) quæ divisibilis est per $y - 4 = 0$, ita ut loco duarum æquationum habeas has duas

$$xx + 2x + 5 = 0,$$
$$\& \; xx - 2x - 1 = 0.$$

Similiter si proponatur æquatio literalis

$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 = 0, \\ \qquad\qquad\quad - cc \end{array}$ erit $p = -2a$; $q = 2aa - cc$; $r = -2a^3$; $s = a^4$, ideoque in locum æquationis $\begin{array}{l} y^3 - qyy - 4sy - spp = 0, \\ \qquad + pr \quad + 4qs \\ \qquad\qquad - rr \end{array}$ scribenda $\begin{array}{l} y^3 - 2aayy * - 4a^4cc = 0, \\ \qquad + cc \end{array}$

quæ dividi potest per $y - 2aa = 0$, ita ut loco duarum æquationum habeantur hæ duæ

$$xx - ax + x\sqrt{aa + cc}, + aa = 0,$$
$$\& \; xx - ax - x\sqrt{aa + cc}, + aa = 0.$$

Si verò hæ æquationes per $y +$ vel $-$ aliquo divisore ultimi Termini non fuissent divisibiles, non potuissent etiam æquationes Propositæ ulteriùs quàm ad 3 dimensiones reduci.

XXI REGULA.

Hactenus Regulæ, quas tradidi, *respexerunt æquationes*, in quibus una tantùm incognita quantitas, quam x nominavi, inveniebatur, ut meos conceptus distinctiùs exprimerem. Jam uno adhuc verbo adjiciam: ***Quòd in Proposita æquatione quamlibet cognitam pro incognita & vice versa quamlibet incognitam pro cognita respectu Reductionis considerare liceat; & quòd sæpe compendio sit incognitam tanquam cognitam & unam ex cognitis tanquam incognitam considerare & sic Reductionem inquirere.*** Nam primò in omnibus æquationibus, quæ ex duabus rationalibus oriri possunt, æquè per quamlibet cognitam, eam tanquam incognitam considerando, quàm per incognitam reductio inveniri potest, & sæpe etiam breviùs, si ex solis irrationalibus produci possunt. Dein quòd hoc sæpe compendio sit, vel hinc

hinc manifestum fit, quia rarò admodum omnes literæ eundem dimensionum numerum habent, atque adeò, si aliquam ex cognitis pro incognita consideres, sæpe quoque aliqua æquatio exsurget, quæ pauciorum sit dimensionum quàm Proposita; & adhuc pauciorum, si etiam inter ipsas cognitas, quæ rarò itidem eundem dimensionum numerum habent, delectum instituas; aut saltem reductio hoc vel illo modo facilior evadet.

Considerando itaque omnes sine discrimine literas ut cognitas, ejusmodi ex illis eligere & pro incognita supponere integrum erit, quæ ad reductionem facillimè expediendam (per præcedentes Regulas) maximè conducere judicabitur. Et hæc omnium, quas tradidi, Regularum, respectu Reductionum, utilissima est.

Et per eam non tantùm Reductiones ultimarum æquationum, quæ omnes Propositi Problematis conditiones includunt, ope Regularum supra explicatarum sæpe compendiosissimè inveniuntur, sed etiam priusquam ad ultimam deveniatur, quam plurimæ reductiones rescindi & simplicissimæ sæpe æquationes haberi possunt. Et quidem operæ pretium foret, rem hanc aliquot exemplis clariorem reddere, sed ne te atque etiam me diutiùs remorer, unum tantùm & alterum exemplum adjungam.

Quo modo reducere possis omnem rationalem æquationem, quæ per aliam rationalem, non cognitis ultimi Termini divisoribus, dividi queat, remanente etiam, si placet, omni Fractione, quæ in illa reperitur; nimirum, si in æquatione illa aliqua litera, sive cognita, sive incognita reperiatur, secundùm quam æquatio ordinata non plures quàm quatuor dimensiones habeat; seu in qua litera aliqua reperitur non plures habens quàm 1, vel 1 & 2, vel 1, 2, & 3, vel 1, 2, 3 & 4 dimensiones, vel etiam plures, sed quæ ex his derivari possint: Id quod semper ex investigatione valoris hujus literæ, quæ vel incognita est, vel ut incognita consideratur, innotescit, uno tantùm casu excepto, quem postea indicabo.

1 *Exemplum*, in quo litera b ubique unam tantùm dimensionem habet.

Esto æquatio Proposita
$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + aaxx + a^3x - a^4 \propto 0 \\ \quad\;\; + b \quad\; - ab \qquad\quad\;\; + ba^3 \end{array}$$

Ergo $bx^3 - abxx + ba^3 \propto -x^4 + 2ax^3 - aaxx - a^3x + a^4$

div. per $x^3 - axx + a^3$. fit $b \propto -x + a$

& $x - a + b \propto 0$. Æquatio, per quam Proposita dividi potest.

2 *Exemplum*.

Esto æquatio Proposita
$$\begin{array}{l} x^3 - 20bxx + 60aax - 120a^3 \propto 0 \\ \quad\;\; - 2a \qquad + 70ab \quad - 60aab \end{array}$$

Ergo $-20bxx + 70abx - 60aab \propto -x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3$

div. per $-20xx + 70ax - 60aa$. fit $b \propto \frac{-x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3}{-20xx + 70ax - 60aa}$. Hujus autem maximus communis divisor, per Methodum ante descriptam, est $x - 2a$, per quem si fractio abbrevietur,

fiet $b \propto \frac{-xx - 60aa}{-20x + 30a}$, vel $\frac{xx + 60aa}{20x - 30a}$

seu, quod idem est, $\begin{array}{l} xx - 20bx + 30ab \propto 0. \\ \qquad\qquad\quad + 60aa \end{array}$ Ita ut æquatio Proposita in hanc, & præcedentem $x - 2a \propto 0$ divisa sit.

3 *Exemplum*, in quo quantitas c tantùm 1 & 2 habet dimensiones.

Esto æquatio Proposita
$$\begin{array}{l} x^4 * + 8acxx - 4aacx + 12aacc \propto 0 \\ \qquad\;\; - aa \end{array}$$

Ergo $\begin{array}{l} 12aacc \propto - 8axxc - x^4 \\ \qquad\qquad\; + 4aaxc + aaxx \end{array}$

div. per $12aa$. fit $cc \propto \frac{4ax - 8xx}{12a}$ in c, $+ \frac{aaxx - x^4}{12aa}$

Unde extractâ radice invenietur

$c \propto \frac{ax - xx}{2a}$, hoc est, $xx - ax + 2ac \propto 0$

vel $c \propto \frac{-ax - xx}{6a}$, hoc est, $xx + ax + 6ac \propto 0$.

Ita ut æquatio Proposita in hasce duas sit divisa. Quoniam autem

tem

tem in ea *a* quoque 1 & 2 tantùm dimensiones habet, potuisset idem etiam quærendo valorem ipsius *a* investigari.

Ubi notari potest, quòd, ad inveniendas radices alicujus æquationis, in quâ litera, cujus valor quæritur, non plures habet dimensiones quàm 1 & 2, vel 2 & 4, vel 3 & 6, &c. scire non sit necesse, cujusnam illa sequentium formularum existat.

$$xx - ax + bc \infty 0$$
$$xx + ax + bc \infty 0$$
$$xx + ax - bc \infty 0$$
$$xx - ax - bc \infty 0.$$

Etenim positâ $xx, px, q \infty 0$, si px statuatur pro 2do, & q pro ultimo termino, erit semper $x \infty \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

4 *Exemplum.*

Porrò quoniam æquationes omnes quatuor dimensionum reduci possunt ad æquationes trium dimensionum, & in omnibus quidem æquationibus secundus terminus tolli potest, ostendendum solummodo restat, quo pacto divisores æquationis inveniri queant, in quâ incognita quantitas, vel alia quævis litera, quæ ut incognita consideratur, tantùm 1 & 3 dimensiones habet. In quem itaque finem proponatur æquatio $x^3 \infty * qx . r$.

In qua x designet quantitatem, cujus valor quæritur; q & r autem quantitates cum suis signis, quales illæ in æquatione reperiuntur.

Esto etiam $x \infty y + z$

Eritque $x^3 \infty y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3 \infty qx + r$.

Ex hac autem æquatione fiant jam duæ aliæ, ponendo

$$3zyy + 3zzy \infty qx, \qquad \& \quad y^3 + z^3 \infty r$$

div. per $y + z$. fit $3zy \infty q$ vel $y^3 \infty r - z^3$

$$y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$y^3 \infty \frac{\frac{1}{27}q^3}{z^3} \infty r - z^3$$

$$z^3 \infty \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3},$$

$$\& \; y^3 \infty \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}, \text{ quia } y^3 \infty r - z^3$$

vel $y \infty -\frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r\ 8\ \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}$, quia $y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{z}$

& $x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r\ 8\ \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},\ + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r\ 8\ \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}$,
quia $x \infty z + y$

vel $x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r\ 8\ \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},\ + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r\ 8\ \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}$.

Quoniam verò in prima parte prioris valoris ipsius x reperitur signum 8, & in secunda signum contrarium 8, atque quantitates per ea conjunctæ omnino eædem existunt; & quoniam ad obtinendum valorem ipsius x, duæ illæ partes simul addi debent; poterunt ipsa determinari, ponendo pro uno $+$, & pro altero $-$, ita ut habeatur

$$x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},$$

$$\text{vel } x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}.$$

Quocirca quærendo juxta hanc Regulam valorem quantitatis x, licebit ipsius beneficio æquationem, si reducibilis sit, in duas rationales dividere: quoniam tunc $\sqrt{C.}$ ex $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$ extrahi poterit, excepto tantùm, quando quantitate q signo $+$ adfectâ, $\frac{1}{4}rr$ minor est quàm $\frac{1}{27}q^3$.

Ubi difficultas aliqua superesse videtur in radicis Cubicæ ex binomiis hisce extractione; sed cùm $\sqrt{C.}$ ex binomio numerali ope Regulæ pag. 389 extrahi queat, poterit etiam ejusdem beneficio radix ex binomio literali inveniri, cum pro literis numeros ad arbitrium assumere liceat, &c.

Quanquam autem sæpenumero in reducendis æquationibus hujus quarti exempli contingat, ut Quæsitum per aliquam ex aliis Regulis faciliùs inveniatur, poterit tamen interdum hæc Regula, præsertim in æquationibus numeralibus, ubi divisores ultimi Termini complures existunt aut difficiles sunt inventu, cum fructu usurpari.

Quibus præmissis, potero generalem Regulam commodiùs exprimere, quæ talis est:

Si in æquatione Proposita, quæ in duas alias rationales est divisibilis, quæratur valor quantitatis incognitæ

vel

vel alicujus alterius, quæ ut incognita consideratur, poterimus ipsam aut dividere (sicut in 1mo exemplo); aut fractionem inde ortam per communem aliquem divisorem abbreviare (sicut in 2do exemplo); aut denique radicem quadratam (sicut in 3tio exemplo) aut radicem cubicam extrahere, excepto tantùm, ut diximus, uno casu, ubi q designat quantitatem signo $+$ adfectam, existente $\frac{1}{4}rr$ minore quàm $\frac{1}{27}q^3$.

Ubi tandem id advertendum, Regulam hanc in resolvendis æquationibus trium & quatuor dimensionum eandem esse cum illa Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferreo tribuit; ita ut ex superiori calculo manifestum sit quòd ea Regula, quamvis ille author ex alio fortè fundamento eam eruerit, hoc tamen etiam modo inveniri possit. Hanc verò eandem esse, vel hinc evidens fit, si ex illa sola conficiamus hasce quatuor: quippe ponendo quantitates q & r signo $+$ adfectas esse, obtinebimus, existente $x^3 \propto +qx+r$,

$$x \propto \sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\tfrac{1}{4}rr-\tfrac{1}{27}q^3}},\ +\sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\tfrac{1}{4}rr-\tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Si q designet quantitatem signo $+$, r autem quantitatem signo $-$ adfectam, obtinebimus, existente $x^3 \propto +qx-r$, (mutando tantùm in Regula signa, quæ ipsi r impares dimensiones habenti præfiguntur)

$$x \propto \sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\tfrac{1}{4}rr-\tfrac{1}{27}q^3}},\ +\sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\tfrac{1}{4}rr-\tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Si q designet quantitatem signo $-$, & r signo $+$ adfectam, obtinebimus, existente $x^3 \propto -qx+r$, (mutando signa, quæ ipsi q impares dimensiones habenti præfiguntur)

$$x \propto \sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\tfrac{1}{4}rr+\tfrac{1}{27}q^3}},\ +\sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\tfrac{1}{4}rr+\tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Denique si q & r signo $-$ sint adfectæ, obtinebimus, existente $x^3 \propto -qx-r$, (mutando signa, ut supra)

$$x \propto \sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\tfrac{1}{4}rr+\tfrac{1}{27}q^3}},\ +\sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\tfrac{1}{4}rr+\tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Et nota, quòd eodem modo operando similes regulæ pro altioribus æquationibus inveniri possint.

2. Sed cum Methodus hæc reducendarum æquationum, ubi incognita quantitas, vel quæ ut incognita consideratur, trium vel

quatuor dimensionum est, aliquando paulò longior sit, præstat tum ejus loco vigesimâ Regulâ uti, per quam omnes casus trium vel quatuor dimensionum, nullo excepto, reduci possunt; Vel etiam regulâ 17, ubi non adstringeris æquationibus quatuor dimensionum, sed omnes rationales, quæ per aliquam rationalem æquationem dividi queunt, reducere poteris, atque adeò etiam omnem Propositam rationalem æquationem, quæ per aliquam rationalem divisibilis est, si modo aliqua litera, quam libuerit, tanquam incognita, & reliquæ omnes ut cognitæ considerentur.

3. Sæpe autem satis breviter Reductio æquationum, quæ tantummodo per irrationales reduci possunt, inveniri potest. exempli gratiâ, si habeas hanc æquationem,

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty 0$$
$$- cc$$

vel $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty ccxx$

addas utrimque quantitatem aliquam per xx multiplicatam, (cum ab altera parte habeas cc in xx) talem nempe ut $\sqrt{}$ quadrata ex altera parte extrahi possit, quod statim per extractionem reperies esse $+aaxx$, ideoque utrimque hac $+aaxx$ addita, & radice quadrata extractâ invenies

$$xx - ax + aa \infty x\sqrt{aa+cc}$$

atque ideo Proposita æquatio ex multiplicatione duarum sequentium æquationum resultare poterit

$$xx - ax \quad + aa \infty 0.$$
$$- \sqrt{aa+cc}$$

$$xx - ax \quad + aa \infty 0.$$
$$+ \sqrt{aa+cc}$$

4. Magnum quoque usum habent aliæ quædam Regulæ, tam in reducenda æquatione, quæ per rationales, quàm quæ tantummodo per irrationales reduci possunt. ex. gr. per 11 Regulam, omnes æquationes reduci poterunt, quæ non tantùm ex duabus aliis per multiplicationem produci possunt, in quarum alterutra, unus pluresve termini deficiunt, si æquatio consideretur secundùm incognitam quantitatem, sed etiam si tantùm quævis alia litera, sive cognita, sive incognita, reperitur, quæ ut incognita consideratur, & æquatio secundùm illam in ordinem redacta talis sit, ut ex duabus aliis produci possit, in quarum alterutra unus plu-

pluréſve termini deficiunt. ſic quamvis ſequens æquatio 6 dimenſionum

$$x^3 - 2axx + 3abx + 6a^3 \infty 0$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + 6abb$$

$$\text{per } x^3 + 2axx + 4aax - 4a^3 \infty 0$$
$$\qquad\qquad + 2ab \quad - 8b^3$$

Product. x^6, &c.

produci non poſſit ex duabus aliis, in quarum alterutra unus vel plures termini deficiunt, ſi ſcilicet x ut incognita quantitas conſideretur, poterit tamen ex duabus talibus produci, ſi vel a vel b ut incognita quantitas conſideretur, ut ex æquationibus, ex quibus producta eſt, patet; ac proinde æquatio illa Propoſita per XI Regulam reduci poterit.

Hîc ergo hanc Regulam abrumpam, & celeriori in ſequentibus gradu ad finem, quem jam dudum deſidero, feſtinabo.

Diverſas adhuc alias Regulas in paratu habeo, quas hîc ſimul adjungerem, ſi non aliquid in futurum reſervare animus eſſet: Nimirum inter cæteras una eſt, per quam omnes irrationales radices tam numeralium, quàm literalium æquationum invenio; una per quam omnes æquationes numerales, quæ ex duabus rationalibus produci poſſunt, ad eaſdem reduco, non cognitis diviſoribus ultimi termini; item alia, per quam ſæpe literales æquationes reduco, quæque in eo conſiſtit, quòd unam aut alteram literam ponam ∞ o, vel ∞ alii alicui quantitati, quam libuerit, & quòd hanc æquationem inde reſultantem priùs reducere coner, & poſtea etiam Propoſitam per hanc. Exempli loco adjungam hanc

REGULAM,

Quâ omnes rationales æquationes, quæ nullas fractiones continent & reduci poſſunt, reducuntur, ſi ponendo unam aut plures literas ∞ o, aut ∞ alii quam libuerit quantitati, talis inde æquatio reſultet, quæ una tantùm dimenſione minor & irreducibilis ſit.

Ex.gr. habeatur hæc æquatio $x^3 - 5axx + 6bbx - 18abb \infty 0,$
$$\qquad\qquad\qquad - 9bc \quad - 9a^3$$
$$\qquad\qquad\qquad - 9aa \quad + 27abc$$

in

in qua si a ponatur ∞ o, exsurgit hæc

$$x^3 + 6bbx - 9bcx \infty 0$$

seu $xx + 6bb - 9bc \infty 0$, quæ non potest reduci. Regula verò per quam reductionem Propositæ æquationis jam instituo, talis est:

Dividantur per ultimum terminum exortæ æquationis, si non ex diversis partibus aut Membris constet, (partes aut Membra eas nomino quantitates, quæ in eodem termino signis + vel — cæteris connectuntur) *vel aliàs per unum membrum ultimi termini quodcunque libuerit*, (quemadmodum hîc per $+6bb$, vel $-9bc$) *omnia Membra ultimi termini Propositæ æquationis, quæcunque per illud dividi possunt, atque illud quotiens, sive unum sive plura fuerint, addatur quantitati x, & per hanc summam Proposita æquatio dividi poterit.*

Ut in hoc exemplo, dividendo $-18abb$ per $+6bb$, exsurgit quotiens $-3a$, quod additum ipsi x, quia in Proposita æquatione inter membra ultimi termini nullum aliud habetur, quod per $+6bb$ sit divisibile, exsurgit $x - 3a$, quod Propositam æquationem dividere poterit. Vel si alterum exortæ æquationis Membrum assumptum fuisset, nimirum $-9bc$, similiter prodiisset $-3a$, quia solum $+27abc$ inter Membra ultimi termini in Proposita æquatione reperitur, quod per $-3a$ dividi potest.

Nota, quòd per hanc methodum, dum literam unam aut plures pono ∞ o, vel ∞ alii alicui quantitati, quam *libuerit*, non tantùm rationales literalium æquationum radices, sed etiam irrationales tam literalium quàm numeralium æquationum inveniri possint. Nam etiam Regulæ, quarum ope quarundam Cubicarum æquationum radices investigantur, quas Cardanus Authori Scipioni Ferreo asscribit, hac etiam methodo inveniri possunt, quæ alia est, quàm quæ in 21 Regula ostensa fuit.

Hactenus æquationes absolutè tantùm consideravi, nunc superest, ut eas etiam relativè, quatenus referuntur ad Problema, ex quo educuntur, considerem.

Sed priusquàm hoc aggrediar pauca quædam de iis Regulis, quas hucusque tradidi, dicenda restant. Illæ verò sunt duorum generum, quædam enim aliquibus in casibus docent Propositam

æqua-

æquationem *vel non esse reducibilem, vel in quantum, vel per quales non sit reducibilis*, ut Regula 1 & 2, & 13, 14, & 15. quædam etiam docent, *quo pacto æquationes reduci debeant, quas scimus reducibiles esse, vel per aliquam in qua aliquis terminus datus, aut* ∞ 0 *est*, quales sunt 9 & 11, *vel per aliquam rationalem*, ut sunt 16 & 17, *vel deniq; per alias*. Sed quia sæpe latet, utrum Proposita æquatio, vel quæ ex Problemate quodam educta est, reducibilis sit, nec ne, ad hoc inquirendum aliquis ordo observandus est. Et quem harum Regularum respectu optimum judico, talis est: Inquirerem primò ope priorum Regularum anne æquatio sit irreducibilis; quod in æquationibus irreducibilibus primo plerumque intuitu apparet, aut saltem magna ex parte; adeò, ut multi labores tali in casu præscindantur. At si hoc non ita appareret, transirem ad Regulam XI, (imprimis si Ultimus æquationis terminus multos divisores, vel qui inventu difficiles sint, admittat, vel si æquatio surdas quasdam aut fractas quantitates contineat) per quam omnes æquationes reduci possunt, quæ divisibiles sunt ope alterius in qua una aut plures quantitates desunt, sive æquationem in ordinem redigas respectu incognitæ, sive respectu alicujus cognitæ, quæ ut incognita consideratur.

Et sic omnes pæne literales & reducibiles æquationes, ut & quàm plurimæ numerales reduci possunt. Si verò nec hoc pacto succedat Reductio, eam per cæteras Regulas inquirerem.

Possunt etiam hîc quædam adjungi de signis, ex quibus cognoscitur sitne aliqua æquatio reducibilis nec ne; Verùm cum hoc unum sit ex primariis rei capitibus, plus otii & patientiæ, quam quidem in præsentiarum mihi suppetit, ad id requiritur.

Quod igitur alteram partem Reductionum concernit, quæ refertur ad Problema, ex quo æquatio est deducta, multa adhuc dici possent, tam de ultimæ æquationis (in qua omnes Problematis conditiones includuntur) *Inventione*, quâ omnes aut saltem multæ Reductiones rescindi queunt; quàm *de aliis Reductionibus, quæ sæpe illis supra descriptis breviores existunt*. Nam quod primum attinet, experientia docet in omnibus ferè Problematîs multos esse, eosque diversos modos ultimam æquationem inveniendi, & ad pauciorum dimensionum æquationem, si hunc, quàm

 si alium

ſi alium modum ſequaris, perveniendi. Imò non tantum diversâ, ſed etiam eâdem methodo utendo, tandem in æquationem plurium aut pauciorum dimenſionum pervenies. Atque ita breviori ac faciliori viâ non tantùm multum laboris inveniendo poſtremam æquationem præteribis, ſed etiam reductiones valde inventu difficiles, quæ alioqui, ſi ad altiores æquationes delabaris, quærendæ eſſent, reſcindes.

Quod alterum ſpectat, ejus à me ſpecimen habes, ubi nempe æquationes omnium figurarum ordinatarum circulo inſcriptarum inveniuntur, in eo nempe conſiſtens, quòd cum ultimam æquationem, quæ omnes Problematis conditiones includit, habeas, præterea adhuc aliam, ſed aliâ methodo, inveſtiges, quæ itidem omnes conditiones comprehendat, adeò ut, cum duas æquationes eandem incognitam quantitatem includentes obtinueris, ipſas à ſe invicem tam diu, quàm fieri poſſit, ſubtrahas, vel quod eodem redit, earum communem diviſorem invenias, quemadmodum tunc in inveniendis illis æquationibus ſatis fusè oſtendi.

Vide Sectionem XXI tuarum Exercitationum Mathematicarum.

Et hujus Methodi utilitas ſe longè lateque diffundit, præſertim ad Problemata difficiliora, quorum æquationes ad plures dimenſiones excurrunt. Nam ſæpe numero, ſi earum reductionem per præcedentes Regulas inveſtigares, ætatem conſumeres, quod alioquin, ſi hanc viam ſequaris, breviter, & ut ita dicam, uno momento abſolvere poſſes.

Cum igitur utrumque & Reductiones *in principio in totum* vel ex parte reſcindendi, & eas in multis caſibus adhuc compendioſiùs quàm per præſcriptas Regulas inveniendi, majoris momenti ſit, quàm ut hîc dignè pertractari poſſit; atque ego etiam ſcribendo, tu verò legendo, defeſſi ſimus: præſtat, ut hîc ſubſiſtamus atque aliquantulùm reſpiremus, reliquaque opportuniori tempori reſervemus.

Interim vale & me ama.

Datum Amſteladami Pridie Iduum Iulii A°. 1657.

JO.

JOHANNIS HUDDENII EPISTOLA SECUNDA, DE MAXIMIS ET MINIMIS.

Clarissime Vir,



Vod attinet meam Methodum de Maximis & Minimis, eam breviter hîc describere conabor; & in antecessum demonstrabo hoc

THEOREMA.

Si in æquatione duæ radices sint æquales, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus æquationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus æquationis per secundum terminum Progressionis, & sic deinceps: dico Productum fore æquationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.

In hunc finem assumatur æquatio quælibet, in qua x designet quantitatem incognitam, ut, verbi gratiâ, hæc æquatio

$$x^3 + pxx + qx + r \propto 0$$

ipsaque multiplicetur per $xx - 2yx + yy \propto 0$, id est, per æquationem, in qua duæ radices sunt æquales, & habebitur hæc æquatio

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2yx + yy \text{ in } x^3 \\ xx - 2yx + yy \text{ in } pxx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } qx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } r \end{array}\right\} \propto 0.$$

In

In qua etiam duæ radices æquales comprehendentur, videlicet $x \propto y$, ac denuo $x \propto y$. Vel si illam multiplicassemus per $xx + 2yx + yy \propto 0$, obtinuissemus duas falsas radices æquales: utcunque autem hæc multiplicatio fiat, si pro y ponatur ejus valor, habebitur

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - 2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } r \end{array}\right\} \propto 0.$$

Si jam unumquodque horum quatuor productorum, seu, quod eodem redit, $+1$, -2, $+1$ (quoniam dividi potest per xx, & multiplicatores x^3, pxx, qx, & r nullam mutationem efficiunt) multiplicetur per Arithmeticam Progressionem: erit productum hujus multiplicationis $\propto 0$.

Nam

$$\begin{array}{lccc} \text{Mult.} & +1, & -2, & +1 \\ \text{per} & a, & a+b, & a+2b \\ \hline \text{fit} & a, & -2a-2b, & +a+2b \\ \text{seu} & +2a-2a, & +2b-2b \propto 0. & \end{array} \qquad \begin{array}{lccc} \text{Mult.} & +1, & -2, & +1 \\ \text{per} & a, & a-b, & a-2b \\ \hline \text{fit} & a, & -2a+2b, & a-2b \\ \text{seu} & 2a-2a, & +2b-2b \propto 0. & \end{array}$$

Huc usque universaliter consideravi omnes æquationes, duas æquales radices habentes, quomodocunque ipsæ proponantur, hoc est, sive in iis termini quidam desint sive non, ut & quomodocunque signa + & — sese habuerint. Quod manifestum erit consideranti nobis solummodo rem esse cum hisce numeris $+1$, -2, $+1$, non autem cum multiplicatoribus x^3, pxx, qx, & r.

Similiter respectu Arithmeticæ Progressionis res etiam generalis manet, quandoquidem duo priores termini a, $a+b$, & a, $a-b$ indeterminati sunt. Quod restat, ex sola inspectione præcedentis exempli, conferendo duas sequentes multiplicationes, perspicuum fiet.

$$\begin{array}{l} x^3 + pxx + qx + r \propto 0 \\ xx - 2xx + xx \quad \propto 0 \\ \hline \left.\begin{array}{l} xx - 2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - 2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } r \end{array}\right\} \propto 0. \end{array} \qquad \begin{array}{l} x^3 + pxx + qx + r \propto 0 \\ xx - 2yx + yy \quad \propto 0 \\ \hline \left.\begin{array}{l} x^5 - 2yx^4 + yyx^3 \\ \quad + px^4 - 2pyx^3 + pyyxx \\ \qquad + qx^3 - 2qyxx + qyyx \\ \qquad\quad + rxx - 2ryx + ryy \end{array}\right\} \propto 0. \end{array}$$

Mult. per a. $a\,8\,b$. $a\,8\,2b$. $a\,8\,3b$. $a\,8\,4b$. $a\,8\,5b$.

Nam

Nam quoniam hæc producta $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$, & $xx - 2xx + xx$ in x^3 eadem existunt, erit etiam $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$ multiplicatum per a, a 8 b, a 8 $2b$ æquale o; sic &, quoniam $+px^4 - 2pyx^3 + pyyxx$ idem est quod $xx - 2xx + xx$ in pxx, erit quoque $px^4 - 2pyx^3 + pyyxx$ multiplicatum per a 8 b, a 8 $2b$, a 8 $3b$ (siquidem, ut ex præcedentibus liquet, primus terminus Progressionis ad libitum sumi potest) æquale o; atque sic deinceps. Unde fit, ut etiam Productum totius æquationis per hanc seriem proportionalium sit $\propto$ o, nec non ut unus valor ipsius $x \propto y$, quæ una duarum radicum æqualium est, necessariò includatur. Et cum hîc rursus nulla habeatur ratio multitudinis aut paucitatis aut etiam qualitatis multiplicatorum: erit Propositum Theorema universaliter demonstratum de quibuscunque æquationibus, duas radices æquales habentibus.

Hinc emanat

Si in æquatione aliqua 3 sint radices æquales, & ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit, eo modo quo jam dictum est, remanebunt in Producto duæ adhuc æquales radices istarum trium; ac proinde Productum hoc denuo per Arithmeticam Progressionem multiplicari poterit. Quòd si autem in Proposita æquatione quatuor radices æquales fuerint, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, relinquentur in hoc Producto adhuc 3 æquales radices istarum 4, & sic porrò, quotcunque æquales radices æquatio habuerit, semper per singulas ejusmodi multiplicationes una tantùm istarum æqualium radicum tolletur.

Hoc itaque demonstrato, transeo ad meam Methodum de Maximis & Minimis, quæ sic se habet.

Positis quotcunque quantitatibus Algebraïcis, maximum aut minimum designantibus, ponantur ipsæ $\propto z$; & ordinatâ æquatione multiplicetur ea per Progressionem Arithmeticam, eo modo, quo dictum est: & Pro-

ductum erit æquatio, quæ communem cum præcedenti radicem habebit.

Ita ut ad hujus Methodi demonstrationem tantummodo probandum restet, æquationem illam primam duas æquales radices comprehendere. Quod equidem demonstratu adeò facile est, ut huic rei ulteriùs insistere nihil aliud sit, quàm operam & oleum perdere.

Et hæc quidem generalis mea Methodus est. Particulares verò, quas antehac in aliquibus exemplis vidisti, hinc resultant. quemadmodum ex subjunctis operationibus, utroque modo factis, perspicere licebit.

1. *Cùm Algebraïci termini, maximum aut minimum designantes, non nisi unam incognitam quantitatem continent, & nullas habent fractiones, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur,* multiplico tantùm unumquemque terminum per numerum dimensionum incognitæ quantitatis, neglectis quantitatibus omnibus, in quibus incognita non reperitur, & suppono Productum $\propto$ o.

Ex. gr. sit $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab \propto$ alicui maximo.

mult. per 3 3 1

fit $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x \propto 0$, vel $9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \propto 0$.

Juxta generalem Methodum erit

$$3ax^3 - bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x + aab \propto 0.$$
$$- z$$

mult. per Arithm. Progr. 3. 3. 2. 1. 0.

& fit, ut ante, $9ax^3 - 3bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x \propto 0$, seu

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \propto 0.$$

2. *Si Algebraïci termini, maximum aut minimum designantes, unam tantùm incognitam quantitatem comprehendunt, atque aliquot fractiones admittunt, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur,* operatio institui poterit, hoc pacto:

Primò deleo omnes quantitates cognitas. Deinde si reliquæ quan-

quantitates non ejusdem denominationis fuerint, ipsas sub eundem denominatorem reduco. Quo peracto, considero hujus fractionis integrum Numeratorem cum unoquoque Membro seu parte separata Denominatoris (si ex diversis partibus constet) tanquam unam quantitatem, Maximum aut Minimum designantem, ac unumquodque membrum seu partem separatam Numeratoris multiplico per dimensionum numerum quantitatis incognitæ istius Membri, postquam ab eodem numero est ablatus dimensionum numerus incognitæ quantitatis, qui in hoc Membro Denominatoris reperitur; productoque per hoc Membrum Denominatoris multiplicato, erunt omnia ejusmodi producta simul ∞ o, ut ex sequentibus exemplis clariùs patebit.

1 *Exemplum.*

Esto $\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5}{x^3} - ax + bx + ab$ ∞ alicui maximo.

Deletâ quantitate cognitâ ab, reliquisque terminis sub communi Denominatore reductis, obtinebitur

$$\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5 - ax^4 + bx^4}{x^3}.$$

Mult. num. per $-3, \quad -2, \quad +2, \quad +1, \quad +1$:

fit $-12aab^3 - 10a^3x + 2x^5 - ax^4 + bx^4$ mult. per x^3 ∞ o.

&, dividendo per x^3,

$-12aab^3 - 10a^3x + 2x^5 - ax^4 + bx^4$ ∞ o.

Juxta generalem Methodum

est $\frac{4aab^3 + 5a^3x + x^5}{x^3} - ax + bx + ab$ ∞ o,
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - z$

id est, $4aab^3 + 5a^3x + x^5 - ax^4 + bx^4 + abx^3$ ∞ o;
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - z$

Seu, ordinatâ æquatione, $x^5 - ax^4 + abx^3 * + 5a^3x + 4aab^3$ ∞ o.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + b \quad - z$

$+2, +1, \quad 0, -1, \quad -2, \quad -3$

$2x^5 - ax^4 \quad * \quad * - 10a^3x - 12aab^3$ ∞ o.
$\quad + b$

2 *Exemplum.*

Esto $\frac{baax + aaxx - bx^3 - x^4}{baa + x^3} - a + x$ ∞ alicui maximo.

De-

Deletâ quantitate cognitâ a, & reliquis sub communi divisore reductis, habebitur $\frac{2baax+aaxx-bx^3}{baa+x^3}$.

$$\text{Porrò pro } \frac{\overset{+1,}{2baax}+\overset{+2,}{aaxx}-\overset{+3}{bx^3}}{baa}, \text{ scribo } {}^{1}baax+{}^{2}aaxx-{}^{3}bx^3 \text{ in } baa \\ \text{pro } \frac{\overset{-2,}{2baax}+\overset{-1,}{aaxx}-\overset{0}{bx^3}}{x^3}, \text{ scribo } -{}^{4}baax-aaxx \text{ in } x^3 \Bigg\} \infty 0$$

$$\text{Divisis per } aax, \text{ habebitur } 2baa+{}^{2}aax-{}^{3}bxx \text{ in } b \\ -{}^{4}bx-xx \text{ in } xx \Big\} \infty 0$$

adeoque $-x^4-{}^{4}bx^3-{}^{3}bbxx+{}^{2}aabx+{}^{2}bbaa \infty 0$.

Sic & si fuerit $\frac{2baax+aaxx-bx^3+a^4}{4x^3+2bxx-3aax-c^3}$ ∞ alicui maximo,

$$\text{Pro } \frac{\overset{-2,}{2baax}+\overset{-1,}{aaxx}-\overset{0,}{bx^3}+\overset{-3}{a^4}}{4x^3}, \text{ scribo } -{}^{4}baax-aaxx-{}^{3}a^4 \text{ in } 4x^3$$
$$\text{pro } \frac{\overset{-1,}{2baax}+\overset{0,}{aaxx}-\overset{+1,}{bx^3}+\overset{-2}{a^4}}{2bxx}, \quad -{}^{2}baax-bx^3-{}^{2}a^4 \text{ in } 2bxx$$
$$\text{pro } \frac{\overset{0,}{2baax}+\overset{+1,}{aaxx}-\overset{+2,}{bx^3}+\overset{-1}{a^4}}{-3aax}, \quad +aaxx-{}^{2}bx^3-a^4 \text{ in } -{}^{3}aax$$
$$\text{pro } \frac{\overset{1,}{2baax}+\overset{2,}{aaxx}-\overset{3,}{bx^3}+\overset{0}{a^4}}{-c^3}, \quad +{}^{2}baax+{}^{2}aaxx-{}^{3}bx^3 \text{ in } -c^3 \Bigg\} \infty 0.$$

Juxta generalem Methodum

est $\frac{2baax+aaxx-bx^3}{baa+x^3} \infty z$

vel $2baax+aaxx-bx^3 \infty baaz+x^3z$

seu $\begin{matrix} -bx^3 \\ -z \end{matrix} +aaxx+2baax-baaz \infty 0$

Arith. Prog. $\quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$

$\begin{matrix} -3bx^3 \\ -3z \end{matrix} +2aaxx+2baax \infty 0$, hoc est,

$$\frac{-3bx^3+2aaxx+2baax}{3x^3} \infty z$$

ac proinde $\frac{2baax+aaxx-bx^3}{baa+x^3} \infty \frac{+2baax+2aaxx-3bx^3}{3x^3}$

&, ut supra, $x^4+4bx^3+3bbxx-2aabx-2bbaa \infty 0$.

Patet

Patet itaque, duas has speciales Regulas in generali illa Methodo esse fundatas respectu hujus Progressionis 0, 1, 2, 3, 4, &c. multiplicando scilicet terminum, in quo incognita quantitas x non reperitur per 0; ubi x unam habet dimensionem per 1; & sic porrò. Sed in genere notandum, quòd, dum operando juxta generalem Methodum Progressionem illam Arithmeticam ad libitum sumere licet, semper is terminus æquationis, quem libuerit, tolli possit, multiplicando illum tantùm per 0. Atque ita valor ipsius z per unam Progressionem simpliciùs obtineri poterit, quàm per aliam: ut, si in præcedenti exemplo, ubi multiplicavimus per 3, 2, 1, 0, multiplicassemus per 0, 1, 2, 3, obtinuissemus $aaxx + 4baax - 3baaz \infty 0$, seu $\frac{xx + 4bx}{3b} \infty z$.

Unde apparet, ipsam quantitatem z (sive maximum vel minimum), si x cognita supponatur, inveniri atque exprimi posse multis diversis modis, è quibus faciliores pro Constructione eligere licebit: Aut si z cognita supponatur, poterit x totidem diversis modis inveniri. Porrò considerando z & x, ut incognitas, poterimus ad alterutram tollendam æquationem instituere inter duos ex simplicissimis valores: ut, in superiori exemplo, inter $z \infty \frac{-3bxx + 2aax + 2baa}{3xx}$ & $z \infty \frac{xx + 4bx}{3b}$.

3. *Si termini Algebraïci, Maximum aut Minimum designantes, plures unâ quantitate incognitâ includunt*, suppono ipsos ∞z; & per hanc æquationem & per cæteras datas, seu quæ ex natura Problematis manant, (quæque semper simul, si omnes Problematis conditiones includunt, tot numero existunt, quot incognitæ quantitates, unâ exceptâ, habentur, nimirum si unum tantùm Maximum aut Minimum inter infinitas magnitudines quæritur, non autem inter infinita Maxima;) reduco æquationes omnes ad unam, in qua necessariò duæ quantitates incognitæ continebuntur, & inter eas z. Cumque tunc sola z ad Maximi vel Minimi inventionem nota esse debeat, manifestum est in eum finem duntaxat concipiendum esse, alteram quantitatem incognitam duas æquales radices habere.

Sumamus, exempli gratiâ, tres æquationes, quibus maximam latitudinem curvæ determinavi, quales illæ pag. 498 Exercitationum tuarum Mathematicarum reperiuntur; excepto tantùm

 quòd

quòd Maximum hîc appellem z, & quod ibi z nominatum est, hîc appellem v.

1ma Æq. $y^3 - nyx + x^3 \infty 0$
2da Æq. $v - x \infty y$
3^{tia} Æq. $\frac{1}{2}v - y \infty z$ maximo.

Substituto valore ipsius y $2^{dæ}$ æquationis in locum ipsius y $1^{mæ}$ & $3^{tiæ}$, habebitur

pro 1ma Æq. $v^3 - 3vvx + 3vxx \infty vnx - nxx$
& pro 3^{tia} Æq. $x \infty z + \frac{1}{2}v$.

Subrogato autem valore ipsius x $3^{tiæ}$ æquationis in ejusdem locum in 1ma, fiet pro

1ma Æq. $\frac{1}{4}v^3 + 3vzz \infty \frac{1}{4}nvv - nzz$
vel $\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$.

Atque hæc quidem æquatio jam sola relicta est, in qua igitur ut ultimæ conditioni Problematis satisfiat, hoc est, ut ea ita determinetur, ut z fiat Maximum, multiplico (quemadmodum ibi factum fuit) eandem æquationem

$\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$
per Arith. Progr. $3, \quad 2, \quad 1, \quad 0:$
obtineoque $\frac{3}{4}v^3 - \frac{1}{2}nvv + 3zzv \quad * \quad \infty 0$
vel $3zz \infty \frac{1}{2}nv - \frac{3}{4}vv$.

Hinc subrogato valore ipsius zz, per hanc æquationem invento, in ejus locum in præcedenti $\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$, obtinebitur $\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + \frac{1}{2}nvv - \frac{3}{4}v^3 + \frac{1}{6}nnv - \frac{1}{4}nvv \infty 0$
hoc est, $-\frac{1}{2}v^3 + \frac{1}{6}nnv \infty 0$
vel $vv \infty \frac{1}{3}nn$.

Si Arithmetica Progressio fuisset $0, 1, 2, 3$, invenissemus $3zz \infty \frac{nvv}{8v+4n}$; si $2, 1, 0, -1$, habuissemus $3zz \infty \frac{\frac{3}{2}v^3 - \frac{3}{4}vvn}{n}$. Et sive valor ipsius zz, per utramlibet harum æquationum inventus, in præcedenti subrogetur æquatione $\frac{1}{4}v^3 - \frac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$, sive alter alteri adæquetur, ponendo $\frac{1}{2}nv - \frac{3}{4}vv \infty \frac{nvv}{8v+4n}$, vel $\infty \frac{\frac{3}{2}v^3 - \frac{3}{4}vvn}{n}$, obtinebitur semper $vv \infty \frac{1}{3}nn$.

Quamvis autem operationes uno aut alio modo factæ hîc parùm inter

inter se differant, potest tamen sæpe numero, ut supra monui, contingere, ut una multo prolixior ac difficilior sit quàm alia, quo quidem casu commodiorem viam, quæ facilè perspicitur, eligere satius erit.

Cæterùm notandum, ultimam hanc æquationem $\frac{1}{4} v^3 + 3vzz \infty \frac{1}{4} nvv - nzz$ determinari etiam posse per secundum modum præcedentem. Etenim existente $zz \infty \frac{\frac{1}{4} nvv - \frac{1}{4} v^3}{3v + n}$, & $z \infty$ maximo: erit etiam hic valor ipsius zz omnium maximus, ideoque

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4} nvv - \frac{2}{4} v^3 \text{ in } 3v \\ \frac{2}{4} nvv - \frac{3}{4} v^3 \text{ in } n \end{array}\right\} \infty\, 0$$

$$\text{div. per } vv. \quad \text{vel} \left.\begin{array}{l} \frac{1}{4} n - \frac{2}{4} v \text{ in } 3v \\ \frac{2}{4} n - \frac{3}{4} v \text{ in } n \end{array}\right\} \infty\, 0, \text{ id est, } \left.\begin{array}{l} \frac{3}{4} nv - \frac{6}{4} vv \\ \frac{2}{4} nn - \frac{3}{4} nv \end{array}\right\} \infty\, 0$$

$$\text{vel } \frac{2}{4} nn - \frac{6}{4} vv \infty\, 0$$

$$\text{seu } \frac{1}{3} nn \infty vv.$$

Quoniam verò in multis casibus æquatio ultimò relicta non sinit ut valor ipsius z vel zz, aut z^3, &c. in ejusmodi terminis, in quibus ipse z non invenitur, exprimi possit, visum fuit in exempli hujus operatione generalem Methodum indicare.

Atque hîc, Vir Amicissime, multa adhuc dicenda restarent, sed ne rursus epistola mea voluminis instar se extendat, scriptionis meæ filum abrumpam; præsertim cùm id, quod hîc desideratur, non difficile sit ex præcedentibus colligere. At verò ne te lateat, quid hîc desiderari putem, adjungam argumentum tractatus, quem de hac materia ante 2 aut 3 annos in proprios usus adornavi, quemque nuper obiter & quasi per transennam inspexisti. In eo autem pertractantur

1. *Methodus de Maximis & Minimis.* Termini verò Algebraïci, Maximum vel Minimum designantes, considerantur

1. *Vel respectu cognitionis nostræ, sic ut certi simus in iis Maximum esse comprehensum, si aliquod detur Maximum; aut Minimum, si aliquod Minimum detur.*

Termini autem hi Algebraïci in se continent

Vel unam duntaxat incognitam quantitatem, habentem

1. *Vel fractionem nullam, in cujus Denominatore incognita reperitur quantitas.*
2. *Vel fractiones, in quarum Denominatore ipsa reperitur.*

Vel plures unâ incognitâ quantitate, quæ duplices sunt

1. *Vel tot simul cum iis æquationes dantur, seu in natura Problematis includuntur, quot sunt incognitæ quantitates unâ exceptâ;*
2. *Vel non totidem, aut etiam nulla.*

2. *Vel respectu nostræ inscientiæ*, id est, cùm incerti sumus, utrum in iis aliquod Maximum aut Minimum, aut utrumque, aut etiam neutrum contineatur. ipsos autem rursus considero vel *absolutè*, vel *relativè* ad aliquod Problema.

2. *Ejusdem usus atque utilitas*, quæ quidem se longè lateque extendit, ac præsertim ad ea Problemata, quæ aliàs difficulter ad æquationem revocari possunt. Cujus exemplum illustre est *Determinatio omnium æquationum*, quæ res adeò generalis atque utilis, hujus Methodi tantùm corollarium existit.

Vale, Vir Amicissime, & me amare perge

Tui

Observantissimum

IOHANNEM HUDDE.

Dabam Amstelodami 6 Cal. Februar. Aº. 1658.

FINIS.

HENRICI van HEURAET EPISTOLA DE TRANSMUTATIONE CURVARUM LINEARUM IN RECTAS.

Clarissimo Viro

D. FRANCISCO à SCHOOTEN

HENRICUS van HEURAET

S. D.

CUm nuperrimè ex tuis ad me datis, Vir Clarissime, intellexerim, desiderio te teneri videndi Methodum à me inventem, cujus beneficio complures curvæ lineæ (ut tibi indicavit D. Huddenius) *in rectas possunt transmutari: non omittendum duxi, quin eandem tibi ocyùs transmitterem, tuoq; in primis judicio exponerem. Verùm præmonere te volui, eam à me tunc temporis excogitatam esse, cùm iter in Galliam meditarer, quo nec omnia, quæ ea de re dici queunt, perpendere, nec quæ ante discessum inveneram, chartis committere valui. In Gallia verò nunquam rebus Mathematicis vacare, sed me totum aliis studiis applicare constitui, adeò ut vix quicquam prælo dignum me scribere posse confidam. Attamen ut petitioni tuæ utcunque satisfaciam, habitâ ratione temporis, quod mihi valde carum est: visum fuit in memoriam revocare, ac breviter conscribere, quæ ante circa hanc rem meditatus sum, eaq; paucis hîc subjicere. Quæ, si Mathematicis non displicitura judices, Commentariis tuis adjungere poteris.*

Dat. Salmurii, die 13 Januarii. A° 1659.

Vale, & perge amare

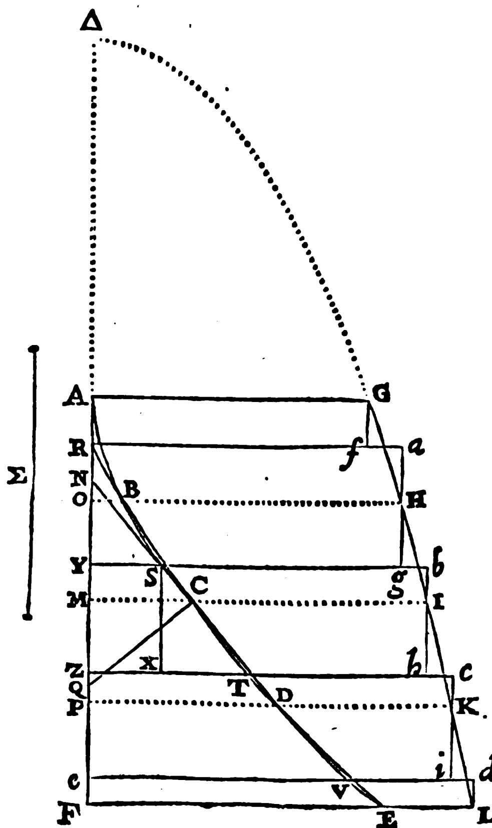
èx asse tuum

HENRICUM van HEURAET.

Huddenius *noster te salutat diligenter.*

Si

Si dentur duæ lineæ curvæ, exempli gratiâ, A B C D E, G H I K L, & recta A F, ejus naturæ, ut, (ductâ ex puncto M, in linea A F pro libitu assumpto, perpendiculari M I, secante datas curvas in C & I, uti & C Q perpendiculari ad curvam A B C D E,) M C sit ad C Q, sicut linea aliqua data Σ ad M I: erit superficies A G H I K L F æqualis rectangulo comprehenso sub data linea Σ & alia recta æquali curvæ A B C D E.



Dividatur linea A F *in partes quotcunque*, verbi gratiâ, in punctis O, M, & P, ducanturque perpendiculares O H, *M I*, P K, secantes curvam A B C D E in punctis B, C, & D, at curvam G H I K L in punctis H, I, & K; & per puncta A, *B*, C, *D*, & E agantur tangentes, quæ sibi mutuò occurrant in R, S, T, & V; & per hæc puncta ducantur lineæ R *a*, Y *b*, Z *c*, *e d* perpendiculares ipsi A F; & per puncta G, H, I, K, & L agantur lineæ ipsi A F parallelæ, secantes R *a* in *f* & *a*, Y *b* in *g* & *b*, Z *c* in

in *h* & *c*, *e d* in *i* & *d*; denique ex S ducatur S X parallela lineæ A F, producaturque tangens T S usque in N.

Propter rectum angulum N C Q, erit C M ad C Q, ut M N ad N C. Atqui M N est ad N C, ut S X ad S T. Quare erit S X ad S T, ut C M ad C Q. Et quia C M est ad C Q, ut Σ ad M I, erit & S X ad S T, ut Σ ad M I, ac proinde rectangulum sub S X sive Y Z & M I sive Y *b* æquale rectangulo sub S T & Σ. Eodem modo demonstrabitur, rectangulum *c e* esse æquale ▭lo sub T V & Σ, & ▭ *d* F ꝏ ▭ V E, Σ, & ▭ *a* Y ꝏ ▭lo sub R S & Σ. Quapropter omnia hæc rectangula simul sumpta æqualia erunt rectangulo sub Σ & alia recta æquali omnibus tangentibus simul sumptis. Unde cum illud verum sit, quotcunque rectangula atque tangentes extiterint, & figura ex parallelogrammis constans, si eorum numerus in infinitum augeatur, desinat in superficiem A G H I K L F, ac tangentes similiter in lineam curvam A B C D E, liquet superficiem A G H I K L F æqualem esse rectangulo sub Σ & recta æquali curvæ A B C D E. Quod erat demonstrandum.

Quomodo autem hinc longitudo datæ curvæ lineæ investigari possit, sequentibus exemplis patebit.

Sit primò curva A B C D E ejus naturæ, ut, sumpto in linea A F pro libitu puncto M, ductâque perpendiculari M C, si A M vocetur x, & M C vocetur y, semper yy sit ꝏ $\frac{x^3}{a}$. Deinde positis A Q ꝏ s, C Q ꝏ v, & M I ꝏ z: erit Q M ꝏ $s - x$, & ejus quadratum ꝏ $ss - 2sx + xx$. Cui si addatur quadratum ex M C, hoc est, yy sive $\frac{x^3}{a}$, invenietur $ss - 2sx + xx + \frac{x^3}{a}$ ꝏ vv.

Propter duas æquales radices
mult. juxta meth. Huddenii per $\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0,$

& invenietur $-2sx + 2xx + \frac{3x^3}{a}$ ꝏ 0.

Unde A Q sive s ꝏ $x + \frac{3xx}{2a}$. à qua si subtrahatur A M ꝏ x, remanebit M Q ꝏ $\frac{3xx}{2a}$, cujus quadratum est $\frac{9x^4}{4aa}$. cui adde □ C M seu $\frac{x^3}{a}$, & proveniet □ C Q ꝏ $\frac{9x^4}{4aa} + \frac{x^3}{a}$. Erit jam ut C M $\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ ad C Q $\sqrt{\frac{9x^4}{4aa} + \frac{x^3}{a}}$, ita cognita aliqua linea, puta $\frac{1}{3}a$, (licèt enim

enim eam pro libitu assumere) ad MI ∞ z, eritque $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{1}{9}aa}$. Id quod arguit, lineam GHIKL esse Parabolam, cujus vertex est in Δ, existente AΔ ∞ $\frac{4}{9}a$, & latere recto ∞ $\frac{1}{4}a$. ac proinde longitudo lineæ curvæ ABCDE est $\sqrt{\frac{v^3}{a}} - \frac{8}{27}a$, existente ΔF ∞ v.

Similiter si loco $yy \infty \frac{x^3}{a}$ ponatur hæc æquatio $y^4 \infty \frac{x^5}{a}$, aut $y^6 \infty \frac{x^7}{a}$, aut $y^8 \infty \frac{x^9}{a}$, atque sic porrò in infinitum: invenietur semper superficies AGHIKLF ejus naturæ ut quadrari possit, ac proinde omnes hæ curvæ in rectam sunt permutabiles.

Si verò ABCDE sit Parabola, cujus axis AG, & latus rectum ∞ a: invenietur MQ ∞ $\frac{2x^3}{aa}$, & ejus quadratum ∞ $\frac{4x^6}{a^4}$. cui adde quadratum CM, & habebitur $\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}$ pro $\square$CQ. Hinc ut CM $\frac{xx}{a}$ ad CQ $\sqrt{\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}}$, sic cognita aliqua linea, puta a, ad MI ∞ z: eritque $z \infty \sqrt{4xx + aa}$, & linea GHIKL Hyperbola, cujus axis linea AG, centrum punctum A, latus rectum ∞ $\frac{1}{2}a$, & transversum ∞ $2a$.

Quod ipsum docet, longitudinem curvæ Parabolicæ inveniri non posse, quin simul inveniatur quadratura Hyperbolæ, & vice versâ.

FINIS.

